

Etant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, on s'intéresse aux racines (complexes) du polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 défini par

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

1. Justifier l'hypothèse $a \neq 0$.
2. Etablir que P admet (au moins) une racine réelle lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$. Dans le cas général (i.e., $P \in \mathbb{C}[X]$), quel résultat assure de l'existence d'au moins une racine ?
3. Montrer que l'on peut supposer $a = 1$. **Cette hypothèse sera faite dans toute la suite.**
4. Justifier que l'on puisse supposer $b = 0$. *On pourra considérer le développement de $(x + b/3)^3$.* **Cette hypothèse sera faite dans toute la suite.**
5. Déterminer les racines de P lorsque $c = 0$ ou $d = 0$.
6. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$,

$$(u + v)^3 + c(u + v) + d = u^3 + v^3 + (3uv + c)(u + v) + d.$$

7. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} u + v = z \\ uv = -\frac{c}{3} \\ u^3 + v^3 = -d \end{cases}$$

8. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ satisfaisant

$$\begin{cases} uv = -\frac{c}{3} \\ u^3 + v^3 = -d \end{cases}$$

- (a) Montrer que u^3 et v^3 sont les racines du polynôme

$$Q = X^2 + dX - \frac{c^3}{27}$$

de discriminant

$$\Delta = d^2 + \frac{4}{27}c^3.$$

- (b) En déduire que pour δ une racine carrée de Δ

$$u^3 = \frac{-d + \delta}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \frac{-d - \delta}{2}$$

- (c) Soit δ une racine carrée de Δ . Justifier qu'il existe u_0 (resp. v_0) une racine cubique de $(-d + \delta)/2$ (resp. $(-d - \delta)/2$) telles que $u_0 v_0 = -c/3$. Etablir que $u_0 + v_0$, $ju_0 + j^2 v_0$ et $j^2 u_0 + jv_0$ sont les racines de P avec $j := e^{2i\pi/3}$.

9. On suppose ici que $c, d \in \mathbb{R}$.

- (a) Si $\Delta > 0$, montrer que le polynôme P admet pour racines $u_0 + v_0$, $ju_0 + j^2v_0$ et $j^2u_0 + jv_0$ avec

$$u_0 := \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-d + \sqrt{\Delta})} \quad \text{et} \quad v_0 := \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-d - \sqrt{\Delta})}.$$

Montrer que dans ce cas, l'une des racines est réelle et que les deux autres sont complexes conjuguées.

- (b) On suppose que $\Delta = 0$. Montrer que si $d = 0$, alors 0 est racine triple de P . Montrer que si $d \neq 0$, alors $-3d/(2c)$ est racine double et $3d/c$ est racine simple.
- (c) On suppose que $\Delta < 0$. Soit u_0 une racine cubique de $(-d + i\sqrt{-\Delta})/2$. Montrer que P admet pour racine $u_0 + \overline{u_0}$, $ju_0 + j^2\overline{u_0}$ et $j^2u_0 + j\overline{u_0}$. Montrer de plus que ces trois racines sont réelles.
10. Déterminer les racines de $P = X^3 - 15X - 4$. *On pourra observer que $2 + i$ est racine cubique de $2 + 11i$.*

Corrigé

1. Si $a = 0$, le polynôme P est de degré au plus deux. L'expression de la ou des racines d'un tel polynôme est classique.
2. On suppose ici que $P \in \mathbb{R}[X]$, autrement dit, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On note $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée à P . Les limites de $\tilde{P}$ à l'infini sont infinies et de signes opposés (car $a \neq 0$). Ceci et le fait que $\tilde{P}$ soit continue sur $\mathbb{R}$ permettent d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\tilde{P}$ sur un intervalle I sur lequel $\tilde{P}$ prend une valeur négative et une valeur positive. On conclut que $\tilde{P}$ s'annule en (au moins) un point de I . Notons que c'est faux si $P \notin \mathbb{R}[X]$ (le polynôme $(X - i)^3$ admet i pour racine triple). Néanmoins, le théorème de d'Alembert-Gauss (ou fondamental de l'algèbre) nous assure de l'existence d'une racine pour tout polynôme non constant à coefficients complexes.
3. Puisque $a \neq 0$, on peut diviser le polynôme P par a et ainsi ramener notre problème à la recherche des racines du polynôme de degré 3

$$\tilde{P} := X^3 + \frac{b}{a}X^2 + \frac{c}{a}X + \frac{d}{a}.$$

On suppose dans toute la suite que $a = 1$.

