Eléments d'analyse numérique matricielle

Florent Nacry (florent.nacry@univ-perp.fr)

Université Perpignan Via Domitia

Laboratoire LAMPS (Campus principal, Bâtiment B, Etage 1)

Objectifs/Plan

- Réduction des matrices normales.
- Spectre d'une matrice hermitienne.
- Norme subordonnée et rayon spectral.
- Convergence matricielle.

Transconjugaison

Nous commençons par définir la notion de *transconjugaison* : un concept propre aux matrices complexes.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice **conjuguée** de A, i.e.,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

On appelle **transconjuguée** la matrice $A^\star := (\overline{A})^T$.

Remarquons tout de suite que $A^\star = \overline{A^T}$. Si A est réelle (i.e., si $A \in M_n(\mathbb{R})$), alors on a évidemment $A^\star = A^T$.

Propriétés de la transconjugaison

La proposition suivante liste les premières propriétés de la transconjugaison.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ont lieu :

(*a*) $(A^\star)^\star = A$;

(*b*) $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$ et $(AB)^\star = B^\star A^\star$;

(*c*) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

(*d*) $\mathrm{tr}(A^\star) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$;

(*e*) $\det(A^\star) = \overline{\det(A)}$;

(*f*) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star)$;

(*g*) $A \in GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $A^\star \in GL_n(\mathbb{C})$;

(*h*) Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $(A^{-1})^\star = (A^\star)^{-1}$;

(*i*) $\mathrm{sp}(A^\star) = \overline{\mathrm{sp}(A)}$.

La démonstration

$(a), (b), (c), (d)$ Immédiat.

(e) En revenant à l'expression du déterminant sous la forme d'une somme indexée sur le groupe symétrique (et en gardant à l'esprit que la signature d'une permutation est un réel) on voit tout de suite que $\det(A) = \det(\overline{A})$. Ceci et le fait qu'une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant permettent de conclure.

(f) On peut supposer $A \neq 0$. Notons $r = \mathrm{rg}(A) \geq 1$. Il existe Q, P deux matrices inversibles à coefficients complexes telles que $A = QJ_rP$ avec $J_r = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ où Id_r désigne l'identité de taille r. Il s'ensuit $\overline{A} = \overline{Q}J_r\overline{P}$. D'après (e), nous avons que $\overline{Q}$ et $\overline{P}$ sont inversibles, d'où l'on tire que $\overline{A}$ est de rang r. Ceci et le fait qu'une matrice et sa transposée ont même rang permettent de conclure.

(g) Conséquence directe de (e) ou (f).

(h) Conséquence immédiate de (b).

(i) Si μ est valeur propre de A, alors $\overline{\mu}$ est valeur propre de $\overline{A}$. Le résultat souhaité en découle.

Quelques classes fondamentales de matrices

La notion de transconjuguée est à la base des concepts ci-dessous. Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est :

(H) *hermitienne* lorsque $A = A^*$;

(U) *unitaire* lorsque $AA^* = A^*A = \mathrm{I}_n$;

(N) *normale* lorsque $AA^* = A^*A$;

(S) *symétrique* si A est réelle et $A = A^T$;

(O) *orthogonale* si A est réelle et $AA^T = A^TA = \mathrm{I}_n$.

Remarquons que toute matrice hermitienne (resp. unitaire) est normale.

Un théorème de réduction

Nous donnons maintenant un théorème fondamental de réduction. Ce théorème a été vu en deuxième année (au moins pour les matrices réelles) et est souvent énoncé sous la forme synthétique suivante : "toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée".

Théorème (de réduction des matrices normales)

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ont lieu :

(a) Il existe une matrice unitaire U telle que $U^\star AU = U^{-1}AU$ soit triangulaire.

(b) Si A est normale, il existe U unitaire telle que $U^\star AU = U^{-1}AU$ soit diagonale.

