

Suites et séries de fonctions

1 Retour sur les bornes inférieures et supérieures

Exercice 1 Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a l'inégalité $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Solution. Soit $b_0 \in B$. Pour tout $a \in A$, on a $a \leq b_0$. Ceci montre que la partie A est majorée et que $\sup A \leq b_0$. Ceci et le fait que b_0 soit quelconque dans B nous disent que la partie B est minorée par $\sup A$ et que $\sup A \leq \inf B$. ■

Exercice 2 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup(-A) = -\inf A \quad \text{et} \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

Solution. Pour tout $a \in A$, on a évidemment $-a \leq -\inf A$. Il s'ensuit que l'ensemble $-A$ est majoré par $-\inf A$, d'où l'on tire

$$\sup(-A) \leq -\inf A. \quad (1)$$

Montrons l'inégalité renversée. Pour tout $a \in A$, on a bien sûr $a \geq -\sup(-A)$. On en déduit que A est minoré par $-\sup(-A)$, en particulier

$$\inf(A) \geq -\sup(-A). \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on aboutit à

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Pour établir la seconde égalité désirée, on applique ce que nous venons de démontrer avec la partie $B := -A$ pour obtenir $\sup(-B) = -\inf B$ ce qui s'écrit encore $\sup A = -\inf(-A)$. Ceci termine l'exercice. ■

Exercice 3 Soient A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

En déduire que si B est de plus bornée, alors

$$\sup A + \inf B \leq \sup(A + B).$$

Solution. Pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a bien sûr $a + b \leq \sup A + \sup B$ ce qui garantit que la partie $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Pour obtenir l'inégalité renversée, on commence par noter que pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

Pour chaque $b \in B$, nous voyons que la partie A est majorée par $\sup(A + B) - b$, d'où l'on tire

$$\sup A \leq \sup(A + B) - b.$$

Nous déduisons de ceci que la partie B est majorée par $\sup(A + B) - \sup(A)$ ce qui permet d'écrire

$$\sup B \leq \sup(A + B) - \sup(A),$$

ou de manière équivalente

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

Si B est de plus bornée, on a

$$\sup A + \inf B \leq \sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

■

Exercice 4 Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ avec $A \subset B$. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$. Est-ce vrai avec la borne inférieure ?

Solution. Si $A \subset B$, alors pour tout $a \in A$, on a bien sûr $a \leq \sup B$ et ceci entraîne $\sup A \leq \sup B$. Ce n'est pas vrai avec la borne inférieure : si $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$, on a $\inf B = -1 \leq \inf A = 0$. Plus précisément, si $A \subset B$, on a $\inf B \leq \inf A$. ■

Exercice 5 Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Etablir une formule analogue pour la borne inférieure.

Solution. On a bien sûr $\sup A \leq \sup(A \cup B) =: s$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. Il s'ensuit $m := \max(\sup A, \sup B) \leq s$. Supposons par l'absurde que $m < s$. Il existe alors $c \in A \cup B$ tel que $m < c \leq s$ et ceci conduit à une contradiction : si $c \in A$ (resp. $c \in B$), alors $\sup A < c$ (resp. $\sup B < c$).

On montre de même que si A et B sont deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$, on a

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

■

Exercice 6 Soient I, J deux ensembles non vides et $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille majorée d'éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} u_{i,j} = \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} u_{i,j}.$$

Etablir une formule analogue pour la borne inférieure.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \right) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \right).$$

Solution. Commençons par noter que le caractère borné de f nous assure de l'existence (dans $\mathbb{R}$) des diverses bornes inférieures et supérieures de l'énoncé. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a bien sûr

$$f(x_0, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R},$$

d'où l'on tire

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x_0, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y).$$

Le fait que x_0 soit quelconque dans $\mathbb{R}$ permet alors d'écrire

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \right) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \right).$$

■

Exercice 8 Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \geq 1\}.$$

S'agit-il d'un minimum et d'un maximum ?

