

Suites et séries de fonctions

Florent Nacry (florent.nacry@univ-perp.fr)

Université Perpignan Via Domitia

Laboratoire LAMPS (Campus principal, Bâtiment B, Etage 1)

- La convergence simple
- La convergence uniforme
- Propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions et critère de Cauchy
- Conditions suffisantes de convergence uniforme (théorèmes de Dini et équicontinuité)
- Théorème de Weierstrass
- Séries de fonctions

Convergence simple

Convergence simple d'une suite de fonctions

Nous débutons ce cours avec la convergence simple d'une suite de fonctions.

Définition

Soient A un ensemble non vide, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n \geq n_0}$ **converge simplement** sur $B \subset A$ lorsque pour tout $x \in B$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Si tel est le cas, la fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \text{pour tout } x \in B$$

est appelé **limite simple** de $(f_n)_{n \geq n_0}$ relativement à B .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés sur la partie B en question (notamment lorsque $A = B$) on écrit

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{C.S.}} f$$

pour exprimer le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Il n'y a bien entendu aucune perte de généralités en supposant que $B = A$ (quitte à restreindre) et $n_0 = 0$ et c'est ce que nous allons faire par la suite.

- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement relativement à B vers f **si et seulement si** pour tout $x \in B$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{x,\varepsilon}$, on ait l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il est important de noter que l'entier $N_{\varepsilon,x}$ dépend ici de $\varepsilon > 0$ mais aussi également de $x \in B$.

Cette traduction à l'aide de quantificateurs nous permettra un peu plus loin d'introduire la notion de *convergence uniforme*.

- L'unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ entraîne bien sûr l'unicité de la limite simple.
- On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ ou encore par $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$. En fait, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou encore par n'importe quel espace métrique...

On s'intéresse naturellement aux propriétés d'une suite de fonctions dont hérite sa limite simple.

Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ont lieu :

- (a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ (resp. $f_n \leq 0$) alors $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$).
- (b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. décroissante), alors f est croissante (resp. décroissante).
- (c) S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit K -Lipschitz, alors f est K -Lipschitz.
- (d) Si $A = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que f_n soit T -périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est T -périodique.
- (e) Si A est symétrique par rapport à 0 et f_n est paire (resp. impaire) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est paire (resp. impaire).
- (f) Si $A = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe (resp. concave) sur I alors f est convexe (resp. concave) sur I .

Démonstration. Immédiat (laissée à titre d'exercice).



Non-préservation de la continuité et du caractère borné

- La continuité **n'est pas préservée** par passage à la limite simple.

Exemple. Pour chaque $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := x^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1[.$$

Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ tandis que la limite simple f de $(f_n)_{n \geq 1}$ n'est pas continue en 1.

- Le caractère borné **n'est pas préservée** par passage à la limite simple.

Exemple. Pour chaque $n \geq 1$, on considère la fonction bornée $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [-n, n], \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-n, n]. \end{cases}$$

Cette suite de fonctions converge simplement vers l'identité $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ qui n'est bien sûr pas bornée.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Rappelons (voir cours L1) qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **Riemann-intégrable** sur $[a, b]$ si et seulement si pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt \leq \varepsilon.$$

A toute fin utile, rappelons également les quelques faits ci-dessous :

- Une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.
- Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone (resp. continue (resp. continue par morceaux)) sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
- La somme (resp. le produit) de deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
- La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

Dérivabilité et intégration de la limite simple - I

Les exemples ci-dessous montrent que la limite simple d'une suite de fonctions dérivables (resp. Riemann intégrables) **n'est pas nécessairement** dérivable (resp. Riemann intégrable).

- Pour chaque $n \geq 1$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et converge simplement vers $|\cdot|$ qui n'est pas dérivable en 0.

- On note $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des rationnels de $[0, 1]$ (rappelons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable), i.e., $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{q_k\}}(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

qui est Riemann intégrable sur $[0, 1]$ (car continue par morceaux sur $[0, 1]$ puisque nulle sauf en $q_0, \dots, q_n$) de limite simple $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ qui n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

Dérivabilité et intégration de la limite simple - II

Nous allons voir ci-dessous que même si la limite simple f d'une suite de fonctions dérivables $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. Riemann intégrable) est dérivable (resp. Riemann intégrable) on **ne dispose pas** en général des égalités

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x)$$

(resp.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt).$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : I := [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(x) := n^2 x e^{-nx} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On vérifie que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dérivables sur I qui converge simplement sur I vers la fonction nulle notée f . On a de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(0) = +\infty \neq \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(0) = 0$$

ainsi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = 0.$$

Convergence uniforme

Convergence uniforme

Ce qui précède nous conduit à développer un autre mode de convergence pour les suites de fonctions.