4. En posant $\alpha := c - \frac{b^2}{3}$ et $\beta := -\frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27} + d$, il vient

$$X^3 + bX^2 + cX + d = (X + \frac{b}{3})^3 - \frac{b^2}{3}X - \frac{b^3}{27} + cX + d = (X + \frac{b}{3})^3 + \alpha(X + \frac{b}{3}) + \beta.$$

On déduit de ceci que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si $z + b/3$ est racine du polynôme $X^3 + \alpha X + \beta$. L'étude des racines des polynômes de la forme $X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$ combinée à cette équivalence permettront donc de déterminer les racines de n'importe quel polynôme de degré 3. On suppose dans toute la suite $b = 0$.

5. Si $c = 0$, on a $P = X^3 + d$ et le problème consiste à déterminer les racines cubiques de $-d$. Si $d = 0$, on a $P = X^3 + cX = X(X^2 + c)$ qui admet pour racine 0 et $\pm\delta$, où δ est une racine de $-c$ (i.e., $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -c$).
6. L'égalité demandée s'obtient facilement à travers le développement de $(u + v)^3$.
7. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$, Supposons que $z \in \mathbb{C}$ soit racine de P . Le polynôme $X^2 - zX - c/3$ admet (au moins) une racine u . Il vient alors en posant $v := z - u$

$$u(z - u) = uv = -c/3.$$

Il reste à exploiter la question précédente pour obtenir

$$0 = z^3 + cz + d = u^3 + v^3 + d.$$

$\Leftarrow$, Supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} u + v = z \\ uv = -c/3 \\ u^3 + v^3 = -d \end{cases}$$

Une nouvelle utilisation de la question précédente donne

$$z^3 + cz + d = (u + v)^3 + c(u + v) + d = -d + 0 \times (u + v) + d = 0,$$

ce qui traduit le fait que $z = u + v$ soit racine de P .

- (a) Il suffit d'observer que $u^3v^3 = (uv)^3 = -c^3/27$ et $u^3 + v^3 = -d$ pour obtenir le résultat voulu.
- (b) C'est une application directe de l'expression des racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.
- (c) Soit u_0 (resp. v_0) une racine cubique de $(-d + \delta)/2$ (resp. $(-d - \delta)/2$). Rappelons que ju_0, j^2u_0 sont les deux autres racines cubiques de $(-d + \delta)/2$. On a

$$(u_0v_0)^3 = \frac{1}{4}(d^2 - \delta^2) = \frac{1}{4}(d^2 - \Delta) = -\frac{c^3}{27}.$$

Il s'ensuit que $u_0v_0 = j^k(c/3)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Si $k = 0$, c'est terminé. Si $k = 1$, on reprend ce qui précède avec j^2u_0 à la place de u_0 pour obtenir $(j^2u_0)v_0 = c/3$. Si $k = 2$, on reprend là encore ce qui précède avec ju_0 à la place de u_0 pour obtenir $(ju_0)v_0 = c/3$.

Nous pouvons donc supposer $u_0v_0 = -c/3$. On a bien sûr

$$u_0^3 + v_0^3 = \frac{-d + \delta}{2} + \frac{-d - \delta}{2} = -d.$$

D'après la Question 7, le complexe $u_0 + v_0$ est racine de P . Le complexe $ju_0 + j^2v_0$ est également racine du polynôme P car $(ju_0)(j^2v_0) = u_0v_0 = -c/3$ et $(ju_0)^3 + (j^2v_0)^3 = u_0^3 + v_0^3 = -d$. Pour les mêmes raisons, $j^2u_0 + jv_0$ est racine de P . Observons que $j^ku_0 + j^lv_0$ avec $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $k + l \in \{1, 2\}$ n'est pas racine de P car $(j^ku_0)(j^lv_0) = j^{k+l}u_0v_0 = -j^{k+l}(c/3) \neq -c/3$.