Solution. Commençons par noter que la partie A est évidemment minorée par -1 (donc $\inf A \geq -1$) et majorée par 2 : elle admet donc une borne inférieure et supérieure. Posons $u_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour chaque $n \geq 1$. Remarquons que pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = u_2$ et $u_1 = 0$. Il s'ensuit que

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}.$$

Supposons que $-1 < \inf A$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $-1 + \varepsilon < \inf A$, en particulier

$$-1 + \varepsilon < u_{2n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ceci et le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$ nous donne alors $-1 + \varepsilon \leq -1$ qui est la contradiction attendue. On a donc montré que $\inf A = -1$. Ce n'est bien sûr par un minimum (dans le cas contraire, on aurait un entier $n_0 \geq 1$ tel que $u_{n_0} = -1$ ce qui est absurde). ■

Exercice 9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $x_0 \in [a, b]$. Montrer que

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b] \setminus \{x_0\}} f(x).$$

Solution. On a bien sûr

$$s := \sup_{x \in [a, b] \setminus \{x_0\}} f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x). \quad (3)$$

Par l'absurde, si l'inégalité (3) est stricte, on aurait l'existence de $u \in [a, b]$ tel que

$$s < f(u) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

et nécessairement (par définition de s) $u = x_0$. Ceci conduit à une absurdité puisque pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b] \setminus \{x_0\}$ qui converge vers x_0 , on aurait

$$f(u_n) \leq s \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ce qui entraînerait (par continuité de f en x_0) l'inégalité $f(x_0) \leq s$. ■

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs majorée. Montrer que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n^{-1} = \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \right)^{-1}.$$

Solution. Posons $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n > 0$ et notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{s}$. Il s'ensuit

$$i := \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{s} > 0.$$

Par ailleurs, on a $i \leq \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui donne $u_n \leq \frac{1}{i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où l'on tire $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq \frac{1}{i}$ ou encore

$$i \leq \frac{1}{s}.$$

L'égalité voulue est établie. ■

2 Convergence simple et uniforme

Exercice 11 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := nx(1-x)^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
3. Soit $r \in]0, 1[$. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[r, 1]$.

Solution.

1. Soit $x \in]0, 1[$. On a pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = x \exp(\ln(n) + n \ln(1-x)).$$

Ceci et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln(1-x) + \frac{\ln(n)}{n}) = -\infty$ donnent bien sûr

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Cette dernière égalité et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$ nous disent que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2. **Méthode 1.** On remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Ceci et l'équivalent $n \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -1$ nous disent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-1).$$

En particulier, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément sur $[0, 1]$.

Méthode 2. Fixons pour un moment $n \geq 1$ un entier. La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$f'_n(x) = n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

On en déduit aisément le tableau des variations de f_n :

x	0	$1/(n+1)$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$	0

Il reste à voir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp(-1)$ pour conclure que $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

3. **Méthode 1.** Pour $n \geq 1$ et $x \in [r, 1]$, on a

$$|f_n(x)| \leq n \exp(n \ln(1-x)) \leq n \exp(n \ln(1-r)).$$

Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \exp(n \ln(1-r)) = 0$ (car $\ln(1-r) < 0$) entraîne alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 0.$$

Méthode 2. Soit $n \geq 1$ tel que $1/(n+1) < r$. D'après la Méthode 2 développée à question précédente, f_n est décroissante sur $[r, 1]$, en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [r, 1]} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(r) = 0.$$

On conclut que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[r, 1]$.