Définition

Soient A un ensemble non vide, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n \geq n_0}$ **converge uniformément** sur $B \subset A$ vers une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que et pour tout $n \geq N$ et **pour tout $x \in B$**

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Si tel est le cas, la fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **limite uniforme** de $(f_n)_{n \geq n_0}$ relativement à B .

- Comme pour la convergence simple, nous pouvons (sans pertes de généralités) développer notre étude avec $A = B$ et $n_0 = 0$.
- **Comparer cette définition** avec la définition quantifiée de la convergence simple. Noter que l'entier N_ε ne dépend désormais plus que de ε .
- Comme pour la convergence simple, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés sur la partie B en question (notamment lorsque $A = B$) on écrit $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{C.U.}} f$ pour exprimer le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Convergence uniforme V.S. convergence simple

Remarquons que pour établir la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de la définition, il faut au préalable connaître une/la fonction limite f . La proposition ci-dessous nous dit que cette fonction f **n'est nulle autre** que la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A .

Démonstration. Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A . Soit $a \in A$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε mais pas de x) tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on ait

$$|f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a)$, i.e., $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A . La démonstration est terminée. ■

- En guise de conséquence directe, nous obtenons le fait que la limite uniforme (si elle existe) est **unique**.
- La réciproque de la proposition ci-dessus est **fausse**.

Convergence uniforme - Exemple avec représentation graphique

On définit pour chaque $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

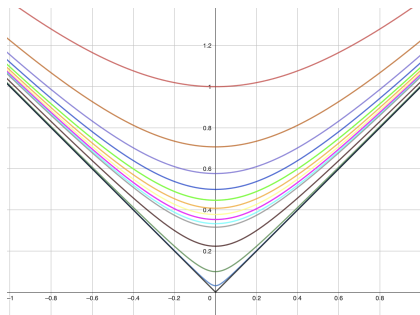


Figure 1: Représentation graphique sur $[-1, 1]$ de $x \mapsto f_n(x)$ pour $n = 1, \dots, 10, 20, 100, 1000$ et $x \mapsto |x|$.

Absence de convergence uniforme - Exemple avec représentation graphique

On définit pour chaque $n \geq 1$ la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = x^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$. Il n'y a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction nulle sur $[0, 1[$ puisque $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x)| = 1$.

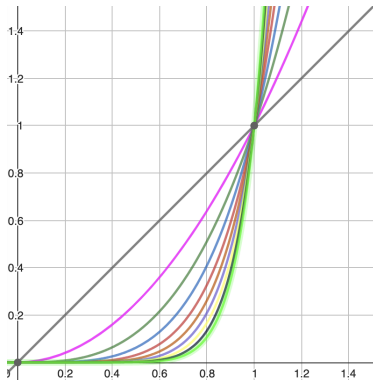


Figure 2: Représentation graphique sur $[0, 1]$ de $x \mapsto x^n$ pour $n = 1, \dots, 10$

Majorants/minorants - Plus grand/petit élément

Nous allons caractériser la convergence uniforme à travers la notion de *borne supérieure*. Effectuons au préalable quelques rappels.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) est un **majorant** (resp. **minorant**) de A lorsque

$$a \leq M \quad (\text{resp. } m \leq a) \quad \text{pour tout } a \in A.$$

On note $M(A)$ (resp. $m(A)$) l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A . On dit que la partie A est **majorée** (resp. **minorée**) lorsque $M(A) \neq \emptyset$ (resp. $m(A) \neq \emptyset$). Si A est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est **bornée**. Il est clair que la partie A est bornée si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$|a| \leq M \quad \text{pour tout } a \in A.$$

On dit qu'un réel M_0 (resp. m_0) est un **plus grand élément** (resp. **plus petit élément**) de A lorsque $M_0 \in A \cap M(A)$ (resp. $m_0 \in A \cap m(A)$). On vérifie sans difficulté que A n'admet au plus qu'un plus petit (resp. plus grand) élément, noté $\max A$ (resp. $\min A$).

