Mais que peut-on donc encore bien chercher en mathématiques ?!

Florent Nacry

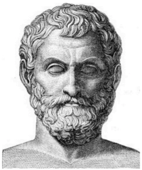
Laboratoire LAMPS - Université Perpignan Via Domitia

Mathic'Hall - Semaine des maths - Perpignan

La réponse habituelle

RIEN.

Un constat : la célébrité de Pythagore et Thalès

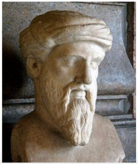


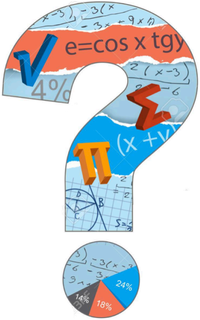
Thalès de Milet

624-547 av J.C.

600/500 av J.C.

Pythagore de Samos

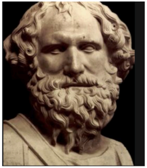


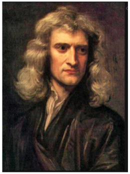


Cédric Villani (Médaille Fields)

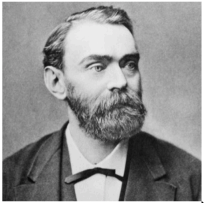
1973-

Quelques mathématiciens supplémentaires ... ?

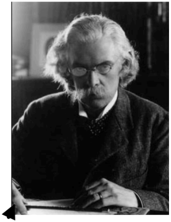




Prix Nobel des mathématiques...?



Alfred Nobel
(1833-1896)



Gösta Mittag-Leffler
(1846-1927)

Sofie Hess
(1851-1919)

On peut montrer que la fonction exponentielle satisfait

$$\exp(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On peut étendre cette fonction à l'aide d'une famille de fonctions dite de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \text{où} \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

On peut montrer que la fonction exponentielle satisfait

$$\exp(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On peut étendre cette fonction à l'aide d'une famille de fonctions dite de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \text{où} \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

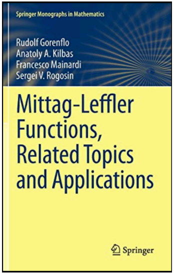


Figure 1: Les fonctions de Mittag-Leffler occupent des ouvrages entiers...

Dérivée fractionnaire

La fonction Γ peut être vue comme une extension de la factorielle puisqu'elle satisfait

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Dérivée fractionnaire

La fonction Γ peut être vue comme une extension de la factorielle puisqu'elle satisfait

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Nous allons donner un sens à la dérivée d'ordre α non entier d'un monôme. Pour un entier naturel k, on a :

$$f(x) = x^k, f'(x) = kx^{k-1}, f''(x) = k(k-1)x^{k-2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} \quad n \leq k.$$

Dérivée fractionnaire

La fonction Γ peut être vue comme une extension de la factorielle puisqu'elle satisfait

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Nous allons donner un sens à la dérivée d'ordre α non entier d'un monôme. Pour un entier naturel k, on a :

$$f(x) = x^k, f'(x) = kx^{k-1}, f''(x) = k(k-1)x^{k-2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} \quad n \leq k.$$

Tout ceci nous amène à définir la dérivée d'ordre α de f

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha}.$$

En particulier, on peut montrer que la dérivée d'ordre $1/2$ de f vaut

$$f^{(1/2)}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Commentaires

- On peut définir une intégrale fractionnaire de manière analogue

$$I^{\alpha}(f) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Commentaires

- On peut définir une intégrale fractionnaire de manière analogue

$$I^{\alpha}(f) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

- La question de la dérivation fractionnaire se pose dès la fin du 17ème siècle à travers des correspondances impliquant notamment l'un des "co-inventeurs de la dérivée ordinaire" : G.W. Leibniz.

Figure 2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Commentaires

- On peut définir une intégrale fractionnaire de manière analogue

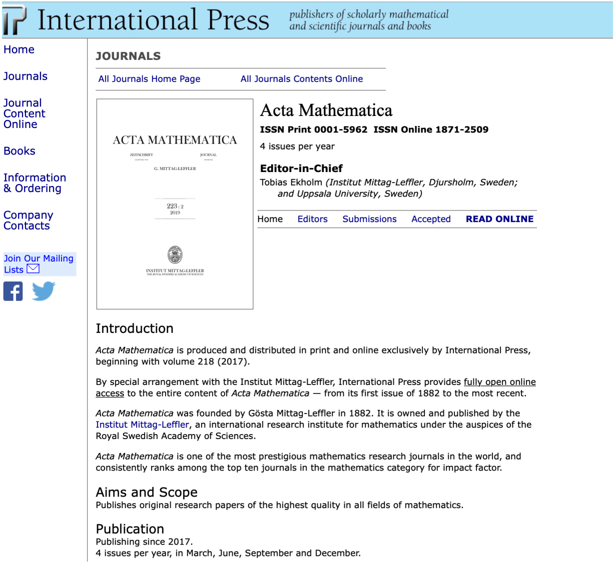
$$I^{\alpha}(f) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

- La question de la dérivation fractionnaire se pose dès la fin du 17ème siècle à travers des correspondances impliquant notamment l'un des "co-inventeurs de la dérivée ordinaire" : G.W. Leibniz.

Figure 2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

- Les fonctions de Mittag-Leffler jouent un rôle analogue dans le calcul fractionnaire à celui de l'exponentielle dans le cadre usuel.

Gösta Mittag-Leffler et "son" journal



International Press *publishers of scholarly mathematical and scientific journals and books*

Home

Journals

Journal Content Online

Books

Information & Ordering

Company Contacts

Join Our Mailing Lists

JOURNALS

All Journals Home Page — All Journals Contents Online

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT — JOURNAL

G. MITTAG-LEFFLER

223 : 2

2019

INSTITUT MITTAG-LEFFLER

Acta Mathematica

ISSN Print 0001-5962 ISSN Online 1871-2509

4 issues per year

Editor-in-Chief

Tobias Ekholm *(Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden; and Uppsala University, Sweden)*

Home — Editors — Submissions — Accepted — **READ ONLINE**

Introduction

Acta Mathematica is produced and distributed in print and online exclusively by International Press, beginning with volume 218 (2017).

By special arrangement with the Institut Mittag-Leffler, International Press provides fully open online access to the entire content of *Acta Mathematica* — from its first issue of 1882 to the most recent.

Acta Mathematica was founded by Gösta Mittag-Leffler in 1882. It is owned and published by the Institut Mittag-Leffler, an international research institute for mathematics under the auspices of the Royal Swedish Academy of Sciences.

Acta Mathematica is one of the most prestigious mathematics research journals in the world, and consistently ranks among the top ten journals in the mathematics category for impact factor.

Aims and Scope

Publishes original research papers of the highest quality in all fields of mathematics.

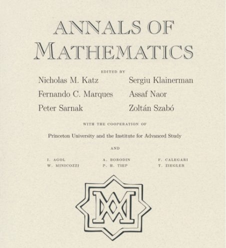
Publication

Publishing since 2017.

4 issues per year, in March, June, September and December.

