**TD5 - Fonctions de plusieurs variables, E.D.P., Optimisation**

# 1 Lignes de niveaux, continuité

**Exercice 1** *Pour chacune des expressions suivantes, définir une fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *avec* $D \subset \mathbb{R}^2$ *maximale au sens de l'inclusion* $\subset$ *et étudier sa continuité sur* $D$. *Tracer l'allure de* $D$ *et des ensembles de niveaux* $L_c(f) = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$ *avec* $c \in \mathbb{R}$ *indiqué.*
$(a)$ $f(x,y) = y^2$, $c \in \{-1, 0, 1, 4\}$ ;
$(b)$ $f(x,y) = \frac{1}{2}x + y$, $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ;
$(c)$ $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$, $c \in \{-100, 0, 2\}$ ;
$(d)$ $f(x,y) = \sqrt{1 - xy}$, $c \in \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

**Solution.** Définissons tout d'abord les fonctions (projections canoniques) $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$p_1(x,y) = x \quad \text{et} \quad p_2(x,y) = y \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

qui sont évidemment continues sur $\mathbb{R}^2$ car linéaires.

$(a)$ Avec $D = \mathbb{R}^2$, définissons la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = y^2 \quad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

Celle-ci est continue sur $D$ puisque $f = p_2^2$. D'autre part, on vérifie sans difficultés que $L_{-1}(f) = \emptyset$, $L_0(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$, $L_1(f) = \mathbb{R} \times \{-1\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ et $L_4(f) = \mathbb{R} \times \{-2\} \cup \mathbb{R} \times \{2\}$. La représentation géométrique de ces ensembles et de $D$ est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.

$(b)$ Posons $D = \mathbb{R}^2$ et considérons la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x + y \quad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

L'égalité $f = \frac{1}{2}p_1 + p_2$ nous assure que $f$ est continue sur $D$. Enfin, pour chaque $c \in \mathbb{R}$, on a

$$L_c(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = c - \frac{1}{2}x\right\}.$$

La représentation géométrique de ces ensembles et de $D$ est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.

$(c)$ Notons $\mathbb{B}$ la boule unité fermée associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ et posons $D = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}$. On constate tout de suite que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x,y) \notin \mathbb{B}$$

ce qui permet de définir la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

La continuité de $f$ sur l'ouvert $D$ de $\mathbb{R}^2$ est claire puisque $f = \ln(q_1^2 + q_2^2 - \mathbf{1})$ où $q_i$ désigne la restriction de $p_i$ à $D$ pour chaque $i \in \{1,2\}$ et où $\mathbf{1} : D \to \mathbb{R}$ désigne la fonction constante de valeur 1. Enfin, on vérifie que pour chaque $c \in \mathbb{R}$,

$$L_c(f) = \left\{(x,y) \in D : x^2 + y^2 = e^c + 1\right\}.$$

La représentation géométrique de ces ensembles et de $D$ est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.

($d$) Notons $H_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_-^\star \times \mathbb{R} : y \geq \frac{1}{x}\right\}$, $H_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} : y \leq \frac{1}{x}\right\}$ et $D = H_1 \cup H_2 \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ et observons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$1 - xy \geq 0 \Leftrightarrow (x,y) \in D.$$

Ceci permet notamment de définir la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x,y) = \sqrt{1-xy} \quad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

La continuité de $f$ en chaque point de $D$ s'obtient en écrivant $f = \sqrt{\mathbf{1} - q_1.q_2}$ où $q_i$ désigne la restriction de $p_i$ à $D$ pour chaque $i \in \{1,2\}$ et où $\mathbf{1} : D \to \mathbb{R}$ est la fonction constante de valeur 1. Concernant les ensembles de niveaux de $f$, il est clair que $L_c(f) = \emptyset$ pour tout réel $c < 0$ et que pour tout réel $c \geq 0$,

$$L_c(f) = \left\{(x,y) \in D : xy = 1 - c^2\right\}.$$

Il s'ensuit pour tout $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$,

$$L_c(f) = \left\{(x,y) \in H_1 \cup H_2 : y = \frac{1-c^2}{x}\right\}$$

et

$$L_1(f) = \{(x,y) \in D : xy = 0\} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

La représentation géométrique de $D$ et de ces ensembles est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. ■