Soit A une partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. Lorsque l'ensemble $M(A)$ (resp. $m(A)$) admet un plus petit (resp. plus grand) élément $s \in \mathbb{R}$ (resp. i), on dit que s (resp. i) est la **borne supérieure** (resp. **borne inférieure**) de A et l'on écrit $s = \sup A$ (resp. $i = \inf A$). On dit parfois que s est le plus petit des majorants (resp. i est le plus grand des minorants).

Le résultat suivant garantissant l'existence d'une borne inférieure et supérieure est **fondamental**.

Théorème

Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

On rappelle que ce n'est pas un axiome (contrairement à ce que l'on peut parfois lire dans la littérature !). Ce résultat découle bien entendu de la construction de la droite réelle et de ses propriétés (par exemple la *propriété des segments emboîtés*).

En pratique, on utilise la caractérisation suivante :

Proposition

Soit A une partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel r , on a l'équivalence $r = \sup A$ (resp. $r = \inf A$) si et seulement si $r \in M(A)$ (resp. $r \in m(A)$) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $r - \varepsilon < a$ (resp. $a < r + \varepsilon$).

Démonstration. On ne montre que la première équivalence (la seconde étant analogue). Soit $r \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$, On suppose que $r = \sup A$. Dans ce cas, on a bien sûr $r \in M(A)$. Fixons $\varepsilon > 0$. L'inégalité évidente $r - \varepsilon < r$ et le fait que r soit le plus petit élément de $M(A)$ nous disent que $r - \varepsilon \notin M(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $a > r - \varepsilon$.

$\Leftarrow$, Par l'absurde, supposons que $s := \sup A \neq r$. Puisque r est un majorant de A , on a $s < r$. Posons $\varepsilon_0 := \frac{r-s}{2} > 0$. Par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que $a > r - \varepsilon$. Il vient alors

$$a > r - \frac{r-s}{2} = \frac{r+s}{2} > s$$

ce qui contredit le fait que s soit un majorant de A . ■

Nous revenons à présent à la convergence uniforme des suites de fonctions.

Proposition

Soient A un ensemble non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur A si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (1)$$

Démonstration. $\Rightarrow$, Soit $\varepsilon > 0$. Il existe (par définition de la convergence uniforme) $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$s_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

On conclut que la suite $(s_n)_{n \geq N}$ converge vers 0.

$\Leftarrow$, Soit $\varepsilon > 0$. L'égalité (1) nous donne tout de suite $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci traduit la convergence uniforme désirée. ■

On peut établir la convergence uniforme sans pour autant déterminer explicitement pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la borne supérieure $\sup_{x \in A} |f_n(x)|$ (qui est en général un problème difficile!).

Proposition

Soient A un ensemble non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ telle que

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A .

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement/des gendarmes. ■

Soit $a > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \exp(-nx) \sin(nx) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ (via le fait que le produit d'une suite réelle qui converge vers 0 par une suite réelle bornée converge vers 0).

La convergence uniforme découle de la proposition précédente en écrivant

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq \sup_{x \in [a, +\infty[} |\exp(-nx)| \leq \exp(-na).$$

et en observant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-na) = 0$.

Dans la ligne de la proposition précédente nous avons :

Proposition

Soient A un ensemble non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs dans $\mathbb{R}$. S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$f_n(a_n) - f(a_n) \not\rightarrow 0,$$

alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur A .

Démonstration. S'il existe une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a alors

$$0 \leq |f_n(a_n) - f(a_n)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et ceci montre que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$. ■

Exemples d'utilisation de la proposition précédente

- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \exp(-nx) \sin(nx) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

On a vu que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle (et uniformément sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$). Elle ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-1) \sin(1) \neq 0.$$

- Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := n \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f := \text{Id}_{\mathbb{R}}$ mais ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \text{Id}_{\mathbb{R}}(x)| \geq |f_n(n\pi) - n\pi| \geq n\pi.$$

Propriétés de la limite uniforme

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$,

- Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de A à valeurs réelles qui convergent uniformément respectivement vers $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, la suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.
- Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de A à valeurs réelles qui convergent uniformément respectivement vers $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que g est bornée sur A et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$. Alors, la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg .
- Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ et $A_1, \dots, A_m$ des parties de A . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A_1, \dots, A_m$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\bigcup_{k=1}^m A_k$.

Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles qui converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, la fonction $f_n - f$ soit bornée sur A .
- Si f est bornée sur A par un réel $M \geq 0$, nous avons pour $\varepsilon > 0$ l'existence de $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq \varepsilon + M.$$

On dit alors parfois que la suite $(f_n)_{n \geq N}$ est **uniformément bornée**. Bien sûr, si les fonctions $f_0, \dots, f_N$ sont bornées, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

- Si les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées sur A (i.e., pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \geq 0$ tel que $\sup_A |f_n| \leq M_n$), alors f est bornée (et le point précédent nous dit alors que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée).

Continuité de la limite uniforme

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Plus précisément :

Proposition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en $a \in A$, alors f est continue en a .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons (par convergence uniforme) $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in A} |f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3.$$

La continuité de f_N en a nous donne un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap]a - \eta, a + \eta[=: I$

$$|f_N(x) - f_N(a)| \leq \varepsilon/3.$$

Il reste à écrire que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq \varepsilon$$

pour conclure que f est continue en a . ■

On peut parfois exploiter le résultat précédent pour établir qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

On reprend un exemple vu précédemment. Pour chaque $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := x^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1[.$$

Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ tandis que la limite simple f de $(f_n)_{n \geq 1}$ n'est pas continue en 1.

La proposition précédente nous dit alors que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Avant de poursuivre notre étude des suites de fonctions, effectuons quelques rappels sur les suites de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** lorsque pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p \leq q$ on ait l'inégalité

$$|u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

L'intérêt des suites de Cauchy est de pouvoir établir la convergence d'une suite sans invoquer sa limite. On rappelle en effet l'une des propriétés les plus importantes de la droite réelle :

Théorème (complétude de $\mathbb{R}$)

Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

L'implication $\Leftarrow$ est un simple exercice tandis que la réciproque découle de la construction de la droite réelle.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappelons que pour $\bar{x} \in A$, le fait que la suite $(f_n(\bar{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy signifie que pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p \geq N$, on ait l'inégalité

$$|f_p(\bar{x}) - f_q(\bar{x})| \leq \varepsilon.$$

Une légère adaptation de la définition ci-dessus conduit à :

Définition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la **propriété de Cauchy uniforme** sur A lorsque pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p \leq q$ et pour tout $x \in A$, on ait l'inégalité

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

CNS pour la convergence uniforme via la propriété de Cauchy

Sans surprise, la propriété de Cauchy uniforme est équivalente à la convergence uniforme (dans le cadre des suites de fonctions à valeurs réelles).

Théorème

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la propriété de Cauchy uniforme sur A .

Démonstration. $\Rightarrow$, Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A . Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{a \in A} |f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p \leq q$. On a pour tout $x \in A$

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

et ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de Cauchy uniforme sur A .

$\Leftarrow$, Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la propriété de Cauchy uniforme sur A . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p \leq q$, on ait

$$\sup_{x \in A} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour chaque $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers un réel que l'on note $f(x)$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A . Nous allons voir que cette convergence est en fait uniforme sur A . Pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in A$, on a

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } m \geq n.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in A$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On conclut que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui traduit bien la convergence uniforme attendue vers la fonction f . La démonstration est terminée. ■

Nous allons exploiter la propriété de Cauchy uniforme pour établir le résultat ci-dessous dit de "double limite" ou "d'interversion de limites". Avant de l'énoncer, rappelons qu'un point $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est **adhérent** à une partie A de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Théorème

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point adhérent à A , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A à valeurs réelles qui converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Alors, la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

La démonstration

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $\ell_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$. Nous allons commencer par établir que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f elle satisfait la propriété de Cauchy uniforme. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p \geq N$ on ait

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } x \in A. \quad (2)$$

Il découle de ceci que pour tout $q \geq p \geq N$, $|\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon/3$ et ceci traduit la propriété de Cauchy attendue. Ainsi, la limite $\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$ existe dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors trouver un entier $n_0 \geq N$ tel que $|\ell_{n_0} - \ell| \leq \varepsilon/3$. En revenant à (2) et en utilisant le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f , nous voyons que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Supposons maintenant que $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a = +\infty$, $a = -\infty$). Par ailleurs, la définition de ℓ_{n_0} nous donne l'existence de $\eta > 0$ (resp. l'existence de $r \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in A \cap]a - \eta, a + \eta[=: V$ (resp. $x \in A \cap]r, +\infty[=: V$, $x \in A \cap]-\infty, r[=: V$) on ait $|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| \leq \varepsilon/3$. Il reste alors à écrire que pour tout $x \in V$

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$$

pour obtenir l'égalité $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. La démonstration est terminée. ■

Nous donnons à présent un résultat permettant en particulier (voir (c) ci-dessous) d'inverser le symbole "limite" et le symbole "intégrale".