La démonstration

Afin de démontrer (a), on commence par établir le lemme ci-dessous :

Lemme

Soit $n \geq 2$ un entier. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire, $B \in \mathbb{C}^{n-1}$, $N \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$U^{\star}AU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & N \end{array}\right).$$

La démonstration

Afin de démontrer (a), on commence par établir le lemme ci-dessous :

Lemme

Soit $n \geq 2$ un entier. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire, $B \in \mathbb{C}^{n-1}$, $N \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$U^\star AU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & N \end{array}\right).$$

Démonstration. Fixons $A \in M_n(\mathbb{C})$. Notons λ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne/hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. On pose $X_1 := X/\|X\|$ qui évidemment unitaire. Par le procédé de Gram-Schmidt, on peut trouver $X_2, \ldots, X_n$ tels que $(X_1, \ldots, X_n)$ soit une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Notons $U \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice de colonnes $X_1, \ldots, X_n$. Cette matrice est unitaire (et donc d'inverse $U^\star$). Notons Y_1 la première colonne de $U^\star AU$. Il suffit d'observer que

$$Y_1 = U^\star AU(1,0,\ldots,0)^T = U^\star AX_1 = \lambda U^\star X_1 = \lambda U^\star U(1,0,\ldots,0)^T = (\lambda,0,\ldots,0)^T$$

pour conclure. ■

La démonstration - suite

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'assertion (a). Pour chaque entier $k \geq 1$, notons $\mathscr{P}(k)$: "pour tout $A \in M_k(\mathbb{C})$, il existe $U \in M_k(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^\star AU$ soit triangulaire supérieure".

Nous allons procéder par récurrence. Commençons par noter que $\mathscr{P}(1)$ est évidente. Fixons $k \geq 1$ un entier. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(k)$ ait lieu. Soit $A \in M_{k+1}(\mathbb{C})$. Par le lemme précédent, il existe $U \in M_{k+1}(\mathbb{C})$ unitaire, $B \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $N \in M_k(\mathbb{C})$ tels que

$$U^\star AU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & N \end{array}\right).$$

Par hypothèse de récurrence, on peut trouver $V \in M_k(\mathbb{C})$ unitaire et $T \in M_k(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $V^\star NV = T$. On introduit alors

$$W = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right)$$

qui satisfait évidemment

$$W^\star = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V^\star \end{array}\right).$$

Un calcul par blocs et le fait que V soit unitaire montrent que W est unitaire.

Suite et fin de la démonstration de (a)

On a

$$U^\star AU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & VTV^\star \end{array}\right).$$

Des produits en blocs montrent alors que $W^\star U^\star AUW$ est triangulaire supérieure. Puisque UW est unitaire (par produit), on a $(UW)^\star AUW$ triangulaire supérieure. Ceci termine la récurrence et la démonstration de (a).

La démonstration de (b)

Montrons maintenant l'assertion (*b*). Supposons que A soit normale, i.e., $A^\star A = AA^\star$. D'après (*a*), il existe U unitaire telle que $T := U^\star AU$ soit triangulaire supérieure. On vérifie tout de suite que

$$T^\star T = U^\star A^\star AU \quad \text{et} \quad TT^\star = U^\star AA^\star U,$$

en particulier T est normale. Puisque la matrice T est triangulaire supérieure, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left|t_{1,k}\right|^2 = (TT^\star)_{1,1} = (T^\star T)_{1,1} = \left|t_{1,1}\right|^2$$

d'où $t_{1,k} = 0$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$. De même, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \left|t_{2,k}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|t_{2,k}\right|^2 = (TT^\star)_{2,2} = (T^\star T)_{2,2} = \left|t_{2,2}\right|^2$$

et ceci montre que $t_{2,k} = 0$ pour tout $k \in \{3, \ldots, n\}$. On procède de même avec $(TT^\star)_{m,m}$ pour $m = 3, \ldots, n$ pour aboutir au fait que T est diagonale. ■

Spectre d'une matrice hermitienne

Nous allons maintenant exploiter le théorème de réduction des matrices normales pour l'étude du spectre des matrices hermitiennes.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Ont lieu :

(a) Les valeurs propres de A sont réelles.