Figure 3: Gösta Mittag-Leffler est le fondateur d'Acta Mathematica, l'une des revues de mathématiques les plus prestigieuses

Le principe de la publication : choix du journal



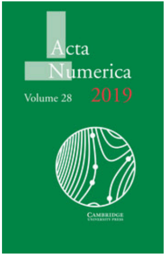
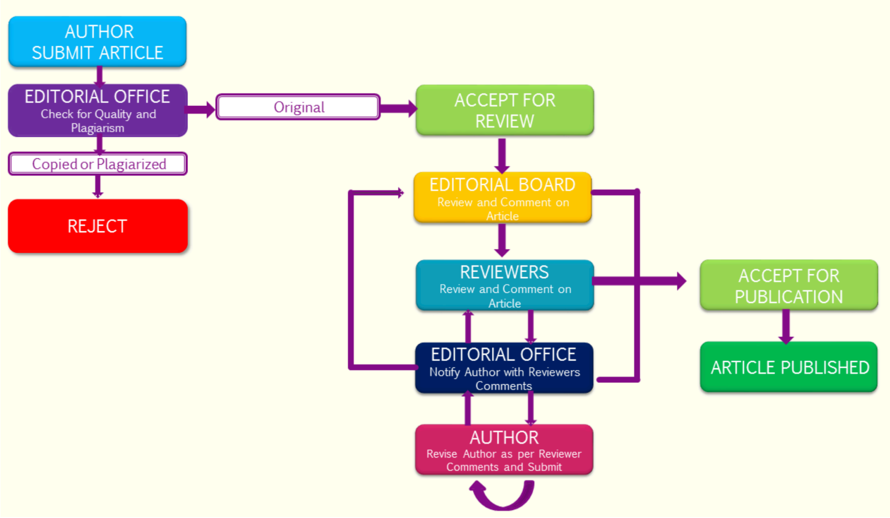


Schéma du principe de la publication



The notion of prox-regular functions was first introduced in 1996 by Poliquin and Rockafellar and since then it was studied by several authors. The motivation comes from the strong connection in convex analysis between functions and their Moreau envelopes. This class of functions has proven to be important in several numerical and theoretical applications, namely in the study of the so-called sweeping process. To this class of functions it is associated the class of prox-regular sets by taking the indicator function of sets.

The present paper is devoted to preservation of prox-regularity under intersection and preimage operations. The authors present sufficient conditions ensuring this preservation. These conditions are given in terms of the so-called metric regularity. The results obtained are useful for applications in optimization and variational analysis. The paper is well written and the results presented are correct and original. So, I recommend its publication in SIAM Journal on Optimization taking into account the following remarks:

Le moteur de recherche des matheux

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MATHSCINET
MATHEMATICAL REVIEWS

Universite de Paris

REMOTE ACCESS

Matches: 104 Show first 100 results Select Page: Previous **1** 2 3 4 5 6 Next

Batch Download: Reviews (HTML) Retrieve Marked | Retrieve First 50 | Mark All | Unmark All

Publications results for "Items authored by Villani, Cédric"

Sort by: Newest

Search within results

Item Type
- Reviewed (88)
- Indexed (15)
- Pending (1)

Institutions
- Appliquees (UMPA)(UMR 5669), École Normale Supérieure de Lyon
- Département de Mathématiques, École Normale Supérieure de Lyon (15)
- Department of (11)

MR3939278 Pending Villani, Cédric Inégalités isopérimétriques dans les espaces métriques mesurés [d'après F. Cavalletti & A. Mondino]. (French) [Isoperimetric inequalities in metric measure spaces [following F. Cavalletti & A. Mondino]] Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135. *Astérisque* No. 407 (2019), Exp. No. 1127, 213–265. ISBN: 978-2-85629-897-8 53C23 (49Q05)
Review PDF | Clipboard | Journal | Article

MR3822148 Indexed Banyaga, Augustin; Gangbo, Wilfrid; Luca, Florian; Neudauer, Nancy Ann; Shubin, Carol; Villani, Cédric; Waldschmidt, Michel Snapshots of mathematics in Sub-Saharan Africa. Edited by Allyn Jackson and Shubin. *Notices Amer. Math. Soc.* 65 (2018), no. 7, 798–808. 01A74
Review PDF | Clipboard | Journal | Article

MR3544918 Reviewed Villani, Cédric Synthetic theory of Ricci curvature bounds. *Jpn. J. Math.* 11 (2016), no. 2, 219–263. (Reviewer: Mikhail G. Katz) 53B21 (49Q20)
Review PDF | Clipboard | Journal | Article | 2 Citations

MR3495386 Reviewed Cartier, Pierre; Dhombres, Jean; Heinzmann, Gerhard; Villani, Cédric Freedom in mathematics. Translated from the 2012 French edition. *Springer India Private Ltd., New Delhi,* 2016. xvi+117 pp. ISBN: 978-81-322-2786-1; 978-81-322-2788-5 00A30
Review PDF | Clipboard | Series | Book

MR3469459 Reviewed Villani, Cédric Birth of a theorem. A mathematical adventure. Translated from the 2012 French original by Malcolm DeBevoise. With illustrations by Claude Gondard. *Farrar, Straus and Giroux, New York,* 2016. 260 pp. ISBN: 978-0-374-53667-1; 978-0-86547-767-4; 978-0-374-71023-1 (Reviewer: J. M. Plotkin) 01A70 (01A60)
Review PDF | Clipboard | Series | Book

Deux récompenses majeures

Médaille Fields

- Attribuée tous les 4 ans depuis 1936 au congrès international des maths.
- 4 lauréats (au plus)
- Condition nécessaire : Age < 40 ans

John Charles Fields
(1863-1932)

Prix Abel

- Attribué tous les ans depuis 2003 par l'Académie Norvégienne des Sciences et des lettres.

Niels Henrik Abel
(1802-1829)

Lauréats : la France bien représentée

Année	Lauréats
1936	Lars Ahlfors, Jesse Douglas
1950	Laurent Schwartz, Atle Selberg
1954	Kunihiko Kodaira, Jean-Pierre Serre
1958	Klaus Roth, René Thom
1962	Lars Hörmander, John Milnor
1966	Michael Atiyah, Paul Cohen, Alexandre Grothendieck[d], Stephen Smale
1970	Alan Baker, Heisuke Hironaka, Sergueï Novikov, John Griggs Thompson
1974	Enrico Bombieri, David Mumford
1978	Pierre Deligne, Charles Fefferman, Gregori Margulis, Daniel Quillen
1982	Alain Connes, William Thurston, Shing-Tung Yau[e]
1986	Simon Donaldson, Gerd Faltings, Michael Freedman
1990	[f] Vladimir Drinfeld, Vaughan Jones, Shigefumi Mori, Edward Witten
1994	Jean Bourgain, Pierre-Louis Lions, Jean-Christophe Yoccoz, Efim Zelmanov
1998	Richard Ewen Borcherds, William Timothy Gowers, Maxim Kontsevich, Curtis McMullen
2002	Laurent Lafforgue, Vladimir Voevodsky
2006	Andreï Okounkov, Grigori Perelman (a décliné le prix), Terence Tao, Wendelin Werner
2010	Elon Lindenstrauss, Ngô Bảo Châu, Stanislav Smirnov, Cédric Villani
2014	Artur Ávila, Manjul Bhargava, Martin Hairer, Maryam Mirzakhani
2018	Caucher Birkar, Alessio Figalli, Peter Scholze, Akshay Venkatesh

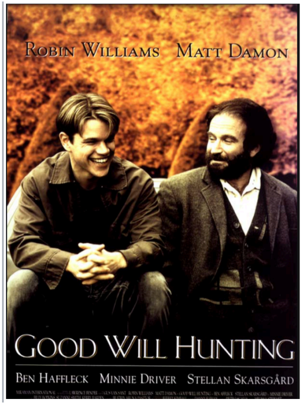
Liste des lauréats de la médaille Fields
Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Médaille_Fields

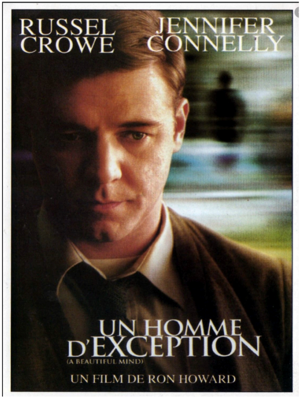
L’unique lauréate...