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ Riemann-intégrables sur $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On a :

(a) La fonction f_∞ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

(b) La suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F_∞ , où pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la fonction $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

(c) On a l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

La démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} =: c \quad (3)$$

ce qui est équivalent à

$$f_n(t) - c \leq f(t) \leq f_n(t) + c \quad \text{pour tout } t \in [a, b]. \quad (4)$$

La Riemann-intégrabilité de f_N sur $[a, b]$ nous donne deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi \leq f_N \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\widehat{\varphi} := -c + \varphi$ et $\widehat{\psi} := c + \psi$. On tire facilement des inégalités (4) que $\widehat{\varphi} \leq f \leq \widehat{\psi}$. Par ailleurs, on a également

$$\int_a^b (\widehat{\psi} - \widehat{\varphi})(t) dt = \int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt + 2c(b-a) \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, autrement dit (a) est établie. Cette intégrabilité et l'inégalité (3) nous assurent que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x-a) \leq \varepsilon$$

ce qui traduit la convergence uniforme énoncée dans (b). Il reste à voir que (c) est une conséquence directe de (b) pour terminer la démonstration. ■

De ce résultat nous déduisons des conditions suffisantes garantissant la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 . Il convient d'observer que l'hypothèse de classe C^1 et non de simple dérivabilité vient de l'usage de l'intégrale de Riemann dans la démonstration.

Corollaire

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ à valeurs réelles de classe C^1 . On suppose :

(i) La suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, f est de classe C^1 sur $[a, b]$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f et $f' = g$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f'_n est Riemann-intégrable (car continue) sur $[a, b]$ ce qui permet de définir $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F_n(x) := \int_a^x f'_n(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

L'hypothèse (i) nous dit que g est continue sur $[a, b]$ et le Théorème de la Slide 31 garantit que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

La fonction G est de classe C^1 sur $[a, b]$ par continuité de g sur $[a, b]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $x \in [a, b]$, on a $F_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$. Il s'ensuit (via (ii) et la convergence uniforme mentionnée ci-dessus) que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $G + f(a)$. Ceci et (ii) donnent alors $f = G + f(a)$. La fonction f est dérivable sur $[a, b]$ et satisfait $f' = G' = g$. La continuité de g nous permet de conclure que f' est continue, i.e., f est de classe C^1 . ■

On peut affaiblir les hypothèses du corollaire précédent comme ci-dessous. Noter que la démonstration ne repose plus sur l'intégrale de Riemann mais sur les accroissements finis.

Théorème

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I borné d'intérieur non vide à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I . On suppose :

- (i) La suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Alors, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $f' = g$.

Soit $M > 1$ tel que $I \subset [-M, M]$. Montrons tout d'abord que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la propriété de Cauchy uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Le fait que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy et le fait que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de Cauchy uniforme nous donnent l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p \geq N$, on ait

$$|f_p(x_0) - f_q(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in I} |f'_p(x) - f'_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p \geq N$ et pour $x \in I$ une application de l'inégalité des accroissements finis sur $I_x := [\min(x, x_0), \max(x, x_0)]$ donne

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &\leq |(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)| + |f_p(x_0) - f_q(x_0)| \\ &\leq \sup_{y \in I_x} |(f_p - f_q)'(y)| |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui traduit le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de Cauchy uniforme. Cette suite converge donc uniformément vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Fixons $x_1 \in I$. A travers la deuxième inégalité de (5), nous voyons que $|f'_N(x_1) - g(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. En combinant cette inégalité et la définition de f'_N , nous obtenons $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_1 - \delta, x_1 + \delta[\setminus \{x_1\}$

$$\left| \frac{f_N(x) - f_N(x_1)}{x - x_1} - g(x_1) \right| \leq \left| \frac{f_N(x) - f_N(x_1)}{x - x_1} - f'_N(x_1) \right| + |f'_N(x_1) - g(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Une nouvelle application des accroissements finis avec la deuxième inégalité de (5) fournit pour tout $p \geq N$

$$|(f_N - f_p)(x) - (f_N - f_p)(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4} |x - x_1|.$$

En passant à la limite (lorsque $p \rightarrow +\infty$) dans l'inégalité précédente

$$|(f_N - f)(x) - (f_N - f)(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4} |x - x_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} |x - x_1|..$$