(b) La plus petite valeur propre $\lambda_{\min}$ de A est donnée par

$$\lambda_{\min} = \min_{u \in M_{n,1}(\mathbb{C}), u^\star u = 1} u^\star A u.$$

(c) La plus grande valeur propre $\lambda_{\max}$ de A est donnée par

$$\lambda_{\max} = \max_{u \in M_{n,1}(\mathbb{C}), u^\star u = 1} u^\star A u.$$

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice hermitienne. D'après le théorème de réduction des matrices normales, il existe $U \in M_n(\mathbb{K})$ unitaire telle que $U^{-1}AU$ soit diagonale. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Evidemment, on a $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, , \lambda_n\}$. D'autre part, puisque U est unitaire et A est hermitienne, on a l'égalité

$$(U^{-1}AU)^\star = U^\star A^\star (U^{-1})^\star = U^{-1}AU.$$

On a donc pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_k = \overline{\lambda_k}$, i.e., $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

La démonstration de (b)

D'après le théorème de réduction des matrices normales, il existe une matrice U unitaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Tout de suite, notons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont exactement les valeurs propres de A. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$, i.e., pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|x\|^2 = x^* x$. Fixons $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\|v\| = 1$. Ecrivons $Uv = (w_1, \ldots, w_n)^T$ avec $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Il vient sans difficultés

$$v^* A v = (Uv)^\star \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Uv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|w_k\right|^2.$$

On en déduit

$$\lambda_{\min} \|Uv\|^2 \leq v^\star A v \leq \lambda_{\max} \|Uv\|^2.$$

Suite et fin de la démonstration de (b)

D'autre part, le caractère unitaire de U assure que $\|Uv\| = \|v\| = 1$. On aboutit donc à

$$\lambda_{\min} \leq v^\star A v \leq \lambda_{\max}.$$

Il reste à voir qu'un vecteur propre v_0 (resp. v_1) associé à $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) tel que $\|v_0\| = 1$ (resp. $\|v_1\| = 1$) satisfait $v_0^* A v_0 = \lambda_{\min}$ (resp. $v_1^* A v_1 = \lambda_{\max}$). ■

Commençons par définir la notion de matrice hermitienne positive/définie positive :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Lorsque A satisfait $u * Au \geq 0$ (resp. $u * Au > 0$) pour tout $u \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ (resp. pour tout $u \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$) on dit que A est **positive** (resp. **définie positive**).

Nous allons voir que ces deux concepts se caractérisent à travers le spectre de la matrice considérée :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Ont lieu :

(a) A est positive si et seulement si $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

(b) A est définie positive si et seulement si $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(*a*) L'implication $\Rightarrow$ résulte du fait que la plus petite valeur propre de A satisfait

$$\lambda_{\min} = \min_{u \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\, u^\star u = 1} u^\star A u.$$

$\Leftarrow$, Supposons que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de réduction des matrices normales, on peut trouver $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Nécessairement, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de A et donc des réels positifs. Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on voit facilement avec $w := Uv$ que $v^* A v = w^* D w \geq 0$. Ceci nous dit que A est positive.

Démonstration de (b)

La démonstration de (b) est analogue à (a). Nous la détaillons ici pour le confort du lecteur.

(b) L'implication $\Rightarrow$ résulte du fait que la plus petite valeur propre de A satisfait

$$\lambda_{\text{min}} = \min_{u \in M_{n,1}(\mathbb{C}), u^\star u = 1} u^\star A u.$$

$\Leftarrow$, Supposons que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de réduction des matrices normales, on peut trouver $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Nécessairement, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de A et donc des réels strictement positifs. Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $v \neq 0$, on voit facilement avec $w := Uv$ que $v^* A v = w^* D w > 0$. Ceci nous dit que A est définie positive.

Valeurs singulières

Etant donnés un entier $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$, il est clair que la matrice $B := A^* A$ est hermitienne positive, en particulier $\mathrm{sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

Valeurs singulières

La racine carrée de toute valeur propre de B est appelée **valeur singulière** de A.