**Exercice 2** (1) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés. On suppose que les fonctions $f(\cdot,y_0)$ et $f(x_0,\cdot)$ sont continues en $x_0$ et $y_0$. Ceci implique t-il que $f$ est continue en $(x_0,y_0)$ ?*
(2) *Etudier, en utilisant la définition, la continuité en $(0,0)$ des fonctions $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = |1 + x + y|$$

*et*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Solution.** (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que les fonctions $f(\cdot,0), f(0,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 2.$$

Ceci et l'égalité $f(0,0) = 0$ justifient que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

(2) Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ et notons $\mathbb{U}$ sa boule unité ouverte.
($a$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = |1+x+y| \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Etudions la continuité de $f$ en $(0,0)$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ et observons que pour tout $(x,y) \in \eta\mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= |f(x,y) - 1| \\ &= |x+y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq 2\,\|(x,y)\| < 2\eta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f$ est continue en $(0,0)$.

($b$) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudions la continuité de $g$ en $(0,0)$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ et notons que pour tout $(x,y) \in \eta\mathbb{U} \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \frac{\left|x^3 - y^3\right|}{x^2+y^2} = \frac{\left|(x-y)(x^2+xy+y^2)\right|}{\|(x,y)\|^2}.$$

D'autre part, remarquons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2\,\|(x,y)\|$$

et

$$\left|x^2+y^2+xy\right| \leq (x^2+y^2) + |xy| \leq 2\,\|(x,y)\|^2.$$

Il vient alors pour tout $(x,y) \in \eta\mathbb{U}$,

$$|g(x,y) - g(0,0)| \leq 4\,\|(x,y)\| < 4\eta \leq \varepsilon.$$

Ceci justifie la continuité de $g$ en $(0,0)$. ■

**Exercice 3** *Etudier la continuité en* $(0,0)$ *des fonctions suivantes :*
($a$) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

($b$) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

($c$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta, \\ \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } (x,y) \notin \Delta. \end{cases}$$

**Solution.** $(a)$ Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 2,$$

donc $f$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ en $(0,0)$. Ainsi, $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

$(b)$ On a $\lim\limits_{u \downarrow 0} \frac{1-\cos(\sqrt{u})}{u} = \frac{1}{2}$, donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Ceci et l'égalité $f(0,0) = \frac{1}{2}$ nous disent que $f$ est continue en $(0,0)$.

$(c)$ Pour tout entier $n \geq 1$, on a $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = e^{-1}$, donc $f$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ en $(0,0)$. Ainsi, $f$ n'est pas continue en $(0,0)$. ■

# 2 Dérivées partielles

**Exercice 4** *Montrer en utilisant la définition de différentielle que la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = xy \quad \textit{pour tout}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

*est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.

**Solution.** Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$. Fixons $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f((\overline{x}, \overline{y}) + (h,k)) = \overline{xy} + \varphi_{(\overline{x},\overline{y})}(h,k) + hk,$$

où $\varphi_{(\overline{x},\overline{y})} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'application (linéaire continue) définie par

$$\varphi_{(\overline{x},\overline{y})}(h,k) = \overline{x}k + \overline{y}h \quad \text{pour tout } (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à observer que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\|(h,k)\|} = 0$$

puisque pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ avec $(h,k) \neq (0,0)$

$$0 \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|} = \|(h,k)\|.$$

On conclut alors que $f$ est différentiable en $(\overline{x}, \overline{y})$ de différentielle $Df(\overline{x}, \overline{y}) = \varphi_{(\overline{x},\overline{y})}$. ■

**Exercice 5** *Déterminer les dérivées partielles premières là où elles existent de la fonction*
$(a)$ $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y} \quad \textit{pour tout}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

$(b)$ $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{pour tout}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

**Solution.** $(a)$ La fonction $f$ est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. En particulier, $f$ admet des dérivées partielles premières en chaque point de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. De plus, on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{y_0}\cos(\frac{x_0}{y_0}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{y_0^2}\cos(\frac{x_0}{y_0}).$$

$(b)$ La fonction $g$ est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. Il s'ensuit que $g$ admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

■

**Exercice 6** *Déterminer le plan tangent au point* $(1,2)$ *au graphe de* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \textit{pour tout}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

**Solution.** Le plan tangent au graphe de $f$ en $(1,2)$ est donné par

$$T_{(1,2)}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(1,2) + \partial_1 f(1,2)(x-1) + \partial_2 f(1,2)(y-2)\right\}.$$

■

**Exercice 7** *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}$. *On définit* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par*

$$h(t) = f(t, g(t)) \quad \textit{pour tout}\, t \in \mathbb{R}.$$

*Justifier que* $h$ *est de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}$. *Calculer la dérivée première et seconde de* $h$.