Maryam Mirzakhani (1977-2017)

- **Trois médailles d’or aux Olympiades**
- **Thèse à Harvard sous la direction de Curtis McMullen (médaille Fields 88)**
- **Prof. d’université à Stanford**
- **Médaille Fields (2014) + Dizaine de récompenses internationales**
- **Spécialiste en topologie et géométrie.**

La médaille Fields au 7ème Art





- **Résoudre l'un des 23 problèmes de Hilbert.**

En 1900, lors du deuxième congrès international des mathématiques, David Hilbert publie une liste de 23 problèmes défiant les mathématiciens.

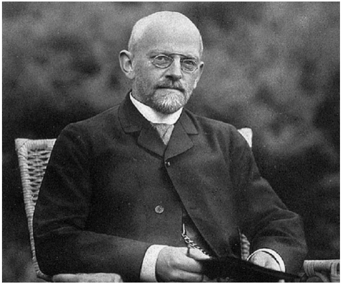


Figure 4: David Hilbert (1862-1943)

- **Résoudre l'un des 23 problèmes de Hilbert.**

En 1900, lors du deuxième congrès international des mathématiques, David Hilbert publie une liste de 23 problèmes défiant les mathématiciens.

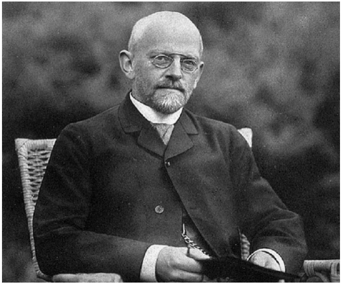


Figure 4: David Hilbert (1862-1943)

- **Résoudre l'un des 7 problèmes du millénaire.**

En 2000, soit 100 ans après Hilbert, l'Institut Clay publie une liste de 7 problèmes réputés insurmontables. Récompense : 1 000 000 \$.

1er	Tout sous-ensemble infini des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des entiers naturels ou avec l'ensemble des réels lui-même.
2e	Peut-on prouver la cohérence de l'arithmétique ? En d'autres termes, peut-on démontrer que les axiomes de l'arithmétique ne sont pas contradictoires ?
3e	Étant donnés deux polyèdres d'égal volume, peut-on découper le premier polyèdre en des polyèdres et les rassembler pour former le second polyèdre ?
4e	Définir toutes les géométries dont les géodésiques sont les droites.
5e	Démontrer que les groupes de Lie sont nécessairement différentiables.
6e	Axiomatisation, fondée sur le modèle mathématique, de la physique.
7e	Démontrer la transcendance des nombres a^b, avec a algébrique différent de 0 et 1, et b algébrique irrationnel.
8e	Démontrer trois conjectures : — l'hypothèse de Riemann ; — la conjecture de Goldbach ; — la conjecture des nombres premiers jumeaux.
9e	Établir une loi de réciprocité dans les corps de nombres.
10e	Trouver un algorithme déterminant si une équation diophantienne a des solutions.

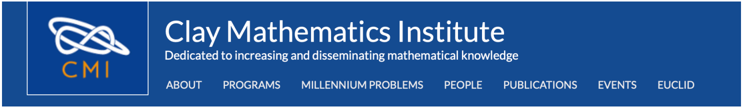
	État d'avancement de la résolution du problème	Date de résolution
1er	C'est l'hypothèse du continu, prouvée indécidable (ni sa vérité ni sa fausseté ne peuvent être prouvées) dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, même avec l'axiome du choix. Néanmoins, celle-ci fait toujours l'objet de recherches dans le cadre d'extensions de la théorie ZFC via l'ajout de nouveaux axiomes comme les axiomes de grands cardinaux[3].	1963
2e	Il n'existe pas de consensus sur le fait que les résultats de Gödel et Gentzen apportent une solution au problème tel que formulé par Hilbert. Le théorème d'incomplétude de Gödel, prouvé en 1931, montre qu'aucune preuve de la cohérence ne peut être apportée en utilisant les outils de l'arithmétique. Gentzen, cependant, donna, en 1936, une réponse affirmative au moyen d'une récurrence transfinie.	1936 ?
3e	Résolu par la négative. Les deux polyèdres doivent avoir les mêmes invariants de Dehn.	1900
4e	Trop vague pour être déterminé résolu ou non[H 2].	
5e	Résolu par Andrew Gleason, selon une certaine interprétation donnée à la formulation. Si, toutefois, il peut être interprété comme conjecture de Hilbert-Smith (en), il n'est toujours pas résolu.	1953 ?
6e	Non résolu.	
7e	Résolu. Résultat : démontré, par le Théorème de Gelfond-Schneider.	1935
8e	Non résolu.	
9e	Partiellement résolu. Il est résolu dans le cas abélien, par le développement de la théorie des corps de classes. Si l'on interprète le problème comme suffisamment vaste pour intégrer les cas non abéliens (en), alors il reste non résolu.	
10e	Résolu par la négative. Le théorème de Matiyasevich implique qu'il n'existe pas de tel algorithme.	1970

11e	Classer les formes quadratiques à coefficients dans les corps de nombres.
12e	Prolonger le théorème de Kronecker-Weber à tous les corps de nombres.
13e	Montrer l'impossibilité de résoudre les équations du septième degré au moyen de fonctions continues de seulement deux variables.
14e	Prouver le caractère fini de certains systèmes complets des fonctions.
15e	Mettre en place les bases du calcul énumératif (en) de Schubert.
16e	Décrire les positions relatives des branches de courbes algébriques réelles et des cycles limites d'un champ de vecteurs à deux dimensions.
17e	Montrer qu'une fonction rationnelle positive peut s'écrire sous la forme de somme de carrés de fonctions rationnelles.
18e	(a) Existe-t-il un polyèdre acceptant seulement un pavage non-isoédrique en trois dimensions ? (b) Quel est l'empilement compact de sphères le plus dense ?
19e	Prouver que le calcul des variations est toujours nécessairement analytique.
20e	Tous les problèmes du calcul des variations avec des conditions aux limites appropriées ont-ils des solutions ?
21e	Prouver que toute représentation complexe de dimension finie peut s'obtenir par action de monodromie sur une équation différentielle de Fuchs.
22e	Uniformiser des courbes analytiques au moyen de fonctions automorphes (en).
23e	Développer une méthode générale de résolution dans le calcul des variations.

11e	En partie résolu par le principe local-global de Helmut Hasse et Carl Siegel[4].	(a) 1923 (b) 1930
12e	Non résolu.	
13e	Résolu. Réfuté par Vladimir Arnold, d'après les travaux d'Andreï Kolmogorov.	1957
14e	Résolu par la négative. Contre-exemple construit par Masayoshi Nagata.	1959
15e	Résolu par Bartel Leendert van der Waerden[4]	1930
16e	Non résolu.	
17e	Résolu par Emil Artin. Résultat : oui.	1927
18e	(a) Résolu par Karl Reinhardt (de). Résultat : oui. (b) Résolu par Thomas Hales. Résultat : empilement cubique et hexagonal, qui ont une densité d'à peu près 74 %.	(a) 1928 (b) 1998
19e	Résolu. Résultat : oui, résolu par Bernstein (1904)[4], prouvé par Ennio De Giorgi et, indépendamment et par d'autres méthodes, par John Forbes Nash	1957
20e	Résolu[4]. Un sujet important de recherche durant tout le xxe siècle, incluant des solutions pour les cas non linéaires.	xxe siècle
21e	Résolu par Helmut Rörl pour la formulation la plus commune. Résolu négativement par Dmitri Anossov et Andreï Bolobroukh[4].	(a) 1957 (b) 1989
22e	Résolu par Paul Koebe et Henri Poincaré.	1907
23e	Non résolu.	