■

Exercice 12 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Solution. Commençons par noter que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, notée f dans la suite. La limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, si elle existe, n'est nulle autre que f . Par ailleurs, on a bien sûr pour $n \geq 1$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0, 1]} |x^n \ln(x)| = \sup_{x \in]0, 1]} (-x^n \ln(x)) = - \inf_{x \in]0, 1]} x^n \ln(x) = - \inf_{x \in]0, 1]} f_n(x).$$

Pour $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]0, 1]$ avec

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n \ln(x) + 1) \quad \text{pour tout } x \in]0, 1]$$

ce qui fournit sans difficulté le tableau de variations

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	1
$f'_n(x)$	$\parallel$	$- \quad \overset{\cdot\cdot\cdot}{0} \quad +$	
$f_n(x)$	0	$\searrow \quad \quad \swarrow$ $-\frac{1}{ne}$	0

en particulier

$$\inf_{x \in [0, 1]} f_n(x) = -\frac{1}{ne}.$$

On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ce qui traduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f . ■

Exercice 13 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := nx^2 \exp(-nx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $a < b$, déterminer (sans calculer d'intégrales) la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas.

— **Cas 1** $x = 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$f_n(0) = n \cdot 0^2 \cdot e^{-n \cdot 0} = 0,$$

en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

— **Cas 2** $x > 0$. En remarquant que $f_n(x) = x \frac{nx}{e^{nx}}$ et en utilisant l'égalité élémentaire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

on a tout de suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

— **Cas 3** $x < 0$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = +\infty$ et ceci entraîne la divergence (vers $+\infty$) de la suite réelle $(f_n(x))_{n \geq 1}$.

On conclut que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

2. Pour chaque entier $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f'_n donnée par

$$f'_n(x) = nxe^{-nx}(2 - nx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Puisqu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur une partie de $] -\infty, 0[$, nous allons restreindre notre étude des variations à l'intervalle $I := [0, +\infty[$. Etant donné un entier $n \geq 1$, les équivalences valides pour $x \in I$

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - nx \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{n}$$

ainsi que l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

nous donnent le tableau des variations de la fonction f_n :

x	0	$\frac{2}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	−
f_n	0	$\frac{4e^{-2}}{n}$	0

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \frac{4e^{-2}}{n},$$

en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| = 0$$

ce qui traduit la convergence uniforme sur I de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction nulle.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $a < b$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ (car continue sur $[a, b]$) et

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b \sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| dx = (b-a) \sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = (b-a) \frac{4e^{-2}}{n},$$

d'où l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

Remarque : On peut aussi faire appel à un résultat plus général du cours (valable pour les fonctions Riemann-intégrables).

■

Exercice 14 Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.

Solution. Bien sûr, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ (puisque $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrons que la convergence est uniforme. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on observe que

$$f_n(x) - |x| = \frac{(\sqrt{x^2 + 1/n} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{n(\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2})}.$$

Il s'ensuit que pour $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - |x|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n(\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2})} = \frac{1}{n\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

en particulier $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - |x|| = 0$. On conclut que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 15 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle. Par ailleurs, en remarquant que

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

nous voyons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$. ■

Exercice 16 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := e^{-nx} \sin(nx) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Pour $a > 0$, étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$. A t-on la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$?

Solution. Commençons par remarquer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle puisque (en tant que produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0) c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Pour $a > 0$, on a bien sûr

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq e^{-na}$$

et ceci entraîne que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$. La convergence uniforme n'a pas lieu sur $[0, +\infty[$ puisque

$$0 < |f_n(\frac{1}{n})| = e^{-1} |\sin(1)| \leq \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|.$$

■

Exercice 17 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \min(n, \frac{1}{\sqrt{x}}) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Par ailleurs, on a pour tout $n \geq 1$

$$n^2 - n = |f_n(1/n^4) - f(1/n^4)| \leq \sup_{x > 0} |f_n(x) - f(x)|$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x > 0} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f (sur $]0, +\infty[$). ■

Exercice 18 Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \sin(x + \frac{1}{n}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. Le caractère 1-Lipschitz de $\sin$ donne tout de suite pour chaque $n \geq 1$

$$|f_n(x) - \sin(x)| \leq |x + \frac{1}{n} - x| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \sin(x)| = 0$$

ce qui traduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\sin(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 19 Soit A un ensemble non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}_+$ qui converge uniformément vers une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que $(\ln(1 + f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\ln(1 + f)$ sur A .