**Solution.** La fonction $h$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ puisque $h = f \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est la fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = (t, g(t)) \quad \text{pour tout}\, t \in \mathbb{R}.$$

Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = D\varphi(t)(1) = (1, g'(t))$$

et écrivons

$$\begin{aligned} h'(t) &= Dh(t)(1) \\ &= D(f \circ \varphi)(t)(1) \\ &= Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(1)) \\ &= Df(\varphi(t))(1, g'(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)) + g'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t)). \end{aligned}$$

Pour obtenir la dérivée seconde de $h''$ de $h$, on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h''(t) &= Dh'(t)(1) \\
&= D(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi + g' \times \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi)(t)(1) \\
&= D\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))(1, g'(t)) + g''(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \\
&\quad + g'(t)(D\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))(1, g'(t)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, g(t)) + g'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t, g(t)) + g''(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t)) \\
&\quad + g'(t)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t, g(t)) + g'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, g(t))\big).
\end{aligned}$$

■

**Exercice 8** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ autour de $(0,0)$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(t) = f(2t, -t) \quad \textit{pour tout}\, t \in \mathbb{R}.$$

*Déterminer le développement limité de $\varphi$ en $0$.*

**Solution.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ et on note $\mathbb{U}$ la boule unité ouverte associée. Puisque $f$ est de classe $C^2$ autour de $(0,0)$, il existe un réel $\eta > 0$ et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ tels que pour tout $(a,b) \in \eta\mathbb{U}$,

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)b \\
&\quad + \frac{1}{2}(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)) + \|(a,b)\|^2 \varepsilon(a,b).
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert $W$ de $0$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in W$,

$$\begin{aligned}
f(2t,-t) &= f(0,0) + 2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)t - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)t \\
&\quad + \frac{1}{2}(4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)) + \|(2t,-t)\|^2 \varepsilon(2t,-t).
\end{aligned}$$

En particulier, on a pour tout $t \in W$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= f(0,0) + (2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0))t \\
&\quad + (2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0))t^2 + o(t^2).
\end{aligned}$$

■

**Exercice 9** *Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et la différentiabilité en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout*

*$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :*
$(a)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$(b)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta, \\ x\text{Arctan}(\frac{y}{x}) & \text{si } (x,y) \notin \Delta, \end{cases}$$

*où $\Delta = \{0\} \times \mathbb{R}$.*

**Solution.** On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ et on note $B(a,r)$ la boule ouverte associée de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.
$(a)$ La fonction $f$ est différentiable (donc continue) sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ **(Exer)**. D'autre part, elle n'est pas continue en $(0,0)$ (et donc pas différentiable en $(0,0)$) puisque

$$\lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

On observe enfin que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = 0$$

et

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = 0,$$

i.e., $f$ admet des dérivées partielles selon la première et la seconde variable en $(0,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$(b)$ La fonction $f$ est différentiable (et donc continue) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$. Examinons la continuité de $f$ en $(\overline{x}, \overline{y})$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \frac{2}{\pi}\varepsilon$. Pour tout $(x,y) \in B((\overline{x}, \overline{y}), \eta) \setminus \Delta$, on a

$$|f(x,y) - f(\overline{x}, \overline{y})| = |f(x,y)| \leq |x| \frac{\pi}{2} \leq \eta \frac{\pi}{2} = \varepsilon.$$

On a également pour tout $(x,y) \in \Delta$,

$$|f(x,y) - f(\overline{x}, \overline{y})| = 0 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in B((\overline{x}, \overline{y}), \eta)$, on a $|f(x,y) - f(\overline{x}, \overline{y})| \leq \varepsilon$. On en déduit que $f$ est continue en $(\overline{x}, \overline{y})$. Soit $\overline{y} \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, notons que

$$t^{-1} f((0, \overline{y}) + t(1,0)) = \text{Arctan}(\frac{\overline{y}}{t})$$

et

$$t^{-1} f((0, \overline{y}) + t(0,1)) = 0.$$

En conséquence, on a que pour tout $(a,b) \in \Delta \setminus \{(0,0)\}$, $f$ n'admet pas de dérivée partielle en la première variable en $(a,b)$, on a l'égalité $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et on a que pour tout $(a,b) \in \Delta$, $f$ admet une dérivée partielle en la seconde variable en $(a,b)$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \Delta \cup \{(0,0)\}.$$