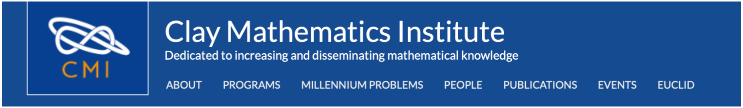
Prix du millénaire

Institut Clay fondé en 98 par Landon Clay dans le but de promouvoir et disséminer la connaissance mathématique dans le monde (plus d'infos sur `https://www.claymath.org`).



Prix du millénaire

Institut Clay fondé en 98 par Landon Clay dans le but de promouvoir et disséminer la connaissance mathématique dans le monde (plus d'infos sur `https://www.claymath.org`).

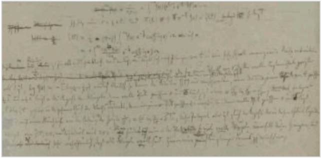


La liste des 7 problèmes valant 1 000 000 de dollars.

- P versus NP (proposé par Stephen Cook).
- Conjecture de Hodge (proposé par Pierre Deligne).
- Hypothèse de Riemann (proposé par Enrico Bombieri).
- Yang-Mills (proposé par Arthur Jaffe et Edward Witten).
- Equations de Navier-Stokes (proposé par Charles Fefferman).
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (proposé par Andrew Wiles).
- Conjecture de Poincaré.

Hypothèse de Riemann : présentation par le CMI

Riemann Hypothesis



Some numbers have the special property that they cannot be expressed as the product of two smaller numbers, e.g., 2, 3, 5, 7, etc. Such numbers are called *prime* numbers, and they play an important role, both in pure mathematics and its applications. The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern. However, the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

called the *Riemann Zeta function*. The Riemann hypothesis asserts that all *interesting* solutions of the equation

$$\zeta(s) = 0$$

lie on a certain vertical straight line.

This has been checked for the first 10,000,000,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

This problem is: Unsolved

Rules:

Rules for the Millennium Prizes

Related Documents:

Official Problem Description

The Riemann Hypothesis by Peter Sarnak

See also:

Riemann's 1859 Manuscript

Related Links:

Lecture by Jeff Vaaler

Notes manuscrites de 1859

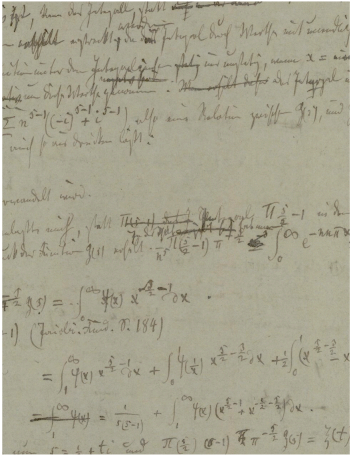
Riemann's 1859 Manuscript

Bernhard Riemann's paper, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (On the number of primes less than a given quantity), was first published in the *Monatsberichte der Berliner Akademie*, in November 1859. Just six manuscript pages in length, it introduced radically new ideas to the study of prime numbers — ideas which led, in 1896, to independent proofs by Hadamard and de la Vallée Poussin of the prime number theorem. This theorem, first conjectured by Gauss when he was a young man, states that the number of primes less than *x* is asymptotic to *x/log(x)*. Very roughly speaking, this means that the probability that a randomly chosen number of magnitude *x* is a prime is *1/log(x)*.

Riemann gave a formula for the number of primes less than *x* in terms the integral of *1/log(x)* and the roots (zeros) of the zeta function, defined by

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots .$$

He also formulated a conjecture about the location of these zeros, which fall into two classes: the "obvious zeros" -2, -4, -6, etc., and those whose whose real part lies between 0 and 1. Riemann's conjecture was that the real part of the nonobvious zeros is exactly 1/2. That is, they all lie on a specific vertical line in the complex plane.



Hypothèse de Riemann : description officielle par Bombieri

Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis

E. Bombieri

I. The problem. The Riemann zeta function is the function of the complex variable s, defined in the half-plane[1] $\Re(s) > 1$ by the absolutely convergent series

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

and in the whole complex plane $\mathbb{C}$ by analytic continuation. As shown by Riemann, $\zeta(s)$ extends to $\mathbb{C}$ as a meromorphic function with only a simple pole at $s = 1$, with residue 1, and satisfies the functional equation

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)\,\zeta(1-s). \tag{1}$$

In an epoch-making memoir published in 1859, Riemann [Ri] obtained an analytic formula for the number of primes up to a preassigned limit. This formula is expressed in terms of the zeros of the zeta function, namely the solutions $\rho \in \mathbb{C}$ of the equation $\zeta(\rho) = 0$.

Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis

E. Bombieri

I. The problem. The Riemann zeta function is the function of the complex variable s, defined in the half-plane[1] $\Re(s) > 1$ by the absolutely convergent series

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

and in the whole complex plane $\mathbb{C}$ by analytic continuation. As shown by Riemann, $\zeta(s)$ extends to $\mathbb{C}$ as a meromorphic function with only a simple pole at $s = 1$, with residue 1, and satisfies the functional equation

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma(\frac{1-s}{2})\,\zeta(1-s). \tag{1}$$

In an epoch-making memoir published in 1859, Riemann [Ri] obtained an analytic formula for the number of primes up to a preassigned limit. This formula is expressed in terms of the zeros of the zeta function, namely the solutions $\rho \in \mathbb{C}$ of the equation $\zeta(\rho) = 0$.

The function $\zeta(s)$ has zeros at the negative even integers $-2, -4, \dots$ and one refers to them as the *trivial zeros*. The other zeros are the complex numbers $\frac{1}{2} + i\alpha$ where α is a zero of $\xi(t)$. Thus, in terms of the function $\zeta(s)$, we can state

Riemann hypothesis. *The nontrivial zeros of $\zeta(s)$ have real part equal to $\frac{1}{2}$.*

Deux types de médaillés Fields

Pour obtenir la médaille Fields, il y a fondamentalement deux voies :

Deux types de médaillés Fields

Pour obtenir la médaille Fields, il y a fondamentalement deux voies :

- Etablir une conjecture célèbre (Perelman, Cohen, Tao,...).

- Introduire un/des concepts révolutionnaires (Schwartz, Grothendieck,...).

Un problème du millénaire résolu...

Henri Poincaré (1854-1912)

Grigori Perelman (1966-)

Théorème (Poincaré (1904) - Perelman (2002))

Soit V une variété compacte simplement connexe sans bord de $\mathbb{R}^3$. Alors, V est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^3$.

Un problème du millénaire résolu...

Henri Poincaré (1854-1912)

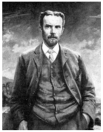
Grigori Perelman (1966-)

Théorème (Poincaré (1904) - Perelman (2002))

Soit V une variété compacte simplement connexe sans bord de $\mathbb{R}^3$. Alors, V est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^3$.

Faits notables.

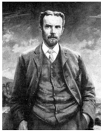
- Poincaré commente sa conjecture avec la (devenue) célèbre phrase "...*mais cette question nous entraînerait trop loin*."
- Perelman publie la solution sur... Arxiv !!
- Perelman a refusé la médaille Fields en 2006, le prix du millénaire et la récompense de 1 000 000 $ associée.



Oliver Heaviside (1850-1925)

Heaviside introduit l'**échelon unité**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Oliver Heaviside (1850-1925)

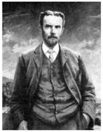
Heaviside introduit l'**échelon unité**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Evidemment, H n'est pas dérivable au sens usuel... mais Heaviside introduit tout de même l'objet H' **impulsion unité**

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur la nécessité des distributions



Oliver Heaviside (1850-1925)

Heaviside introduit l'**échelon unité**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Evidemment, H n'est pas dérivable au sens usuel... mais Heaviside introduit tout de même l'objet H' **impulsion unité**

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet objet n'est pas une fonction au sens traditionnel du terme puisque

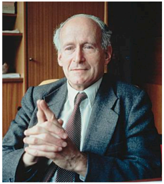
$$1 = H(A) - H(-A) = \int_{-A}^{A} H'(x)dx = 0 \quad \text{pour tout } A > 0.$$

Idée fondamentale. Etant donnée une fonction f, on ne va pas s'intéresser à l'évaluation $f(x)$ mais à un meilleur procédé d'évaluation : **calculer une moyenne pondérée des valeurs de la fonction sur un domaine de plus en plus resserré autour du point d'étude x.**

Ceci amène à considérer $\int f(t)\varphi(t)dt$ pour tout φ régulière et nulle en dehors d'un borné...