Solution. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, on montre facilement que la fonction $g(\cdot) := \ln(1 + \cdot) : I := [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est 1-Lipschitz sur $[0, +\infty[$, i.e.,

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in I.$$

Il s'ensuit pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in A} |\ln(1 + f_n(x)) - \ln(1 + f(x))| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f nous permet alors de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |\ln(1 + f_n(x)) - \ln(1 + f(x))| = 0.$$

■

Exercice 20 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \sin^n(x) \cos(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Montrer l'égalité

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x)|.$$

3. Pour $n \geq 1$, étudier les variations de la fonction f_n sur $I = [0, \pi]$.
4. Conclure que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $|\sin(x)| < 1$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a bien entendu $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Par 2π -périodicité et imparité, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x)|.$$

3. Fixons pour un moment $n \geq 1$. Il est clair que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On étudie le signe de cette dérivée sur I en remarquant que pour tout $x \in I$,

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2(x) \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow x \in [0, \alpha_n] \cup [\beta_n, \pi],$$

où $\alpha_n := \arccos(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ et $\beta_n := \arccos(-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$. Le tableau des variations de f_n sur $[0, \pi]$ est alors donné par

x	0	α_n	β_n	π
$f'_n(x)$	+	0	0	+
$f_n(x)$	0	$f_n(\alpha_n)$	$f_n(\beta_n)$	0

Ceci et l'égalité valide pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

nous permettent alors d'écrire

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = |f_n(\alpha_n)| = |f_n(\beta_n)| = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} (n+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| = 0$ ce qui traduit la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction nulle.

■

Exercice 21 Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{x}{n(1+x^n)} \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Etablir que $(f_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Solution. Pour chaque $x \geq 0$, on peut écrire pour tout $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{x}{n}.$$

Il découle de ceci que $(f_n)_{n \geq 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. Nous allons voir que cette convergence est en fait uniforme. Pour chaque $n \geq 2$, la fonction f_n est évidemment dérivable sur $[0, +\infty[$ avec

$$f'_n(x) = \frac{1 + (1-n)x^n}{n(1+x^n)^2} \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[$$

et ceci nous donne sans difficultés que f_n est croissante sur $[0, \alpha_n[$ et décroissante sur $[\alpha_n, +\infty[$ avec $\alpha_n := \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Il s'ensuit que pour chaque $n \geq 2$,

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n(n-1)}{n^2}.$$

Il reste à observer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n(n-1)}{n^2} = 0$ pour conclure. ■

Exercice 22 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} |f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit alors d'écrire que pour tout $n \geq N$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

pour conclure quant à la convergence désirée. ■

Exercice 23 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \cos(nx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Solution. Supposons qu'il existe une sous-suite $(f_{s(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La continuité sur $\mathbb{R}$ de chaque f_n avec $n \in \mathbb{N}$ nous dit que f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ nous savons que

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{s(n)}(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s(n)} [\sin(s(n)b) - \sin(s(n)a)] = 0.$$

Il s'ensuit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ et ceci contredit que $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$. ■

Exercice 24 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 25 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ uniformément continues qui converge uniformément vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 26 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle et que pour chaque $x \in [a, b]$, la suite de réels $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n := \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)|$.

1. Montrer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite réelle positive.
2. Justifier que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f_n(x_n) = s_n$.
3. Etablir que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Solution.

1. Il suffit de voir que $0 \leq s_{n+1} \leq s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la continuité de f_n sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ nous dit qu'il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f_n(x_n) = s_n$.
3. Fixons pour un moment $m \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \geq m$, $s_n = f_n(x_n) \leq f_m(x_n)$ par décroissance de la suite $(f_k(x_n))_{k \in \mathbb{N}}$. Soit $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers un certain $\bar{x} \in [a, b]$. On a bien sûr

$$s_{\varphi(n)} \leq f_m(x_{\varphi(n)}) \quad \text{pour tout } n \geq m$$

d'où l'on tire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{\varphi(n)} \leq f_m(\bar{x}).$$

Il s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(\bar{x}) = 0.$$

Ceci montre la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction nulle.