■

**Exercice 10** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer. La fonction $f$ est-elle de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ ?*

**Solution.** On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $f$ est évidemment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(Exer)**. D'autre part, notons que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$0 \leq \frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leq \|(h,k)\|.$$

Ceci entraîne que $f$ est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle. En particulier, les dérivées partielles du premier ordre de $f$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. De manière élémentaire, on a tout de suite pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(h,k) = \frac{h^4 k + 3h^2 k^3}{(h^2+k^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(h,k) = \frac{h^5 - h^3 k^2}{(h^2+k^2)^2}.$$

Maintenant, définissons $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$g_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Notons que $g_1(\cdot,\cdot) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot)$ et que $g_2(\cdot,\cdot) = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot)$. Il est aisé de vérifier que $g_1, g_2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, d'où l'on tire que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part, la fonction $g_1(0,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est nulle en chaque point de $\mathbb{R}$. Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$. De même, remarquons que $g_2(\cdot,\cdot) = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot)$ et que la fonction $g_2(\cdot,0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$(g_2(\cdot,0))(x) = g_2(x,0) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. D'après le théorème de Schwarz, $f$ n'est de classe $C^2$ sur aucun ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$. ■

# 3 Changements de variables et E.D.P.

**Exercice 11** *Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (resp., $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$).*

**Solution.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons dans un premier temps qu'elle admet une dérivée partielle première selon la première (resp., seconde) variable en tout point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\partial_1 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\partial_2 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ (resp., $x_0 \in \mathbb{R}$). En observant que

$$(f(\cdot, y_0))'(x) = \partial_1 f(x, y_0) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$(f(x_0, \cdot))'(y) = \partial_2 f(x_0, y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R})$$

on obtient l'existence de $C_{y_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $D_{x_0} \in \mathbb{R}$) tel que

$$f(x, y_0) = C_{y_0} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$f(x_0, y) = D_{x_0} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}).$$

Puisque $y_0$ (resp., $x_0$) est un réel quelconque, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x, y) = C(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp., il existe une fonction $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x, y) = D(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(x, y) = g(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp., s'écrit

$$f(x, y) = g(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $f$ est dérivable partiellement en la première (resp., seconde) variable et vérifie

$$\partial_1 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\partial_2 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

■

**Exercice 12** *Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (resp., $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$).*

**Solution.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons tout d'abord que $f$ admette une dérivée partielle seconde selon la première (resp., seconde) variable en tout point de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2).$$
Soit $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (resp., $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) la fonction définie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par
$$v(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$
(resp.,
$$w(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)).$$
Fixons $b_0 \in \mathbb{R}$ (resp., $a_0 \in \mathbb{R}$). Ce qui précède dit alors que $v(\cdot, b_0)$ (resp., $w(a_0, \cdot)$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait
$$(v(\cdot, b_0))'(a) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$
(resp.,
$$(w(a_0, \cdot))'(b) = 0 \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}).$$
Ainsi, il existe $C_{b_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $E_{a_0} \in \mathbb{R}$) tel que
$$(f(\cdot, b_0))'(a) = v(a, b_0) = C_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$
(resp.,
$$(f(a_0, \cdot))'(b) = w(a_0, b) = E_{a_0} \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}).$$
Ceci entraîne l'existence de $D_{b_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $F_{a_0} \in \mathbb{R}$) tel que
$$f(a, b_0) = C_{b_0} a + D_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$
(resp.,
$$f(a_0, b) = E_{a_0} b + F_{a_0} \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}).$$
Le fait que $b_0$ (resp., $a_0$) soit quelconque dans $\mathbb{R}$ nous permet alors de dire qu'il existe deux fonctions $C, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp., $E, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) telles que
$$f(a,b) = C(b)a + D(b) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
(resp.,
$$f(a,b) = E(a)b + F(a) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2).$$
Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrit
$$f(a,b) = \varphi(b)a + \psi(b) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
(resp.,
$$f(a,b) = \varphi(a)b + \psi(a) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2)$$
avec $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions quelconques, alors $f$ est deux fois dérivable partiellement selon la première (resp., seconde) variable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et satisfait
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
(resp.,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2).$$
■