Norme subordonnée

L'étude numérique des systèmes linéaires fera intervenir le concept de norme surbordonnée.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$. La fonction $\mathscr{N}_{\|\cdot\|} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A) := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \text{pour tout } A \in M_n(\mathbb{K})$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Ceci découle du fait que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$. ∎

L'étude numérique des systèmes linéaires fera intervenir le concept de norme surbordonnée.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$. La fonction $\mathscr{N}_{\|\cdot\|} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A) := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \text{pour tout } A \in M_n(\mathbb{K})$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Ceci découle du fait que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$. ■

On donne un nom à cette norme :

Définition

La norme $\mathscr{N}_{\|\cdot\|}$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est appelée la **norme surbordonnée** à la norme $\|\cdot\|$.

Premières propriétés

Nous donnons ici les premières propriétés de la norme subordonnée. Notons que (*b*) ci-dessous donne des définitions alternatives tandis que (*c*) et (*d*) fournissent deux inégalités fondamentales.

Premières propriétés

Nous donnons ici les premières propriétés de la norme subordonnée. Notons que (*b*) ci-dessous donne des définitions alternatives tandis que (*c*) et (*d*) fournissent deux inégalités fondamentales.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes ont lieu:

(*a*) On a $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(I_n) = 1$.

(*b*) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\left\{\kappa \geq 0 : \forall x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \|Ax\| \leq \kappa \|x\|\right\}.$$

(*c*) Pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\|Ax\| \leq \mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A) \|x\|.$$

(*d*) Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(AB) \leq \mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A)\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(B).$$

La démonstration

L’assertion (*a*) étant immédiate, commençons par établir (*b*).

La démonstration

L'assertion (*a*) étant immédiate, commençons par établir (*b*). Montrons la première égalité. Observons que

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| .$$

La démonstration

L'assertion (*a*) étant immédiate, commençons par établir (*b*). Montrons la première égalité. Observons que

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| .$$

Le fait que $M_{1,n}(\mathbb{K})$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ entraîne que $\mathbb{B} := \left\{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : \|X\| \leq 1\right\}$ est $\|\cdot\|$-compacte. D'autre part, notons que la fonction $\varphi : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \|Ax\| \quad \text{pour tout } x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

est continue. Il résulte de tout ceci qu'il existe $x_0 \in \mathbb{B}$ satisfaisant

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|Ax_0\| .$$

L'assertion (*a*) étant immédiate, commençons par établir (*b*). Montrons la première égalité. Observons que

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Le fait que $M_{1,n}(\mathbb{K})$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ entraîne que $\mathbb{B} := \left\{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : \|X\| \leq 1\right\}$ est $\|\cdot\|$-compacte. D'autre part, notons que la fonction $\varphi : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \|Ax\| \quad \text{pour tout } x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

est continue. Il résulte de tout ceci qu'il existe $x_0 \in \mathbb{B}$ satisfaisant

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|Ax_0\|.$$

Si $x_0 = 0$, l'inégalité souhaitée est évidente. Supposons donc $x_0 \neq 0$ et posons $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ qui est évidemment un vecteur unitaire, i.e., $\|y_0\| = 1$. Il reste à voir que

$$\frac{1}{\|x_0\|} \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|Ay_0\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

pour aboutir à

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|x_0\| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

La démonstration : suite et fin

Justifions maintenant la deuxième égalité. On remarque tout d'abord que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

La démonstration : suite et fin

Justifions maintenant la deuxième égalité. On remarque tout d'abord que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Pour obtenir l'inégalité renversée, il suffit de fixer $x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\|x\| = 1$ et de noter que

$$\|Ax\| = \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{u\neq 0} \left\| A\frac{u}{\|u\|} \right\| .$$

Justifions maintenant la deuxième égalité. On remarque tout d'abord que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Pour obtenir l'inégalité renversée, il suffit de fixer $x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\|x\| = 1$ et de noter que

$$\|Ax\| = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{u\neq 0} \left\| A \frac{u}{\|u\|} \right\| .$$

Concentrons-nous désormais sur la dernière égalité. Notons $\alpha = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ et $\beta = \inf \Omega$ où Ω désigne l'ensemble $\Omega = \left\{ \kappa \geq 0 : \forall x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \|Ax\| \leq \kappa \|x\| \right\}$. L'inégalité $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$ valide pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $x \neq 0$ nous donne immédiatement $\beta \leq \alpha$. Montrons l'inégalité renversée. Fixons $\kappa_0 \in \Omega$. On a évidemment $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \kappa_0$ pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $x \neq 0$ et ceci nous dit que $\alpha \leq \kappa_0$. Un passage à la borne inférieure sur Ω donne alors $\alpha \leq \beta$. Ceci termine la preuve de (*b*).