■

Exercice 27 Soient $a < b$ deux réels, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{C.U.}} f$. Montrer que $\inf_{[a, b]} f_n \xrightarrow{\text{C.U.}} \inf_{[a, b]} f$.

Solution. Observons tout d'abord que f est continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Le fait que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n soit continue sur le fermé borné $[a, b]$ nous assure qu'il existe $c_n \in [a, b]$ tel que $\inf_{[a, b]} f_n = f_n(c_n)$. De même (puisque f est continue sur $[a, b]$) il existe $c \in [a, b]$ tel que $\inf_{[a, b]} f = f(c)$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il vient alors

$$f(c) - f_n(c_n) \leq f(c_n) - f_n(c_n) \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f nous donne $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$

$$f_n(c_n) - f(c) \leq f_n(c) - f(c) \leq \varepsilon.$$

On obtient alors que pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$

$$|f_n(c_n) - f(c)| \leq \varepsilon$$

ce qui traduit la convergence désirée. ■

Exercice 28 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles qui convergent uniformément respectivement vers $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.

Exercice 29 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles qui convergent uniformément respectivement vers $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que g est bornée sur A et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$. Alors, la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f g$.

Exercice 30 Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) := x + \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Que dire de la suite $(f_n^2)_{n \geq 1}$?

Solution. La convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$ est immédiate puisque pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - x| = \frac{1}{n}.$$

La suite $(f_n^2)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

La suite $(f_n^2)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément puisque pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)^2 - g(x)| \geq \frac{2n}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 2.$$

■

Exercice 31 Soient X un ensemble non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Soient $m \geq 1$ un entier et $X_1, \dots, X_m$ des parties de X de réunion X . Montrer que si pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X_i , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'ensemble X .

Solution. On suppose que pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X_i . Pour chaque $x \in X = \bigcup_{k=1}^m A_k$, on note $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Nous allons établir que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Fixons pour un moment $n \in \mathbb{N}$. Considérons $x_0 \in X$ et choisissons un $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $x_0 \in X_{i_0}$. Il vient tout de suite

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in X_{i_0}} |f_n(x) - f(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in X_i} |f_n(x) - f_i(x)|$$

ce qui montre que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in X_i} |f_n(x) - f_i(x)|.$$

Il reste à voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in X_i} |f_n(x) - f_i(x)| = 0$$

pour conclure que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X . ■

Exercice 32 Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus [0, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction à préciser.
2. En utilisant un résultat d'interversion limite/intégrale, montrer que cette convergence sur $[0, 1]$ ne peut pas être uniforme.
3. Soit $r \in]0, 1[$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[r, 1]$?

Solution.

1. On a bien sûr $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ceci nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \in]0, 1]$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{1}{n} < x$. Il s'ensuit que pour tout $n \geq N$, $f_n(x) = 0$ ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
2. Pour chaque entier $n \geq 1$, la fonction f_n est Riemann-intégrable (car continues par morceaux) sur $[0, 1]$ et un calcul élémentaire donne

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = \frac{1}{6}.$$

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$, on aurait

$$\frac{1}{6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

ce qui est bien entendu absurde.

3. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\frac{1}{n} < r$. On a pour tout $x \in [r, 1]$, $f_n(x) = 0$ d'où l'on tire

$$\sup_{x \in [r, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [r, 1]} |f_n(x)| = 0.$$

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[r, 1]$.