**Exercice 13** *Résoudre sur* $\mathbb{R}^2$ *l'équation aux dérivées partielles* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

**Solution.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)$ existe et vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Fixons $b_0 \in \mathbb{R}$. Ce qui précède dit alors que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b_0) = (g(\cdot, b_0))'(a) = 0.$$

Ainsi, il existe $C_{b_0} \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(a,b_0) = C_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

et ceci entraîne que $g$ s'écrit pour une certaine fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(a,b) = C(b) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Fixons $a_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$(f(a_0,\cdot))'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_0,b) = g(a_0,b) = C(b),$$

d'où l'existence de $D_{a_0} \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a_0,b) = C(b)b + D_{a_0}.$$

On tire de tout ceci l'existence de deux fonctions $\hat{C}, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(a,b) = \hat{C}(b) + D(a) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}.$$

De plus, notons que le fait que $f$ soit dérivable partiellement en la seconde variable en tout point de $\mathbb{R}^2$ entraîne que $\hat{C}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$f(a,b) = \varphi(b) + \psi(a) \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

avec $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, $f$ satisfait l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)$ et l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

■

**Exercice 14** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère $F : U = ]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \textit{pour tout } (r,\theta) \in U.$$

*(1) On suppose $f$ différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Justifier que $F$ est différentiable sur $U$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.*
*(2) On suppose $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Justifier que $F$ est de classe $C^2$ sur $U$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \theta}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}$. On appelle Laplacien de $f$ la fonction $\Delta f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Delta f(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y}) \quad \textit{pour tout } (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

*Déterminer le Laplacien de $f$ en coordonnées polaires.*

**Solution.** (1) Par composition, $F$ est différentiable sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$. Fixons $(\rho,\psi) \in U$ et notons $\xi = (\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi))$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\rho,\psi) = \cos(\psi)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \sin(\psi)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\psi) = -\rho\sin(\psi)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \rho\cos(\psi)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi).$$

(2) Par composition, $F$ est de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$. Fixons $(\rho,\psi) \in U$ et notons $\xi = (\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi))$. On a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho,\psi) = \cos^2(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \sin^2(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) + 2\cos(\psi)\sin(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho,\psi) = {}& \rho^2\sin^2(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) - 2\rho^2\cos(\psi)\sin(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi) \\ & + \rho^2\cos^2(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) - \rho\cos(\psi)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) - \rho\sin(\psi)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}(\rho,\psi) = {}& -\rho\cos(\psi)\sin(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \rho\cos(\psi)\sin(\psi)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) \\ & + \rho(\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi))\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi) - \sin(\psi)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \cos(\psi)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi).\end{aligned}$$

D'autre part, observons que

$$\begin{aligned}&\rho^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho,\psi) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho,\psi) \\ =&\rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) - \rho\frac{\partial F}{\partial r}(\rho,\psi).\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\Delta f(\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi)) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho,\psi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho,\psi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial r}(\rho,\psi).$$

∎

**Exercice 15** *Soit* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. *Déterminer les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *différentiables sur* $\Omega$ *vérifiant*

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \textit{pour tout}\,(a, b) \in \Omega.$$

**Solution.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose dans un premier temps que $f$ est différentiable sur $\Omega$ et satisfait

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega. \tag{3.1}$$

On pose $U = ]0, +\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on considère la fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in U.$$

La différentiabilité de $f$ sur l'ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ assure celle de $F$ sur l'ouvert $U$. On vérifie de plus **(Exer)** que pour chaque $(r_0, \theta_0) \in U$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)) + \sin(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)).$$

En combinant ceci à (3.1), on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = 0 \quad \text{pour tout } (r_0, \theta_0) \in U.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\varphi : ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ telle que

$$F(r, \theta) = \varphi(\theta) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in U.$$

Notons que le fait que $F$ soit dérivable partiellement en la seconde variable en chaque point de $U$ assure que $\varphi$ est dérivable sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il reste alors à déduire de la dernière égalité **(Exer)** que pour tout $(a, b) \in \Omega$,

$$f(a, b) = (\varphi \circ \operatorname{Arctan})(\frac{b}{a}).$$

Réciproquement, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(a, b) = \psi(\frac{b}{a}) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega$$

avec $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est différentiable sur $\Omega$ et satisfait