Justifions maintenant la deuxième égalité. On remarque tout d'abord que

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup_{x\neq 0}\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|\leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

Pour obtenir l'inégalité renversée, il suffit de fixer $x\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\|x\|=1$ et de noter que

$$\|Ax\|=\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|\leq\sup_{u\neq 0}\left\|A\frac{u}{\|u\|}\right\|.$$

Concentrons-nous désormais sur la dernière égalité. Notons $\alpha=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ et $\beta=\inf\Omega$ où Ω désigne l'ensemble $\Omega=\left\{\kappa\geq 0 : \forall x\in M_{n,1}(\mathbb{K}), \|Ax\|\leq\kappa\|x\|\right\}$. L'inégalité $\|Ax\|\leq\alpha\|x\|$ valide pour tout $x\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $x\neq 0$ nous donne immédiatement $\beta\leq\alpha$. Montrons l'inégalité renversée. Fixons $\kappa_0\in\Omega$. On a évidemment $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leq\kappa_0$ pour tout $x\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $x\neq 0$ et ceci nous dit que $\alpha\leq\kappa_0$. Un passage à la borne inférieure sur Ω donne alors $\alpha\leq\beta$. Ceci termine la preuve de (b).

(c) Conséquence directe de (b).

(d) Il suffit d'écrire que pour tout $x\in M_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\|(AB)x\|=\|A(Bx)\|\leq\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A)\|Bx\|\leq\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A)\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(B)\|x\|.$$

La preuve est ainsi terminée. ∎

Norme matricielle

La propriété (*d*) de la proposition précédente conduit à introduire la notion de norme matricielle.

Norme matricielle

La propriété (d) de la proposition précédente conduit à introduire la notion de norme matricielle.

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et N une norme sur $M_n(\mathbb{K})$. On dit que $N(\cdot)$ est une **norme matricielle** lorsque

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \quad \text{pour tout } A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Norme matricielle

La propriété (d) de la proposition précédente conduit à introduire la notion de norme matricielle.

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et N une norme sur $M_n(\mathbb{K})$. On dit que $N(\cdot)$ est une **norme matricielle** lorsque

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \quad \text{pour tout } A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Attention au vocabulaire : une norme matricielle n'est pas simplement une norme définie sur un espace de matrices !

On a vu qu'une norme subordonnée est toujours une norme matricielle. La réciproque est fausse : il existe des normes matricielles qui ne sont subordonnées à aucune norme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le résultat suivant fournit un calcul explicite des normes subordonnées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Alors, on a

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_1}(A) = \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}|,$$

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(A) = \sqrt{\rho(A^\star A)} = \sqrt{\rho(AA^\star)}$$

et

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \max_{1 \leq p \leq n} \sum_{q=1}^{n} |a_{pq}|.$$

Commençons par observer que pour chaque $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$\|Av\|_1 = \sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{q=1}^{n} a_{pq} v_q \right| \leq \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |a_{pq}| \, |v_q| = \sum_{q=1}^{n} |v_q| \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \leq \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \, \|v\|_1 \, .$$

Il découle de ceci

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_1}(A) \leq \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \, .$$

La démonstration : norme subordonnée à la norme 1

Commençons par observer que pour chaque $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$\|Av\|_1 = \sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{q=1}^{n} a_{pq} v_q \right| \leq \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |a_{pq}| \, |v_q| = \sum_{q=1}^{n} |v_q| \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \leq \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \, \|v\|_1 \, .$$

Il découle de ceci

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_1}(A) \leq \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \, .$$