Il reste à écrire

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - g(x_1) \right| \leq \left| \frac{(f - f'_N)(x) - (f - f'_N)(x_1)}{x - x_1} \right| + \left| \frac{f_N(x) - f_N(x_1)}{x - x_1} - g(x_1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

pour conclure que f est dérivable en x , de nombre dérivée $f'(x) = g(x)$. La démonstration est terminée. ■

Soient $a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Lorsque f est Riemann intégrable sur $[a, c]$ pour tout $a < c < b$ et que $\lim_{x \rightarrow b, x < b} \int_a^x f(t) dt$ existe dans $\mathbb{R}$, on note $\int_a^b f(t) dt$ la limite, i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow b, x < b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est **l'intégrale généralisée/impropre (de Riemann)** de f sur $[a, b[$. Parfois, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge ou que f est Riemann intégrable sur $[a, b[$.

Si $b < +\infty$, on montre que $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b[$ avec $x, y \in]\eta - b, \eta + b[$ on ait $|\int_x^y f(t) dt| \leq \varepsilon$.

Si $b = +\infty$, on montre que $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x, y \geq A$ on ait $|\int_x^y f(t) dt| \leq \varepsilon$.

Bien sûr, on définit de même la Riemann intégrabilité généralisée sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et l'on dispose d'équivalences analogues à celles-ci dessus.

Convergence uniforme et Riemann intégrabilité généralisée - Cas d'un intervalle borné

Lorsque l'intervalle d'intégration est borné (i.e., du type $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) nous disposons d'un résultat analogue au théorème précédent pour l'intégrale généralisée de Riemann.

Théorème

Soient $a < b$ deux réels et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b[$ (i.e., avec $\int_a^b f_n(t) dt$ convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$). On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f_\infty : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On a lieu :

- (a) La fonction f_∞ est Riemann-intégrable sur $[a, b[$ (i.e., $\int_a^b f_\infty(t) dt$ converge).
- (b) On a l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f_\infty(t) dt.$$

Etant donné $a < c < b$, nous pouvons appliquer le Théorème de la Slide 31 pour obtenir la Riemann-intégrabilité sur $[a, c]$ de la fonction f puisque pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, c]$ vers f_∞ . Soit $\varepsilon > 0$. Posons $c := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$\sup_{t \in [a, b[} |f_n(t) - f_\infty(t)| < c. \quad (6)$$

Le fait que f_N soit Riemann-intégrable sur $[a, b[$ (i.e., $\int_a^b f_N(t) dt$ converge) nous donne un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b[\cap]\eta - b, \eta + b[$ on ait $|\int_x^y f_N(t) dt| \leq \varepsilon/2$. Ceci et l'inégalité (6) nous donnent

$$\left| \int_x^y f_N(t) dt - \int_x^y f_\infty(t) dt \right| \leq \int_x^y |f_N(t) - f_\infty(t)| dt \leq c|y - x| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où l'on tire

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^y f_N(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que f_∞ est Riemann-intégrable sur $[a, b[$.

Pour $n \geq N$ et $a < y < b$, l'inégalité (6) permet d'écrire

$$\left| \int_a^y f_n(t) dt - \int_a^y f_\infty(t) dt \right| \leq c(y - a) \leq \varepsilon$$

et ceci entraîne

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f_\infty(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f_\infty(t) dt.$$



Théorèmes de Dini et équicontinuité

Nous allons à présent énoncer et démontrer deux théorèmes attribués à U. Dini qui garantissent qu'une suite de fonctions simplement convergente et satisfaisant des hypothèses de monotonie et de continuité converge uniformément.

Théorème (1er théorème de Dini)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle converge simplement vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Démonstration. Supposons que f est continue. On peut supposer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On a bien sûr $f_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en fait, on a même $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$). Par l'absurde, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f . Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ satisfaisant

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Il n'est alors pas difficile de voir qu'il existe $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons trouver $x_n \in [a, b]$ tel que

$$|f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon.$$

Le caractère fermé et borné de $K := [a, b]$ nous assure de l'existence d'une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{x} \in K$. En notant $\theta := \varphi \circ \psi$ (qui est une fonction strictement croissante) on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_{\psi(n)}) - f_{\theta(n)}(x_{\psi(n)}) > \varepsilon.$$