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega.$$

■

**Exercice 16** *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ *est radiale lorsqu'il existe une fonction* $H : ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que*

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = H(r) \quad \textit{pour tout}\,(r, \theta) \in ]0, +\infty[\times\mathbb{R}.$$

*Déterminer les fonctions radiales* $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ *satisfaisant*

$$\Delta f(x, y) = 0 \quad \textit{pour tout}\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

**Solution.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ radiale et satisfaisant

$$\Delta f(x,y) = 0 \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Introduisons la fonction $F :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{pour tout } (r,\theta) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

Puisque $f$ est radiale, il existe $H :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$F(r,\theta) = H(r) \quad \text{pour tout } (r,\theta) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

Notons tout de suite que $H$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$. D'autre part, le calcul du Laplacien en coordonnées polaires donne pour tout $(\rho,\psi) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\Delta f(\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi)) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho,\psi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho,\psi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial r}(\rho,\psi) = 0.$$

On a tout de suite $\frac{\partial F}{\partial r}(\rho,\psi) = H'(\rho)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho,\psi) = H''(\rho)$ pour tout $(\rho,\psi) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Il vient alors

$$\frac{1}{\rho}H'(\rho) + H''(\rho) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in ]0,+\infty[.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$H(\rho) = \lambda\ln(\rho) + C \quad \text{pour tout } \rho \in ]0,+\infty[.$$

En revenant à la définition de $H$, on aboutit à

$$f(x,y) = \lambda\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + C \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $\mu, K \in \mathbb{R}$ tels que

$$g(x,y) = \mu\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + K \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

est radiale, de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et vérifie $\Delta g(x,y) = 0$ pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ∎

**Exercice 17** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Pour chaque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction $\varphi_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\varphi(x,y) = (x+ay, x+by) \quad \textit{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) *Déterminer l'ensemble $D$ des éléments $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit inversible.*
(2) *Montrer que pour chaque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $F_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F_{(a,b)}(x,y) = f(x+ay, x+by) \quad \textit{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Calculer ses dérivées partielles premières.*
(3) *En déduire l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

**Solution.** (1) Soit $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ fixé. Notons que la fonction $\varphi_{(a_0,b_0)}$ est linéaire, en particulier elle est inversible si et seulement si $\det\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 1 & b_0\end{pmatrix}\neq 0$ si et seulement si $a_0\neq b_0$. L'ensemble recherché $D$ est donc

$$D=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\neq b\right\}.$$

(2) Soit $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$. La fonction $f$ étant différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et $\varphi_{(a_0,b_0)}$ étant de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $F_{(a,b)}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ par composition. On a de plus pour tout $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{(a_0,b_0)}}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) &= DF_{(a_0,b_0)}(\overline{x},\overline{y})(1,0)\\ &= Df\circ\varphi_{(a_0,b_0)}(\overline{x},\overline{y})\\ &= Df(\varphi_{(a_0,b_0)}(\overline{x},\overline{y}))(D\varphi_{(a_0,b_0)}(\overline{x},\overline{y})(1,0))\\ &= Df(\overline{x}+a_0\overline{y},\overline{x}+b_0\overline{y})(1,1)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}+a_0\overline{y},\overline{x}+b_0\overline{y})+\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}+a_0\overline{y},\overline{x}+b_0\overline{y})\end{aligned}$$

et de même

$$\frac{\partial F_{(a_0,b_0)}}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})=a_0\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}+a_0\overline{y},\overline{x}+b_0\overline{y})+b_0\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}+a_0\overline{y},\overline{x}+b_0\overline{y}).$$

(3) Supposons dans un premier temps que $f$ vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})=\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\quad\text{pour tout }(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2.$$

Notons que $(-1,1)\in D$ et posons $F=F_{(-1,1)}$. Via ce qui précède, on a pour tout $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})=0.$$

Il s'ensuit qu'il existe alors $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x-y,x+y)=F(x,y)=h(x)\quad\text{pour tout }(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Le caractère différentiable de $F$ sur $\mathbb{R}^2$ entraîne tout de suite que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il reste à écrire

$$f(x,y)=f(\frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{2},\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2})=h(\frac{x+y}{2})\quad\text{pour tout }(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, toute fonction $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ s'écrivant

$$\phi(x,y)=\psi(\frac{x+y}{2})\quad\text{pour tout }(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

avec $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfait l'égalité

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})=\frac{\partial\phi}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\quad\text{pour tout }(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2.$$