Pour établir l'égalité, il suffit de construire un vecteur $u \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\|u\|_1 = 1$ et tel que $\|Au\|_1 = \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}|$. Choisissons $q_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| = \sum_{p=1}^{n} |a_{pq_0}|$ et notons $u \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la q_0-ème égale à 1. Il reste à voir que $\|u\|_1 = 1$ et $\|Au_0\|_1 = \sum_{p=1}^{n} |a_{pq_0}|$ pour conclure que

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_1}(A) = \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{p=1}^{n} |a_{pq}| \, .$$

Pour chaque $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\|Av\|_\infty = \max_{1\leq p\leq n}\left|\sum_{q=1}^{n} a_{pq}v_q\right| \leq \max_{1\leq p\leq n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}v_q| \leq \|v\|_\infty \max_{1\leq p\leq n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|$$

et ceci entraîne

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_\infty}(A) \leq \max_{1\leq p\leq n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}| =: M.$$

La démonstration : norme subordonnée à la norme ∞

Pour chaque $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\|Av\|_\infty = \max_{1\le p\le n}\left|\sum_{q=1}^{n} a_{pq}v_q\right| \le \max_{1\le p\le n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}v_q| \le \|v\|_\infty \max_{1\le p\le n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|$$

et ceci entraîne

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_\infty}(A) \le \max_{1\le p\le n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}| =: M.$$

Choisissons $p_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $M = \sum_{q=1}^{n}|a_{p_0q}|$ et posons

$$u_q = \begin{cases} \frac{\overline{a_{p_0q}}}{|a_{p_0q}|} & \text{si } a_{p_0q} \neq 0, \\ 1 & \text{si } a_{p_0q} = 0. \end{cases} \quad \text{pour chaque } q \in \{1,\ldots,n\}.$$

On vérifie immédiatement que $u = (u_1,\ldots,u_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ satisfait $\|u\|_\infty = 1$ et

$$M \ge \max_{1\le p\le n}\left|\sum_{q=1}^{n} a_{pq}u_q\right| = \|Au\|_\infty \ge \left|\sum_{1\le q\le n,\, a_{p_0q}\neq 0} a_{p_0q}\frac{\overline{a_{p_0q}}}{|a_{p_0q}|}\right| = \sum_{q=1}^{n}|a_{p_0q}| = M.$$

En particulier $\|Au\|_\infty = \max_{1\le p\le n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|$. Il s'ensuit que $\mathscr{N}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = M$.

Montrons maintenant l'égalité relative à la norme 2. Notons tout d'abord que

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(A)^2 = \sup_{\|v\|_2=1} \|Av\|_2^2 = \sup_{\|v\|_2=1} v^\star(A^\star A)v = \rho(A^\star A),$$

où la dernière égalité résulte du caractère hermitien de $A^* A$. Il reste à établir que $\rho(A^\star A) = \rho(AA^\star)$. Supposons en premier lieu que $\rho(A^\star A) > 0$. Il existe alors $p \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$p \neq 0 \quad \text{et} \quad \left(A^\star A\right)p = \rho(A^\star A)p.$$

Notons que ceci donne en particulier $Ap \neq 0$. Les égalités

$$[A(A^\star A)]p = A[(A^\star A)p] = \rho(A^\star A)(Ap)$$

montrent alors que Ap est un vecteur propre de $AA^\star$ de valeur propre associée $\rho(A^\star A)$. Il s'ensuit que $\rho(A^\star A) \leq \rho(AA^\star)$. Cette dernière inégalité combinée au fait que $(A^\star)^\star = A$ nous assure de l'égalité $\rho(A^\star A) = \rho(AA^\star)$. Supposons maintenant que $\rho(A^\star A) = 0$. Si $\rho(AA^\star) > 0$, nous pouvons appliquer le raisonnement développé ci-dessus pour obtenir la contradiction $\rho(A^\star A) \geq \rho(AA^\star) > 0$. On doit donc avoir $\rho(AA^\star) = 0$. ∎

Quelques compléments sur $\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}$