Fixons pour un moment $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq m$, on a

$$f(x_{\psi(n)}) - f_{\theta(m)}(x_{\psi(n)}) \geq f(x_{\psi(n)}) - f_{\theta(n)}(x_{\psi(n)}) \geq \varepsilon,$$

où la première inégalité résulte de la croissance de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'ensuit (par passage à la limite et en utilisant les hypothèses de continuité)

$$f(\bar{x}) - f_{\theta(m)}(\bar{x}) > \varepsilon.$$

Il reste à voir que

$$f(\bar{x}) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} (f_{\theta(m)}(\bar{x}) + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon$$

pour obtenir la contradiction recherchée. La démonstration est terminée. ■

- Le 1^{er} théorème de Dini **n'est pas valable** si l'intervalle considéré **n'est pas fermé**.
Considérons pour chaque entier $n \geq 1$ la fonction continue $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := x^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1[.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, converge simplement vers la fonction nulle de $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue. Toutefois, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$ puisque

$$\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1.$$

- Le théorème de Dini **n'est pas valable** si l'intervalle considéré **n'est pas borné**.
Considérons pour chaque entier $n \geq 1$ la fonction continue $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) := \frac{x}{n} \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, converge simplement vers la fonction nulle de $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue. Toutefois, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$ puisque

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |g_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \frac{x}{n} \geq \frac{n}{n} = 1.$$

Deuxième théorème de Dini

Le deuxième théorème de Dini s'énonce comme suit :

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes (resp. décroissantes) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f continue, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Démonstration. Supposons que f soit continue sur $[a, b]$ et supposons également que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n soit croissante sur $[a, b]$. Par convergence simple, la fonction f est alors elle aussi croissante sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, nous savons que f est uniformément continue et ceci nous donne $\eta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in [a, b]$ avec $|x - x'| \leq \eta$ on ait l'inégalité $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon/2$. Considérons maintenant une subdivision de pas $\leq \eta$ de $[a, b]$, i.e., choisissons un entier $p \geq 1$ et des réels $x_0, \dots, x_p$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b \quad \text{et} \quad x_{i+1} - x_i \leq \eta \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Par convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons pour un moment $n \geq N$ et $x \in [a, b]$. Notons $j \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Nos hypothèses de croissance donnent

$$f_n(x_j) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{j+1}) \quad \text{et} \quad f(x_j) \leq f(x) \leq f(x_{j+1}),$$

d'où l'on tire

$$f(x_j) - f_n(x_{j+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{j+1}) - f_n(x_j). \quad (7)$$

En remarquant que

$$|f(x_{j+1}) - f_n(x_j)| \leq |f(x_{j+1}) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_n(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et

$$|f(x_j) - f_n(x_{j+1})| \leq |f(x_j) - f(x_{j+1})| + |f(x_{j+1}) - f_n(x_{j+1})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

on en arrive (voir (7)) à $-\varepsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$. Nous venons d'établir que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui traduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $[a, b]$. ■

- Le 2ème théorème de Dini **n'est pas valable** si l'intervalle considéré **n'est pas fermé**. On reprend le même contre-exemple que pour le 1er théorème de Dini. Considérons pour chaque entier $n \geq 1$ la fonction continue $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := x^n \quad \text{pour tout } x \in [0, 1[.$$

Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est croissante sur $[0, 1[$, converge simplement vers la fonction nulle de $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue. Toutefois, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$ puisque

$$\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1.$$

Notre prochain résultat fera appel à la notion d'équicontinuité (qui sera au centre du théorème de Arzelà-Ascoli que vous rencontrerez plus tard).

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille non vide (i.e., $I \neq \emptyset$) de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_i)_{i \in I}$ est **équicontinue** sur A lorsque pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in I$, pour tout $x, y \in A$ avec $|x - y| \leq \eta$, on ait

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon.$$

- Bien sûr, si $(f_i)_{i \in I}$ est équicontinue sur A , alors pour chaque $j \in I$, la fonction f_j est uniformément continue sur A .
- Si A est un segment de $\mathbb{R}$ et si I est un singleton, il y a équivalence entre continuité sur A , uniforme continuité sur A et équicontinuité sur A .
- S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $i \in I$, la fonction f_i soit K -Lipschitz sur A , alors la famille $(f_i)_{i \in I}$ est équicontinue sur A .

Convergence uniforme sous hypothèse d'équicontinuité

On en arrive maintenant à notre résultat central en lien avec l'équicontinuité.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions équicontinues de $I := [a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse d'équicontinuité nous donne un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in I$ avec $|x - y| \leq \eta$ on ait

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

La convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f nous donne alors pour tout $x, y \in I$ avec $|x - y| \leq \eta$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

Par ailleurs, par précompacité de I , il existe un entier $p \geq 1$, $I_1, \dots, I_p$ des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides de diamètre $\leq \eta$ tels que $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^p I_k$.

Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, choisissons également $x_k \in I_k$. Une nouvelle utilisation de la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f nous donne l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (10)$$

Soit $x \in [a, b]$. Choisissons $k_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x \in I_{k_0}$, en particulier notons que $|x_{k_0} - x| \leq \eta$. Nous sommes maintenant en mesure de combiner (8), (9) et (10)

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_{k_0})| + |f_n(x_{k_0}) - f(x_{k_0})| + |f(x_{k_0}) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . ■

Théorème de Weierstrass

Théorème (Weierstrass)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, il existe une suite de fonctions polynomiales $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Séries de fonctions

Vocabulaire sur les séries de fonctions

Nous développons maintenant la notion de série de fonctions qui peut être vue comme un cas particulier des suites de fonctions.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons considérer la fonction $S_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

La suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **suite des sommes partielles** associée à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est d'usage de désigner la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\sum f_n$ que l'on appelle alors séries de fonctions (de terme général f_n).

Lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) vers une fonction $S : A \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que **la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement** (resp. **uniformément**) sur A . Si tel est le cas, la limite simple de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série de fonctions $\sum f_n$** et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, i.e.,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) := S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Propriété de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions

On a vu qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles converge uniformément **si et seulement si** elle vérifie la propriété de Cauchy uniforme : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p < q$, on ait $\sup_{x \in A} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$.

Ce résultat a pour conséquence immédiate :

Théorème

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Alors, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément **si et seulement si** pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p < q$ on ait

$$\left| \sum_{k=p+1}^q f_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'équivalence rappelée avant l'énoncé à la suite des sommes partielles associées à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Remarque : On dit parfois que la série de fonctions $\sum f_n$ satisfait le critère de Cauchy lorsque (11) a lieu.

On introduit ici un mode de convergence propre aux séries de fonctions.

Définition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées d'un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur A lorsque la série numérique (à termes positifs) $\sum \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est convergente.

L'intérêt principal de la convergence normale réside dans le résultat ci-dessous :

Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées d'un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A , alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A .

Démonstration. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur A . La suite des sommes partielles associée à la série numérique $\sum \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est donc de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $N \leq p < q$, on ait

$$\sum_{k=p+1}^q \sup_{x \in A} |f_k(x)| = \left| \sum_{k=p+1}^q \sup_{x \in A} |f_k(x)| \right| \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in A$, $|\sum_{k=p+1}^q f_k(x)| \leq \varepsilon$. On conclut à l'aide du théorème précédent.

Nous avons vu que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Une application directe de ce résultat aux séries de fonctions nous donne :

Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles continue en un même point $a \in A$. Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur A , alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a .

Démonstration. Supposons que $\sum f_n$ soit uniformément convergente sur A , i.e., la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A , où pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Cette fonction est continue en a puisque somme (finie) de fonctions continues en a . La limite uniforme de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est par définition la somme de la série $\sum f_n$ notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est alors continue en a d'après la proposition de la Slide 23. ■

Le théorème de la double limite pour les suites de fonctions nous permet de permuter le symbole $\sum$ avec le symbole $\lim$.

Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles dont la série converge uniformément sur A et $a \in \text{adh } A$. On suppose que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors, la série de fonctions $\sum \ell_n$ converge simplement sur A et

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x).$$

Démonstration. On considère la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $s_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \text{pour tout } x \in A$$

et on applique alors le théorème de la double limite (voir Slide 29) pour obtenir l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow a} s_n(x)).$$

Permutation série/intégrale de Riemann sur un segment

Une application directe du Théorème Slide 31 va nous permettre d'obtenir un premier résultat de permutation $\sum$ et $\int$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ Riemann-intégrables sur $[a, b]$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément. On a lieu :

- (a) La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
- (b) La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément vers F_∞ où pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la fonction $F_n, F_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

et où

$$F_\infty(x) := \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

- (c) On a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Nous concluons ce cours avec le théorème suivant relatif à la dérivation des séries de fonctions.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ à valeurs réelles de classe C^1 . On suppose :

- (i) La série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
- (ii) La série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$.

Alors, la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ et sa somme $\sum f_n$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ de dérivée $\sum f'_n$.