■

Exercice 33 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \geq 1$, on considère la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) := n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser. Montrer également que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Solution. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a tout de suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f'(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

i.e., $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous allons montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur $I := [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. On écrit pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) - f'(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} (f'(t) - f'(x)) dt.$$

Par ailleurs, le fait que f' soit uniformément continue sur $J := [a, b+1]$ nous donne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in J$ avec $|x - y| \leq \delta$, on ait

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon.$$

Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq \delta$ et pour tout $n \geq N$. Il vient alors pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in I$ (en remarquant que $x, x + \frac{1}{n} \in J$)

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(t) - f'(x)| dt \leq n\varepsilon(x + \frac{1}{n} - x) = \varepsilon.$$

On en arrive ainsi à

$$\sup_{x \in I} |g_n(x) - f'(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N$$

ce qui montre que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur I . ■

Exercice 34 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale. Le résultat a-t-il encore lieu sous une hypothèse de convergence simple ?

Solution. On exploite la propriété de Cauchy uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour obtenir l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $P_n - P_N$ est bornée. Le fait qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non constante est non bornée nous dit que pour tout $n \geq N$, la fonction $P_n - P_N$ est constante de valeur c_n . Il vient alors

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n(x) - P_N(x)) = f(x) - P_N(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On conclut que f est la somme d'une fonction polynomiale et d'une constante $\ell \in \mathbb{R}$, donc polynomiale. L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle comme le montre l'exemple de la fonction exponentielle limite simple d'une suite de fonctions polynomiales, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 35 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$

En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que f est nulle.

Solution. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ qui converge uniformément vers f . On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t)(f(t) - f_n(t)) dt + \int_0^1 f(t)f_n(t) dt \leq \sup_{[0,1]} |f| \sup_{[0,1]} |f - f_n|,$$

d'où l'on tire par passage à la limite $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$. Le fait que f^2 soit continue, positive et d'intégrale nulle nous permet de conclure que $f^2 = 0$ ce qui est bien sûr équivalent au fait que f soit nulle. ■

3 Retour sur les séries numériques

Exercice 36 Etudier la convergence des séries numériques

$$\sum \frac{\ln(n)}{2^n}; \sum \frac{4n^2 - n + 5}{3n^5 + 2}; \sum \frac{1}{n^2(\ln(n))^2}; \sum \frac{1}{(\ln(n))^2}; \sum n(\cos(\frac{1}{n}) - 1); \sum \frac{n!}{(2n)!}$$
$$\sum \frac{1}{n \cos^2(n)}; \sum 2^{-\sqrt{n}}; \sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2}; \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(\ln(n))^2}; \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n))^2}; \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n)}.$$

Exercice 37 Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}.$$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n}$.
2. Etudier la nature des séries numériques $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

Exercice 38 Démontrer que les séries suivantes

$$\sum \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \sum \frac{n+1}{3^n}$$

convergent et calculer leur somme.

Exercice 39 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad s_n = r_n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad t_n = s_n - \frac{1}{2n^2}.$$

- (1) Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr_n = 1$.
- (2) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Montrer que

$$s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

- (3) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n^3}.$$

4 Séries de fonctions

Exercice 40 Pour chaque $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{n(1+nx)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la série numérique $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge t-elle ?
2. En utilisant la question précédente, déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des $x \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
3. Soit $a > 0$ un réel. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

4. Déterminer pour tout entier $n \geq 1$

$$\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)|.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?

5. Montrer que la fonction somme $F := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

6. On souhaite montrer l'existence et déterminer la limite $\ell := \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x)$.

- (a) Montrer que F est à valeurs positives et décroissante sur $\mathcal{D}$. En déduire l'existence de la limite ℓ .
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \leq F(x).$$

- (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$F\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (d) Conclure.

Solution.

1. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. La série $\sum f_n(0)$ diverge (c'est la série harmonique/de Riemann de paramètre 1). Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, on a l'équivalent

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x},$$

ce qui nous assure de la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{D}$ recherché est $]0, +\infty[$.