On énonce ici quelques propriétés supplémentaires concernant $\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}$.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Alors, la norme $\mathscr{N}_{\|\cdot\|^2}(\cdot)$ est invariante par transformation unitaire, i.e., pour tout $U \in M_n(\mathbb{C})$ avec $UU^\star = \mathrm{I}_n$, on a

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|^2}(A) = \mathscr{N}_{\|\cdot\|^2}(AU) = \mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(UA) = \mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(U^\star AU).$$

Par ailleurs, si la matrice A est normale (i.e., $AA^\star = A^\star A$) alors

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(A) = \rho(A).$$

L'invariance de $\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(\cdot)$ par transformation unitaire s'obtient directement à travers les égalités valides pour chaque $U \in M_n(\mathbb{C})$ avec $UU^\star = \mathrm{I}_n$,

$$\rho(U^\star A^\star AU) = \rho(A^\star A) = \rho(A^\star U^\star UA) = \rho(U^\star A^\star UU^\star AU).$$

Supposons maintenant que A soit normale. D'après le théorème de réduction des matrices normales, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^\star.$$

Evidemment, les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont exactement les valeurs propres de A. Notons D la matrice diagonale ci-dessus, i.e., $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et observons que

$$A^\star A = UD^\star U^\star UDU^\star = UD^\star DU^\star.$$

On conclut alors que

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|_2}(A)^2 = \rho(A^\star A) = \rho(D^\star D) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|^2 = \rho(A)^2.$$

L'égalité voulue est établie. La preuve est complète.

Grâce au théorème précédent, on connaît des matrices A et des normes $\|\cdot\|$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A) = \rho(A).$$

Toutefois, il existe des matrices pour lesquelles on ne pourra jamais avoir $N(A) = \rho(A)$ et ceci quelque soit la norme $N(\cdot)$ sur $M_n(\mathbb{C})$ (subordonnée ou non). Il suffit en effet de considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui satisfait $\rho(A) = 0 < N(A)$.

Norme subordonnée et rayon spectral

En dépît de ce dernier constat, on va montrer que pour une matrice A donnée, on peut toujours approcher $\rho(A)$ d'aussi près que l'on veut par valeurs supérieures à l'aide d'une norme matricielle adaptée.

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier. Les assertions suivantes ont lieu :

(a) Pour toute norme matricielle $N(\cdot)$ sur $M_n(\mathbb{C})$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.

(b) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

La démonstration de (a)

(a) Si $\rho(A) = 0$, il n'y a rien à établir. Supposons $\rho(A) > 0$. Il existe $p \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $p \neq 0$ tel que

$$Ap = \lambda p \quad \text{et} \quad |\lambda| = \rho(A).$$

Fixons $q \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $pq^T \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$. Le caractère matriciel de la norme $N(\cdot)$ permet d'écrire

$$\rho(A)N(pq^T) = N(\lambda pq^T) = N(Apq^T) \leq N(A)N(pq^T)$$

et ceci justifie l'inégalité souhaitée.

La démonstration de (b)

(b) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $U^{-1}AU$ est triangulaire supérieure. Il existe alors deux familles $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(t_{k,l})_{1 \leq k < l \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telles que

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Fixons $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\max\limits_{1 \leq p \leq n} \sum\limits_{q=p+1}^{n} \left|\delta^{q-p} t_{pq}\right| \leq \varepsilon$ et posons

$$D_\delta = \operatorname{diag}(1, \delta^2, \ldots, \delta^{n-1}).$$

La démonstration de (b) - suite

On vérifie que

$$D_\delta^{-1}(U^{-1}AU)D_\delta = (UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \dots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{n-2} t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'autre part, il est clair que la fonction $n : M_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$n(v) = \left\|(UD_\delta)^{-1} v\right\|_\infty \quad \text{pour tout } v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$$