■

# 4 Extrema, fonctions implicites, extrema liés, optimisation

**Exercice 18** *Soit* $K = [0,1]^2$ *et* $f : K \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x,y) = x - y + x^3 + y^3 \quad \textit{pour tout}\,(x,y) \in K.$$

*Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global sur* $K$*. Etudier les extrema locaux de* $f$ *sur* $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}K$ *et globaux de* $f$ *sur* $K$*.*

**Solution.** Puisque $K$ est compact dans $\mathbb{R}^2$ et que $f$ est continue sur $K$ **(Exer)**, la fonction $f$ admet un minimum et un maximum global sur $K$. D'autre part, puisque $f$ est différentiable sur l'ouvert $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}K$ **(Exer)** et que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ **(Exer)**,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 1 + 3u^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = -1 + 3v^2,$$

$f$ n'admet aucun minimum local (a fortiori global) sur $]0,1[^2$. Donc, un minimum (resp., maximum) global de $f$ est nécessairement un élément de $\mathrm{bd}_{\mathbb{R}^2}K$. Observons maintenant que pour tout $y \in [0,1]$,

$$f(0,y) = -y + y^3 \quad \text{et} \quad f(1,y) = 2 - y + y^3$$

et que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x,0) = x + x^3 = f(x,1).$$

Une étude élémentaire de variations donne **(Exer)**

$$\max_{y\in[0,1]} f(0,y) = 0 = f(0,0) = f(0,1),$$

$$\max_{y\in[0,1]} f(1,y) = 2 = f(1,0) = f(1,1),$$

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(1,0) = 2,$$

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,1) = f(1,1) = 2$$

ainsi que

$$\min_{y\in[0,1]} f(0,y) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f(0, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$\min_{y\in[0,1]} f(1,y) = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(1, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$\min_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(0,0) = 0,$$

$$\min_{x\in[0,1]} f(x,1) = f(0,1) = 0.$$

Il vient

$$\max_{(x,y)\in \mathrm{bd}_{\mathbb{R}^2}K} f(x,y) = 2 = f(1,0) = f(1,1)$$

et

$$\min_{(x,y)\in \mathrm{bd}_{\mathbb{R}^2}K} f(x,y) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f(0, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

En conséquence **(Exer)**, 2 est le maximum global de $f$ sur $K$ et $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ est le minimum global de $f$ sur $K$. ■

**Exercice 19** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x, y) = xy \quad \textit{pour tout}\,(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) *Donner l'allure des lignes de niveaux de $f$.*
(2) *Etudier les extrema de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.*
(3) *Etudier le problème d'optimisation sous contraintes*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{s.c.} \quad 4x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

**Solution.** (1) Rappelons que pour chaque $c \in \mathbb{R}$, la $c$-ligne de niveau de $f$ est par définition l'ensemble

$$L_c(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = c\right\}.$$

Tout de suite, notons que $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ et que pour tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$L_c = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{c}{x}\right\}.$$

L'allure graphique des lignes de niveaux de $f$ est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.

(2) La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. De plus, en observant que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = v \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = u,$$

on obtient le fait que $(0, 0)$ est l'unique point critique de $f$. Mais $(0, 0)$ ne peut pas être extremum local de $f$ puisque la hessienne de $f$ en $(0, 0)$

$$\text{hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est ni positive ni négative.

(3) On s'intéresse au problème d'optimisation sous contraintes

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } xy \\ \text{s.c.} \quad 4x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Puisque $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4\right\}$ est compact **(Exer)** et $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, $f$ admet un minimum global sur $C$ noté $(\overline{x}, \overline{y})$. En particulier, $(\overline{x}, \overline{y})$ est une solution locale de $(\mathcal{P})$ et il existe alors **(Exer)** un réel $\lambda$ tel que

$$(\overline{y}, \overline{x}) + \lambda(8\overline{x}, 2\overline{y}) = 0.$$

Ceci donne sans difficultés

$$\begin{cases} 2\lambda\overline{y} + 16\lambda^2\overline{x} = 0 \\ \overline{x} + 2\lambda\overline{y} = 0, \end{cases}$$

et ce système entraîne $\overline{x}(16\lambda^2 - 1) = 0$. Si $\overline{x} = 0$, alors $\overline{y} = 0$ et ceci est absurde puisqu'on doit avoir $4\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 4$. Donc $\overline{x} \neq 0$ et par suite $16\lambda^2 = 1$, i.e., $\lambda \in$