Idée fondamentale. Etant donnée une fonction f, on ne va pas s'intéresser à l'évaluation $f(x)$ mais à un meilleur procédé d'évaluation : **calculer une moyenne pondérée des valeurs de la fonction sur un domaine de plus en plus resserré autour du point d'étude x.**

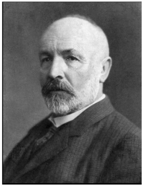
Ceci amène à considérer $\int f(t)\varphi(t)dt$ pour tout φ régulière et nulle en dehors d'un borné...



Laurent Schwartz (1915-2002)

Comme le note Roger Godement : « *La théorie générale des distributions, qui valut à Schwartz la première médaille Fields française en 1950, ne contenait aucun théorème vraiment « profond » – il n'en est pas de même, à beaucoup près, de ses applications*

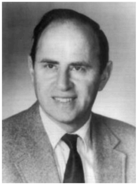
Théorie des ensembles



Georg Cantor
(1845-1918)

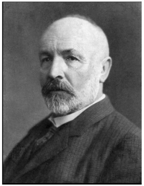
Ernst Zermelo
(1871-1953)

Abraham Fraenkel
(1891-1965)



Paul Cohen
(1934-2007)

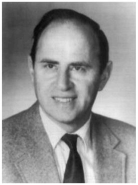
Théorie des ensembles



Georg Cantor
(1845-1918)

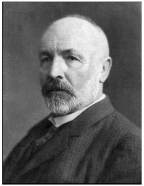
Ernst Zermelo
(1871-1953)

Abraham Fraenkel
(1891-1965)



Paul Cohen
(1934-2007)

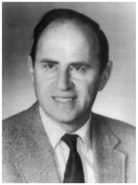
- Cantor développe les bases de la théorie des ensembles. Il propose notamment une classification "des infinis" : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ "ont même nombre d'éléments" mais sont "des infinis" plus petits que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



Georg Cantor
(1845-1918)

Ernst Zermelo
(1871-1953)

Abraham Fraenkel
(1891-1965)



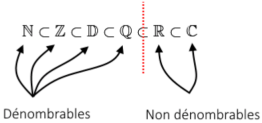
Paul Cohen
(1934-2007)

- Cantor développe les bases de la théorie des ensembles. Il propose notamment une classification "des infinis" : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ "ont même nombre d'éléments" mais sont "des infinis" plus petits que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

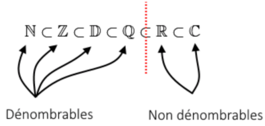
- La découverte de paradoxes conduit à un système d'axiomes dit Z-F en l'honneur de Zermelo et Fraenkel.

Paradoxe de Russel. Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?

Hypothèse du continu. Il existe un ensemble infini "strictement plus gros" que $\mathbb{Q}$ mais "strictement plus petit" que $\mathbb{R}$.



Hypothèse du continu. Il existe un ensemble infini "strictement plus gros" que $\mathbb{Q}$ mais "strictement plus petit" que $\mathbb{R}$.



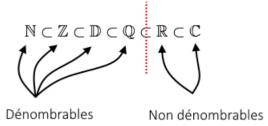
Paul Cohen reçoit la médaille Fields en 1966 pour deux contributions majeures :

- L'axiome du choix ne découle pas des axiomes ZF.

Axiome du choix

Soient I un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non vides d'un ensemble X. Alors, il existe une application $f : I \to X$ telle que $f(i) \in A_i$.

Hypothèse du continu. Il existe un ensemble infini "strictement plus gros" que $\mathbb{Q}$ mais "strictement plus petit" que $\mathbb{R}$.



Paul Cohen reçoit la médaille Fields en 1966 pour deux contributions majeures :

- L'axiome du choix ne découle pas des axiomes ZF.

Axiome du choix

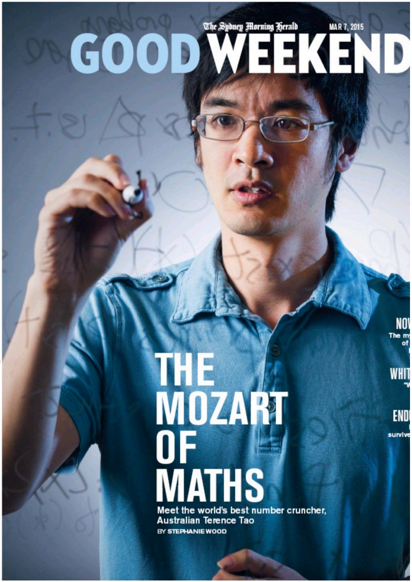
Soient I un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non vides d'un ensemble X. Alors, il existe une application $f : I \to X$ telle que $f(i) \in A_i$.

- L'hypothèse du continu ne peut être déduite des axiomes ZF. En s'appuyant sur des travaux antérieurs, Paul Cohen montre que l'hypothèse du continu est indépendante de ZF.

Térence Tao

Terence Tao (1975-)

- Médaillé d'or à 13 ans aux olympiades internationales
- Master à 17 ans, Dr. à 20 ans
- Prof. d'université à 21 ans (UCLA)
- Médaillé Fields (06)
- Divers prix : Salem (00), Bôcher (02), Clay Research Award (03), Levi Conant (05), MacArthur (06), Roi Fayçal (10), Crafoord (12), Nemmers (10), Breakthrough (15), Riemann prize (19),…
- Soutien de Polymath
- Spécialiste : Analyse harmonique, combinatoire, théorie des nbrs, EDP, représentations,…



Théorème de Green-Tao

- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 2) : $3, 5, 7$.
- Suite arithmétique de longueur 6 (de raison 30) : $7, 37, 67, 97, 127, 157$.
- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 210) : $3361, 3571, 3781$.
- La suite la plus longue connue est longue de 26 termes :

$$43\,142\,746595\,714\,191 + n(P(23) + 23\,681\,770),$$

où $P(23) = 223\,092\,870$ et $n \in \{0, \ldots, 25\}$.

Théorème de Green-Tao

- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 2) : $3, 5, 7$.
- Suite arithmétique de longueur 6 (de raison 30) : $7, 37, 67, 97, 127, 157$.
- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 210) : $3361, 3571, 3781$.
- La suite la plus longue connue est longue de 26 termes :

$$43\,142\,746595\,714\,191 + n(P(23) + 23\,681\,770),$$

où $P(23) = 223\,092\,870$ et $n \in \{0, \ldots, 25\}$.

Question naturelle. Etant donné un entier $k \geq 1$, peut-on former des suites arithmétiques finies de longueur k constituée de nombres premiers ?

Théorème de Green-Tao

- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 2) : $3, 5, 7$.
- Suite arithmétique de longueur 6 (de raison 30) : $7, 37, 67, 97, 127, 157$.
- Suite arithmétique de longueur 3 (de raison 210) : $3361, 3571, 3781$.
- La suite la plus longue connue est longue de 26 termes :

$$43\,142\,746595\,714\,191 + n(P(23) + 23\,681\,770),$$

où $P(23) = 223\,092\,870$ et $n \in \{0, \dots, 25\}$.

Question naturelle. Etant donné un entier $k \geq 1$, peut-on former des suites arithmétiques finies de longueur k constituée de nombres premiers ?