3. Pour $n \geq 1$ la fonction f_n est évidemment décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives, en particulier

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

La question précédente nous dit alors que la série numérique $\sum \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \sum f_n(a)$ converge, i.e., la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

4. Soit $n \geq 1$ un entier. La fonction f_n étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n(0).$$

Par ailleurs, la continuité de f_n en 0 nous donne

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)|.$$

Le fait que la série numérique $\sum f_n(0)$ diverge nous dit alors que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon > 0$. La série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément (car elle converge normalement) sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et pour chaque $n \geq 1$ la fonction f_n est continue en x_0 . Le cours nous permet alors de conclure que F est continue en x_0 .

6. (a) Le fait que f_n soit à valeurs positives pour chaque $n \geq 1$ nous dit que F est elle-même à valeurs positives. Par ailleurs, pour $x, y \in \mathcal{D}$ avec $x \leq y$, on a

$$f_n(y) \leq f_n(x) \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=1}^n f_k(y) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Il reste à passer à la limite pour conclure que $F(y) \leq F(x)$. La décroissance de F nous assure de l'existence pour F d'une limite unilatérale en chaque point de $]0, +\infty[$.

- (b) L'inégalité demandée est immédiate compte-tenu de la positivité de chaque f_n avec $n \geq 1$.
(c) Il suffit d'écrire pour chaque entier $n \geq 1$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1 + \frac{k}{n})} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1 + \frac{n}{n})} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La divergence de la série harmonique nous dit alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

- (d) La caractérisation séquentielle de la limite nous dit que

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

■

Exercice 41 Etudier la convergence normale (resp. uniforme (resp. simple)) de la série de fonctions $\sum f_n$ où pour chaque $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Solution. Il suffit d'observer que pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$$

pour conclure que $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément et simplement). ■

Exercice 42 Etudier la convergence normale (resp. uniforme (resp. simple)) de la série de fonctions $\sum f_n$ où pour chaque $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(x) := \frac{(-1)^n}{n + x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Solution. Il n'y a pas convergence normale puisque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par ailleurs, la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ converge (c'est une série alternée vérifiant les hypothèses de la règle de Leibniz : le terme général en valeur absolue décroît et tend vers 0) : il y a donc convergence simple. En ce qui concerne la convergence uniforme, on écrit pour tout $N \geq 1$ et

tout $x \in \mathbb{R}$ (rappelons que sous les hypothèses de la règle de Leibniz nous savons que la valeur absolue du reste d'une série numérique alternée est majoré par le premier terme du reste)

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+x^2} \leq \frac{1}{N}.$$

Il s'ensuit

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \right| = 0$$

ce qui traduit la convergence uniforme de $\sum f_n$. ■

Exercice 43 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \text{th}(x+n) - \text{th}(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où th désigne la fonction tangente hyperbolique.

1. Montrer que la série numérique $\sum \frac{1}{\text{ch}^2(n)}$ converge, où ch désigne la fonction cosinus hyperbolique.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $r > 0$. Etablir que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, r]$. En déduire que $f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x+1) - f(x) = 1 - \text{th}(x)$.
5. Montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) =$ existe et appartient à $\mathbb{R}$.

Solution.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\text{ch}^2(n)} = \frac{4}{(e^n + e^{-n})^2} \leq \frac{4}{e^{2n}}.$$

Cette inégalité, le fait que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$) et l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^{2n}} = 0$ nous disent que la série numérique $\sum \frac{1}{\text{ch}^2(n)}$ converge.

2. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$. Par application du théorème des accroissements finis sur $[n, x+n]$, on peut écrire pour un $c_{n,x} \in]n, x+n[$

$$0 \leq f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n) = \text{th}'(c_{n,x})(x+n-n) = \frac{x}{\text{ch}^2(c_{n,x})} \leq \frac{x}{\text{ch}^2(n)}.$$

Le fait que la série numérique $\sum \frac{1}{\text{ch}^2(n)}$ converge garantit alors la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

3. De manière analogue à la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{\text{ch}^2(n)} \leq \frac{r}{\text{ch}^2(n)}.$$