$\left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$. Distinguons deux cas.
**Cas 1 :** $\lambda = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a $\overline{y} = -2\overline{x}$. L'égalité $4\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 4$ donne alors $\overline{x} \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Il s'ensuit

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \left\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})\right\}.$$

**Cas 2 :** $\lambda = -\frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a $\overline{y} = 2\overline{x}$. Grâce à $4\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 4$ on a $\overline{x} \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Il s'ensuit

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \left\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})\right\}.$$

On en arrive à

$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}) = -1.$$

■

**Exercice 20** *Trouver les points critiques et indiquer s'il s'agit d'extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :*
*(a)* $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$ *;*
*(b)* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ *;*
*(c)* $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

**Solution.** $(a)$ La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^4$$

est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = -4u + 4v \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 4u - 4v^3$$

et ceci entraîne tout de suite **(Exer)** que l'ensemble des points critiques de $f$ est $\{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}$. Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) = 4$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) = -4, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) = -12v^2.$$

On a alors

$$\text{hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

en particulier la hessienne de $f$ en $(0, 0)$ n'est ni positive ni négative. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. On a également

$$\text{hess}_{(1,1)} f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(-1,-1)} f.$$

Puisque pour chaque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -8\beta^2 - 4(\alpha - \beta)^2,$$

la hessienne de $f$ en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ est définie négative. Donc, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont des maxima locaux de $f$.

$(b)$ La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = 4u^3 - 4(u - v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 4v^3 + 4(u - v)$$

donc **(Exer)** l'ensemble des points critiques de $f$ est $\{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$. Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) = 4$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) = 12u^2 - 4, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) = 12v^2 - 4.$$

Notons que

$$\text{hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

et que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -4(\alpha - \beta)^2.$$

Ainsi, la hessienne de $f$ en $(0, 0)$ est négative mais pas définie négative. En observant que $f(x, x) = 2x^4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$ pour tout $x \in [-2, 2]$, on justifie que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. Maintenant, écrivons

$$\text{hess}_{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})} f = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})} f.$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 20(\alpha + \frac{1}{5}\beta)^2 + \frac{96}{5}\beta^2$$

et ceci nous dit que la hessienne de $f$ en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est définie positive. Donc, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima locaux.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ **(Exer)**. Pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)=e^{-(u^2+v^2)}(4u-2u(2u^2+3v^2)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)=e^{-(u^2+v^2)}(6v-2v(2u^2+3v^2)).$$

Supposons que $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$ soit un point critique de $f$. On a

$$\begin{cases} 4\overline{xy}-2\overline{xy}(2\overline{x}^2+3\overline{y}^2)=0 \\ 6\overline{xy}-2\overline{xy}(2\overline{x}^2+3\overline{y}^2)=0 \end{cases}$$

ce qui donne tout de suite $\overline{x}=0$ ou $\overline{y}=0$. De ceci, on tire sans difficultés **(Exer)** que

$$\{(0,0),(0,-1),(0,1),(1,0),(-1,0)\}$$

est l'ensemble des points critiques de $f$. Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u,v)=-8uve^{-(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v)=e^{-(u^2+v^2)}(4-20u^2+8v^4+12u^2v^2-6v^2)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v)=e^{-(u^2+v^2)}(6-4u^2-30v^2+8u^2v^2+12v^4).$$

Il vient tout de suite

$$\mathrm{hess}_{(0,0)}f=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donc la hessienne de $f$ en $(0,0)$ est définie positive. Ainsi, $(0,0)$ est minimum local de $f$. Il vient également que la hessienne de $f$ en $(1,0)$ et en $(0,-1)$ est définie négative puisque

$$\mathrm{hess}_{(0,1)}f=e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}=\mathrm{hess}_{(0,-1)}f.$$

Donc, $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima locaux. Enfin, la hessienne de $f$ en $(1,0)$ et en $(-1,0)$ n'est ni négative ni positive puisque

$$\mathrm{hess}_{(1,0)}f=e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\mathrm{hess}_{(-1,0)}f.$$

En conséquence, $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas des extrema locaux. ■