Théorème (Green-Tao)

La suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues.

Lauréats du prix Abel

2003		Jean-Pierre Serre[3]	France
2004		Michael Atiyah	Royaume-Uni
		Isadore Singer[4]	États-Unis
2005		Peter Lax[5]	Hongrie États-Unis
2006		Lennart Carleson[6]	Suède
2007		Sathamangalam R. Srinivasa Varadhan[7]	Inde États-Unis
2008		Jacques Tits	Belgique France
		John Griggs Thompson[8]	États-Unis
2009		Mikhaïl Gromov[9]	Russie France
2010		John Tate[10]	États-Unis
2011		John Milnor[11]	États-Unis
2012		Endre Szemerédi[12]	Hongrie États-Unis
2013		Pierre Deligne[13]	Belgique
2014		Iakov Sinaï[14]	Russie États-Unis
2015		John Forbes Nash	États-Unis
		Louis Nirenberg[2]	Canada États-Unis
2016		Andrew Wiles[15]	Royaume-Uni
2017		Yves Meyer[16]	France
2018		Robert Langlands[17]	Canada
2019		Karen Uhlenbeck[18]	États-Unis

Lauréats du prix Abel (Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Prix_Abel)

Vers le dernier/grand théorème de Fermat

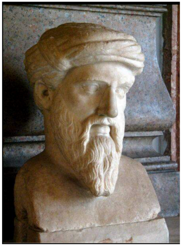
- **Un premier constat.** D'après Pythagore, nous savons que :

> Il existe une infinité d'entiers naturels non nuls x,y,z tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

Vers le dernier/grand théorème de Fermat

- **Un premier constat.** D'après Pythagore, nous savons que :

> Il existe une infinité d'entiers naturels non nuls x,y,z tels que $x^2+y^2=z^2$.



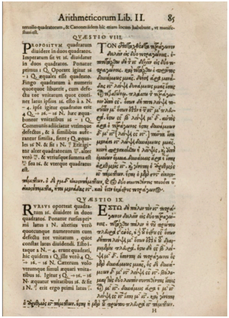
Pythagore de Samos
(580 - 495 a.v. J.-C.)

Pierre de Fermat
(1607-1665)

- **Question naturelle.** Etant donné un entier $n \geq 3$, Fermat se pose la question suivante :

> existe t-il des entiers naturels tels que $x^n+y^n=z^n$???.

Vers la légende...



Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. [illegible] Erit igitur alter quadratorum [illegible]. alter verò [illegible]. & vtriusque summa est [illegible] seu 16. & vterque quadratus est.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. [illegible] erit ergo primi latus [illegible].

H

Extrait de (édition 1620) « Arithmétique » de Diophante

Fermat écrit dans son exemplaire d'Arithmétique de Diophante :

> *Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.*
> Il est impossible pour un cube d'être écrit comme la somme de deux cubes ou pour une quatrième puissance d'être écrite comme la somme de deux quatrièmes puissances ou, en général, pour n'importe quel nombre égal à une puissance supérieure à deux d'être écrit comme la somme de deux puissances semblables.

Autrement dit :

Théorème[1] — Il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs x, y et z tels que :

$$x^n + y^n = z^n,$$

dès que n est un entier strictement supérieur à 2.

Fermat ajoute :

> *Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet*
> J'ai une démonstration véritablement merveilleuse de cette proposition, que cette marge est trop étroite pour contenir.

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.
- En 1832, Dirichlet prouve le cas $n = 14$.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.
- En 1832, Dirichlet prouve le cas $n = 14$.
- En 1839, Lamé donne une démonstration du cas $n = 7$.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.
- En 1832, Dirichlet prouve le cas $n = 14$.
- En 1839, Lamé donne une démonstration du cas $n = 7$.
- En 1847, Kummer donne une preuve valable pour $n \leq 100$.

350 ans de progrès...et d'échecs

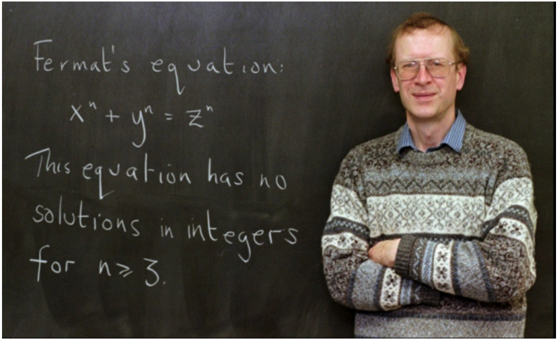
- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.
- En 1832, Dirichlet prouve le cas $n = 14$.
- En 1839, Lamé donne une démonstration du cas $n = 7$.
- En 1847, Kummer donne une preuve valable pour $n \leq 100$.
- La fin du 19ème siècle est consacrée aux propriétés éventuelles des solutions.

350 ans de progrès...et d'échecs

- Fermat résout lui-même le cas $n = 4$ (date non connue) via la **descente infinie**.
- Euler étudie le cas $n = 3$ en 1750.
- En 1825, le cas $n = 5$ est traité par Dirichlet et Legendre.
- En 1832, Dirichlet prouve le cas $n = 14$.
- En 1839, Lamé donne une démonstration du cas $n = 7$.
- En 1847, Kummer donne une preuve valable pour $n \leq 100$.
- La fin du 19ème siècle est consacrée aux propriétés éventuelles des solutions.
- Un important nombres de travaux initiés dans les années 50 (notamment la conjecture de Taniyama-Weil) provenant d'une branche voisine des mathématiques sont mis en relation avec le problème de Fermat.

Andrew Wiles (1953-)

- **Professeur à Princeton et à Oxford**
- **Lauréat du prix Abel (2016)**
- **Lauréat de plus de 20 prix internationaux**
- **Travaille dans le plus grand secret pendant 7 ans pour établir les 5 lignes à droite.**



Pourquoi une démonstration ?

- Le théorème de Fermat n'est pas une fin en soi mais sa démonstration a conduit les mathématiciens au développement d'un nombre considérable de nouvelles idées et techniques.

Pourquoi une démonstration ?

- Le théorème de Fermat n'est pas une fin en soi mais sa démonstration a conduit les mathématiciens au développement d'un nombre considérable de nouvelles idées et techniques.
- Sans démonstration... on peut rapidement dire n'importe quoi...

(Conjecture d'Euler - 1772)

On a

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^n \neq b^n \quad \forall n > 2, \forall a_1, \ldots, a_{n-1}, b \geq 1.$$

Il faut attendre 1966 pour avoir un contre-exemple :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

La conjecture d'Euler est donc fausse.
Notons qu'à l'heure actuelle, aucun contre-exemple n'est connu pour $n > 5$.