Il s'ensuit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| \leq \frac{r}{\text{ch}^2(n)}.$$

Ceci et la convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{\text{ch}^2(n)}$ entraînent que la série numérique $\sum \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)|$ converge, i.e., $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[0, r]$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(x+1) &= \sum_{n=0}^N (\text{th}(x+1+n) - \text{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^N (\text{th}(n+1) - \text{th}(n)) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} (\text{th}(x+n) - \text{th}(n)) + (\text{th}(N+1) - \text{th}(0)) \\ &= -\text{th}(x) + \sum_{n=0}^{N+1} (\text{th}(x+n) - \text{th}(n)) + \text{th}(N+1) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$f(x+1) = -\text{th}(x) + f(x) + 1.$$

Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n).$$

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) - f(n) = 1 - \text{th}(n)$. Ceci et $1 - \text{th}(n) \sim \frac{1}{2e^{-2n}}$ garantissent la convergence de la série numérique $\sum (f(n+1) - f(n))$. En écrivant pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} (f(n+1) - f(n)) = f(N) - f(0),$$

nous voyons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ existe dans $\mathbb{R}$ et satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (f(n+1) - f(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f(n+1) - f(n)).$$

■

Exercice 44 Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{\alpha x} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

Exercice 45 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \exp(-n) \sin(n^2 x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On va appliquer le théorème de dérivation sur un intervalle I borné d'intérieur non vide contenant x_0 . La série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge car $f_n \leq \exp(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur I puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in I} |f'_n(x)| \leq \exp(-n) n^2.$$

Nous sommes en mesure d'appliquer le théorème mentionné ci-dessus : la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I et est dérivable sur I de dérivée

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 \exp(-n) \cos(n^2 x_0)).$$

■

Exercice 46 Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n^3} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que

$$\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Exprimer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Etablir l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Solution.

1. La série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$$

et la série numérique $\sum \frac{1}{n^3}$ converge.

2. La somme de $\sum f_n$ notée f est continue sur $\mathbb{R}$ car la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et pour chaque $n \geq 1$ la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, \pi]$ et le fait que pour chaque $n \geq 1$ la fonction f_n est Riemann-intégrable (car continue) sur $[0, \pi]$ nous assurent que f est Riemann-intégrable sur $[0, \pi]$ (ce que l'on savait déjà car f est continue sur $[a, b]$) et

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que pour tout $n \geq 1$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n).$$

Il reste à voir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} (1 - (-1)^{2n-1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} (1 - (-1)^{2n}) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

pour aboutir à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4. Chaque f_n avec $n \geq 1$ est de classe C^1 sur $I := [0, \frac{\pi}{2}]$ avec $f'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos(nx)$ pour tout $x \in I$. En particulier, la série $\sum f'_n$ converge normalement sur I puisque $\sup_{x \in I} |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Ceci et la convergence simple sur I de la série $\sum f_n$ nous assurent que f est de classe C^1 sur I avec

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

5. Puisque f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\int_0^{\pi} f'(x) dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3}.$$

Par ailleurs, on a pour $n \geq 1$ pair $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. On conclut que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

■

Exercice 47 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) := \operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que pour $r > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, r]$.
2. Etablir que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
3. Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite notée ℓ en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Montrer que la série numérique $\sum \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n})$ diverge.
6. Dédurre des questions précédentes que $\ell = +\infty$ et que pour tout $A > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[A, +\infty[$.

Exercice 48 On définit pour chaque entier $n \geq 1$ la fonction $f_n :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) := \frac{1}{n^x} \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

Le fait que $\sum f_n(x)$ soit une série numérique convergente nous permet de considérer la fonction $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

La fonction ci-dessus est connue sous le nom de « fonction zêta de Riemann ».

1. Montrer que pour tout réel $r > 1$, la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[r, +\infty[$.
2. Montrer que $\zeta(\cdot)$ est continue sur $]1, +\infty[$. Est-elle de classe C^1 sur ce même intervalle ?
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.