- 8. On suppose $\Delta > 0$. On a bien sûr et $u_0v_0 = -c/3$. La Question 8c nous assure donc du fait que $\zeta_1 := u_0 + v_0$ est racine de P , de même que $\zeta_2 := ju_0 + j^2v_0$ et $\zeta_3 := j^2u_0 + jv_0$. Puisque $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, la racine ζ_1 est réelle. D'autre part, en remarquant que $u_0 \neq v_0$ (car $\sqrt{\Delta} \neq 0$) nous voyons que

$$\zeta_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Il reste à voir que ζ_3 n'est nul autre que le conjugué de ζ_2 pour conclure.

- 9. On suppose $\Delta = 0$. Si $d = 0$, alors $0 = \Delta = (4/27)c^3$, i.e., $c = 0$. Il s'ensuit $P = X^3$ qui admet bien sûr 0 pour racine triple. Nous pouvons donc supposer $d \neq 0$. Posons $u_0 := \sqrt[3]{-d/2}$ et $v_0 := u_0$. On a

$$(u_0v_0)^3 = \frac{d^2}{4} = \frac{\Delta}{4} - \frac{c^3}{27} = -\frac{c^3}{27},$$

d'où l'on déduit $u_0v_0 = -c/3$. La Question 8c nous dit alors que $\zeta_1 := u_0 + v_0 = 2\sqrt[3]{-d/2}$, $\zeta_2 := ju_0 + j^2v_0 = -u_0$ et $\zeta_3 := j^2u_0 + jv_0 = \zeta_2$ sont les racines de P . La racine ζ_1 est simple tandis que $\zeta_2 = \zeta_3$ est double. Il reste à voir que (en gardant à l'esprit que $\Delta = 0$)

$$\left(\frac{3d}{c}\right)^3 = \frac{27d^3}{c^3} = -4d = 8\left(-\frac{d}{2}\right)$$

et

$$\left(-\frac{3d}{2c}\right)^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{3d}{c}\right)^3 = \frac{d}{2}$$

pour conclure que $\zeta_1 = \frac{3d}{c}$ et $\zeta_2 = \zeta_3 = -\frac{3d}{2c}$.

10. On suppose $\Delta < 0$. Soit u_0 une racine cubique de $(-d+\delta)/2$ avec $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ qui est bien sûr une racine complexe de Δ . On vérifie sans difficultés que $(u_0\bar{u}_0)^3 = -c^3/27$, d'où l'on tire $u_0\bar{u}_0 = -j^k c/3$ pour un certain $k \in \{0, 1, 2\}$. En remarquant que $u_0\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, on obtient $k = 0$, i.e., $u_0\bar{u}_0 = -c/3$. D'après la Question 8c nous savons que $\zeta_1 := u_0 + \bar{u}_0$ est racine de P , de même que $\zeta_2 := ju_0 + j^2\bar{u}_0$ et $\zeta_3 := j^2u_0 + j\bar{u}_0$. Il reste à observer que $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathbb{R}$. C'est évident en ce qui concerne ζ_1 . Pour ζ_k avec $k \in \{2, 3\}$, il suffit d'invoquer l'égalité élémentaire $\bar{j} = j^2$ pour aboutir à $\bar{\zeta}_k = \zeta_k$, i.e., $\zeta_k \in \mathbb{R}$.
11. Nous sommes dans le cas où $a = 1, b = 0, c = -15$ et $d = -4$. Le développement ci-dessus nous conduit à introduire $Q := X^2 - 4X - (-15)^3/27 = X^2 - 4X + 125$ qui admet pour discriminant $\Delta = -484 = (22i)^2$. On a $(-d + 22i)/2 = 2 + 11i$ qui admet $u_0 = 2 + i$ pour racine cubique. On applique alors la question précédente pour conclure que P admet pour racine $4, -2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.