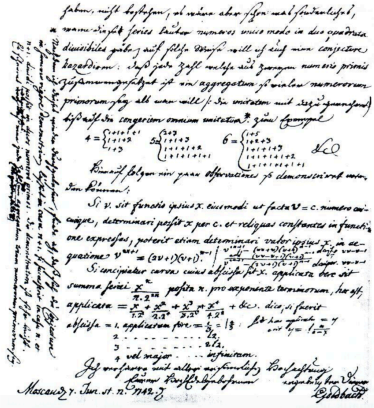
Liste de conjectures réfutées

- Conjecture de Borsuk (en) en 1993 par Jeff Kahn et Gil Kalai
- Conjecture d'Euler en 1966
- Conjecture de Ganea (en)
- Hauptvermutung (en) en 1961 par Milnor
- Conjecture de Hirsch en 2010
- Conjecture de Kelvin
- Conjecture des nombres de Fermat en 1732 par Euler
- Conjecture d'intersection de graphe
- Conjecture de Kouchnirenko
- Conjecture de Mertens en 1985
- Conjecture de Pólya en 1958
- Conjecture de Ragsdale (en) en 1979 par Oleg Viro
- Conjecture de Seifert
- Conjecture de Smith généralisée
- Conjecture de Tait (en) : voir Graphe de Tutte
- Conjecture de Von Neumann (en) en 1980
- Conjecture de Weyl-Berry (en)

Une liste de problèmes... résolus

- Conjecture d'Adams sur le J-homomorphisme (en), démontrée par Quillen en 1971
- Conjecture de Bachet, proposée en 1621, résolue en 1770 (maintenant connue comme le théorème des quatre carrés de Lagrange)
- Conjecture de Bieberbach (devenue théorème de De Branges en 1984)
- Conjecture de Blattner (en) (ou formule de Blattner), démontrée par Hecht et Schmid en 1975
- Conjecture de Bloch-Kato (K-théorie) (en) (qui généralise la conjecture de Milnor)
- Conjecture de Burnside, devenue le théorème de Feit-Thompson en 1963
- Conjecture de Catalan, démontrée par Preda Mihăilescu en 2002
- Conjecture de Conway-Norton (en) (connue sous le nom de Monstrous moonshine), démontrée par Borcherds en 1992
- Conjecture de Deligne sur les 1-motifs
- Conjecture de Dinitz (en), démontrée par Fred Galvin (en) en 1994
- Conjecture du dodécaèdre (en), démontrée par Thomas Hales en 1998
- Conjecture epsilon (un intermédiaire sur le chemin du dernier théorème de Fermat) devenue en 1986 le théorème de Ribet (en)
- Dernier théorème de Fermat, démontré en 1994 par Andrew Wiles, et maintenant connu sous le nom de théorème de Fermat-Wiles
- Conjecture du gradient (en), démontrée en 2000 par Kurdyka, Mostowski et Parusinski
- Conjecture des graphes parfaits, démontrée en 2002 par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas
- Conjecture de Heawood, devenue en 1968 le théorème de Ringel-Youngs
- Conjecture de Kummer (en) sur les sommes cubiques de Gauss (démontrée en 1978 par S. J. Patterson et Roger Heath-Brown sous une forme légèrement modifiée)
- Conjecture de Mahler-Manin, démontrée en 1995 par Katia Barré-Sirieix, Guy Diaz, François Gramain et Georges Philibert.
- Conjecture de Manin-Mumford (en), démontrée en 1983 par Michel Raynaud
- Conjecture de Marden (en), démontrée en 2004 par Ian Agol
- Conjecture de Milnor (K-théorie algébrique), démontrée en 1996 par Vladimir Voevodsky
- Conjecture de Milnor (théorie des nœuds), démontrée en 1993 par Peter Kro Tomasz Mrowka
- Conjecture de Mordell, devenue en 1983 théorème de Faltings
- Conjecture de Hanna Neumann, démontrée en 2012 par Igor Mineyev
- Conjecture d'Oppenheim, démontrée en 1987 par Gregori Margulis
- Conjecture de Poincaré, démontrée en 2003 par Grigori Perelman
- Conjecture de Quillen-Lichtenbaum (en), conséquence de celle de Bloch-Ka
- Conjecture de Ramanujan, conséquence de la preuve des conjectures de We
- Conjecture de Scheinerman (en), démontrée en 2009 par Jeremie Chalopin Gonçalves
- Conjecture de Schreier
- Conjecture de Segal (en), démontrée en 1980 par Gunnar Carlsson (de)
- Conjecture de Serre devenue en 1976 le théorème de Quillen-Suslin (en) : v projectif
- Conjecture de Serre (théorie des nombres) (en) sur les représentations de G démontrée en 2008 par Chandrashekhar Khare et Jean-Pierre Wintenberger
- Conjecture de Seymour
- Conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, démontrée en 1999, à la suite des tra par Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond et Richard Taylor
- Conjecture de Smith (en)
- Conjecture de Stanley-Wilf (en)
- Conjecture de Sullivan (en)
- Conjecture de Thurston, démontrée en 2003 par Grigori Perelman
- Conjecture de Wagner (devenue théorème de Robertson-Seymour en 2004)
- Conjectures de Weil (démontrées par Pierre Deligne en 1974)
- Problème de coloration des chemins (en)
- Problème de la hauteur d'étoile
- Problème de Waring proposé en 1770, résolu en 1909 (parfois appelé depuis Hilbert-Waring)

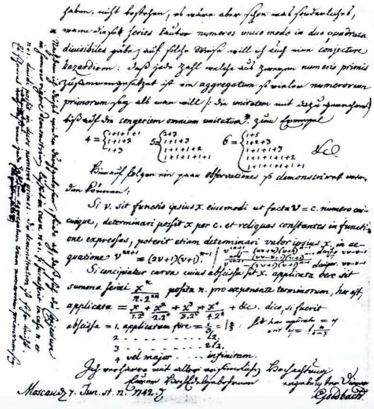
Christian Goldbach (1690-1764)



Lettre introduisant la conjecture

Conjecture de Goldbach

Christian Goldbach (1690-1764)



Lettre introduisant la conjecture

Goldbach dans une lettre à Euler datée de 1742 formule la :

Conjecture

Tout entier pair ≥ 3 est somme de deux nombres premiers.

Quelques avancées...

1920	Viggo Brun		Tout entier pair assez grand est somme de deux entiers composés chacun de 9 facteurs premiers au plus.
1923	Hardy et Littlewood	f	En supposant vraie une certaine généralisation de l'hypothèse de Riemann, tout nombre impair assez grand est somme de trois nombres premiers[3].
1924	Hans Rademacher		Tout entier pair assez grand est somme de deux entiers composés chacun de 7 facteurs premiers au plus.
1931	Lev Schnirelmann		Tout entier > 1 est somme de 20 nombres premiers au plus.
1937	Ivan Vinogradov	f	Tout entier impair assez grand est somme de trois nombres premiers. Corollaire : Tout entier pair assez grand est somme de quatre nombres premiers.
1937	Nikolai Chudakov (en)[4]		Presque tout entier pair est somme de deux nombres premiers[5].
1938	Johannes van der Corput[6]		
1938	Theodor Estermann[7]		
1947	Alfréd Rényi		Il existe une constante K telle que tout entier pair est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus K facteurs premiers.
1951	Yuri Linnik (en)		Il existe une constante K telle que tout entier pair assez grand est somme de deux nombres premiers et d'au plus K puissances de 2.
1966	Chen Jingrun		Tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers.
1975	Hugh Montgomery et Robert Charles Vaughan		La plupart des entiers pairs sont la somme de deux nombres premiers[8].
1995	Olivier Ramaré		Tout entier pair est somme de six nombres premiers au plus. Corollaire : Tout entier impair est somme de sept nombres premiers au plus.
1997	Jean-Marc Deshouillers, Gove Effinger, Herman te Riele et Dimitri Zinoviev	f	L'hypothèse de Riemann généralisée implique la conjecture faible de Goldbach.
2002	Roger Heath-Brown et Jan-Christoph Schlage-Puchta		Le résultat de Linnik (1951) vaut avec K = 13.
2012	Terence Tao	f	Tout entier impair > 1 est somme de cinq nombres premiers au plus. Corollaire : résultat d'Olivier Ramaré, 1995.
2013	Harald Helfgott	f	Tout entier impair > 5 est somme de trois nombres premiers. Corollaire : résultat de Terence Tao, 2012.

Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Goldbach

Nombres premiers jumeaux

Définition. On dit que deux entiers p et q sont des nombres premiers jumeaux lorsqu'ils sont premiers et ne diffèrent que de deux.

(Conjecture)

Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

(3, 5)	(5, 7)	(11, 13)	(17, 19)	(29, 31)
(41, 43)	(59, 61)	(71, 73)	(101, 103)	(107, 109)
(137, 139)	(149, 151)	(179, 181)	(191, 193)	(197, 199)
(227, 229)	(239, 241)	(269, 271)	(281, 283)	(311, 313)
(347, 349)	(419 , 421)	(431 , 433)	(461 , 463)	(521 , 523)
(569 , 571)	(599 , 601)	(617 , 619)	(641 , 643)	(659 , 661)
(809 , 811)	(821 , 823)	(827 , 829)	(857 , 859)	(881 , 883)

Nombres premiers jumeaux

Définition. On dit que deux entiers p et q sont des nombres premiers jumeaux lorsqu'ils sont premiers et ne diffèrent que de deux.

(Conjecture)

Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

(3, 5)	(5, 7)	(11, 13)	(17, 19)	(29, 31)
(41, 43)	(59, 61)	(71, 73)	(101, 103)	(107, 109)
(137, 139)	(149, 151)	(179, 181)	(191, 193)	(197, 199)
(227, 229)	(239, 241)	(269, 271)	(281, 283)	(311, 313)
(347, 349)	(419 , 421)	(431 , 433)	(461 , 463)	(521 , 523)
(569 , 571)	(599 , 601)	(617 , 619)	(641 , 643)	(659 , 661)
(809 , 811)	(821 , 823)	(827 , 829)	(857 , 859)	(881 , 883)

Faits.

- 8ème problème de Hilbert avec les conjectures de Goldbach et Riemann.
- Les plus grands premiers jumeaux sont $2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} + -1$.

Il existe une infinité de nombres premiers dont l'écart est $\leq 70\,000\,000$.

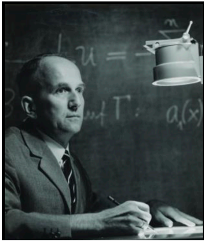
Conjecture de Syracuse

La *suite de Syracuse* associée à un entier naturel $N \geq 1$ est définie par

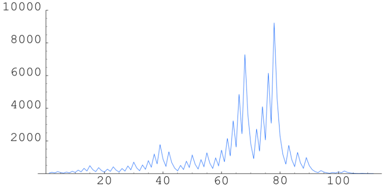
$$S_0 = N \quad \text{et} \quad S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{2} & \text{si} \quad S_n \text{ est pair,} \\ 3S_n + 1 & \text{si} \quad S_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Conjecture

Pour tout entier naturel $N \geq 1$, il existe un entier $n_N \geq 1$ tel que $S_{n_N} = 1$.



Lothar Collatz (1910-1990)



Suite de Syracuse associée à 27

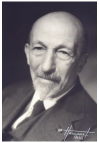


Figure 5: Jacques Hadamard (1865-1963)

Définition

Une matrice de Hadamard est une matrice carrée de lignes $L_1, \ldots, L_n$ dont les coefficients sont 1 ou -1 et où pour chaque $i < j$, L_i est orthogonale à L_j.

Une conjecture sur les matrices...

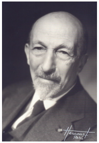


Figure 5: Jacques Hadamard (1865-1963)

Définition

Une matrice de Hadamard est une matrice carrée de lignes $L_1, \ldots, L_n$ dont les coefficients sont 1 ou -1 et où pour chaque $i < j$, L_i est orthogonale à L_j.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

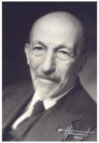


Figure 5: Jacques Hadamard (1865-1963)

Définition

Une matrice de Hadamard est une matrice carrée de lignes $L_1, \ldots, L_n$ dont les coefficients sont 1 ou -1 et où pour chaque $i < j$, L_i est orthogonale à L_j.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjecture (1893)

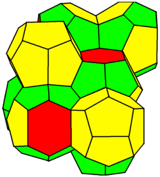
Pour tout $n \in 4\mathbb{N}$, il existe une matrice de Hadamard.

Théorème du nid d'abeille et conjecture de Kelvin

Comment paver le plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre ?

Thomas Hale (1958-)

Conjecture de Kelvin (1887) pour la dimension 3



Conjecture infirmée en 1994 Weaire - Phelan

Pour aller plus loin...

- Conjecture 1/3-2/3 (en)
- Conjecture abc
- Conjecture d'Agoh-Giuga
- Conjecture d'Andrews-Curtis
- Conjecture d'Andrica
- Conjecture des arbres gracieux
- Conjecture d'Arnold
- Conjectures d'Artin
- Conjecture d'Atiyah
- Conjecture de Bateman-Horn
- Conjecture de Baum-Connes
- Conjecture de Beal (en)
- Conjecture de Beilinson (en)
- Conjecture de Berry-Tabor
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer
- Conjecture de Birch-Tate (en)
- Conjecture de Bloch-Kato (fonctions L) (en)
- Conjecture de Borel (en)
- Conjecture de Bost
- Conjecture de Bouniakovski
- Conjecture de Carathéodory (en)
- Conjecture de Carmichael (en) sur l'indicatrice d'Euler
- Conjecture de Catalan sur les suites aliquotes
- Conjecture de la coloration sur listes (en)
- Conjecture de Cramér
- Conjecture de De Polignac
- Conjectures de DeligneIConjecture de DeligneIConjectures de Deligne
- Conjecture de Dickson
- Conjecture de Dubner
- Conjecture d'Eilenberg-Ganea (en)
- Conjecture d'Elliott-Halberstam
- Conjecture d'Erdős-Burr
- Conjecture d'Erdős-Gyárfás (en)
- Conjecture d'Erdős–Straus
- Conjecture de Farrell-Jones (en)
- Conjecture de Firoozbakht
- Conjecture de Fortune sur la primalité des nombres fortunés
- Conjecture de fonctorialité de Langlands
- Conjecture des familles stables par unions, dite aussi conjecture de Frankl
- Conjecture de Gilbreath
- Conjecture de Goldbach
- Conjecture faible de Goldbach
- Conjecture de Goormaghtigh
- Conjecture de Greenberg
- Conjecture de Grimm
- Conjecture de Hadamard
- Conjecture de Hadwiger
- Conjectures de Hardy-Littlewood
- Conjecture de Hilbert-Pólya
- Conjecture de Hodge
- Conjectures homologiques en algèbre commutative (en)
- Conjecture de Hopf (en)
- Conjecture d'Iliev-Sendov
- Conjecture jacobienne
- Conjecture des jeux uniques
- Conjecture de Kaplansky
- Problèmes de Landau
- Conjecture de Lawson (en)
- Conjecture de Legendre
- Conjecture de Lenstra-Pomerance-Wagstaff
- Conjecture de Lichtenbaum
- Conjecture de Littlewood (en)
- Conjecture de Marshall Hall (en)
- Conjecture de Mazur en théorie d'Iwasawa
- Nouvelle conjecture de Mersenne
- Conjecture des nombres premiers jumeaux
- Conjecture de Novikov (en)
- Conjecture de Petersen sur son graphe
- Conjecture de Pierce-Birkhoff (en)
- Conjecture de Pillai
- Problème de Pompeiu
- Conjecture de Quillen-Lichtenbaum
- Conjecture de reconstruction (en)
- *Hypothèses de Riemann* : voir aussi les con précitées de Hilbert-Pólya (non résolue) et (résolues)
  - Hypothèse de Riemann
    - Hypothèse de Riemann généralisée
    - Hypothèse de Riemann étendue
  - Hypothèse de densité
  - Hypothèse de Lindelöf
- Conjecture de Schanuel
- Hypothèse H de Schinzel
- Conjecture de Scholz
- Conjecture de Selfridge sur les nombres de
- Conjectures de Serre sur la multiplicité d'int
- Conjecture de Singmaster
- Conjecture de Syracuse
- Conjecture de Tate (en)
- Conjecture de Toeplitz
- Conjecture de Vandiver
- Conjecture de Weinstein
- Conjecture de Whitehead (en)