est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Notons $N(\cdot)$ sa norme subordonnée et observons que pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$N(B) = \sup_{n(v)=1} n(Bv) = \sup_{\|(UD_\delta)^{-1}v\|_\infty=1} \left\|(UD_\delta)^{-1} Bv\right\|_\infty = \sup_{\|w\|_\infty=1} \left\|(UD_\delta)^{-1} B(UD_\delta)w\right\|_\infty .$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\|w\|_\infty=1} \left\|(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta)w\right\|_\infty &= \mathscr{N}_{\|\cdot\|_\infty}((UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta)) \\
&= \max_{1\le p\le n} |\lambda_p| + \sum_{q=p+1}^{n} \left|\delta^{q-p}t_{pq}\right| \\
&\le \rho(A) + \max_{1\le p\le n} \sum_{q=p+1}^{n} \left|\delta^{q-p}t_{pq}\right| \\
&\le \rho(A) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du choix de δ. Ceci termine la preuve. ■

Une remarque fondamentale sur la convergence matricielle

Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $M_{p,q}(\mathbb{K})$, où $p, q \geq 1$ sont deux entiers fixés. Ecrivons pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k := \begin{pmatrix} a_{11}(k) & \cdots & a_{1q}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}(k) & \cdots & a_{pq}(k) \end{pmatrix}$$

et notons alors que pour le choix de la norme N sur $M_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$N(A) = \sup_{(m,n)\in\{1,\dots,p\}\times\{1,\dots,q\}} |a_{m,n}| \quad \text{pour tout } A \in M_{p,q}(\mathbb{K}),$$

on a que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $M_{p,q}(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout $(m, n) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$, la suite $(a_{mn}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers un $l_{mn} \in \mathbb{K}$.

Si tel est le cas, on a

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{p1} & \cdots & l_{pq} \end{pmatrix}.$$

Bien sûr, l'équivalence des normes sur $M_{p,q}(\mathbb{K})$ entraîne que la condition nécessaire et suffisante ci-dessus ne dépend pas du choix de la norme.

Convergence de suites géométriques matricielles

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite formée par les puissances successives d'une matrice converge vers 0.

Théorème

Soient $n \geq 1$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$. Sont équivalentes :

(a) $\lim_{k \to \infty} B^k = 0$;

(b) Pour tout $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\lim_{k \to \infty} B^k v = 0$;

(c) $\rho(B) < 1$;

(d) Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(B) < 1$.

La preuve

$(a) \Rightarrow (b)$, Supposons que $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$. Fixons $v \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $N(\cdot)$ sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Il suffit d'observer que l'inégalité

$$\left\|B^k v\right\| \leq N(B^k)\,\|v\|$$

donne la convergence vers 0 de $(B^k v)_{k\geq 1}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supposons que pour chaque $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\lim_{k\to\infty} B^k v = 0$. Par l'absurde, supposons que $\rho(B) \geq 1$. Il existe alors $p \in \mathbb{C}^n$ avec $p \neq 0$ tel que

$$Bp = \lambda p \quad \text{et} \quad |\lambda| \geq 1.$$

Il s'ensuit que la suite $(B^k p)_{k\geq 1}$ ne converge pas vers 0 ce qui est contradictoire.

$(c) \Rightarrow (d)$ C'est une conséquence directe de l'existence d'une norme $\|\cdot\|$ sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(B) \leq \rho(B) + \varepsilon.$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Découle du fait qu'une norme $N(\cdot)$ sur $M_n(\mathbb{C})$ qui est matricielle satisfait

$$N(B^k) \leq N(B)^k \quad \text{pour tout}\ k \geq 1.$$

Rayon spectral et convergence

Le résultat suivant se retrouve notamment lors de l'étude de la rapidité de convergence des suites engendrées par des méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $N(\cdot)$ une norme matricielle quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$. Alors, on a

$$\lim_{k \to \infty} N(B^k)^{1/k} = \rho(B).$$

La démonstration

Fixons $k \geq 1$ un entier. Observons tout d'abord que $\rho(B)^k = \rho(B^k)$. En appliquant l'un des résultats précédents du cours à B^k, on obtient tout de suite que $\rho(B^k) \leq N(B^k)$. Il vient alors

$$\rho(B) = \rho(B^k)^{1/k} \leq N(B^k)^{1/k}. \tag{1}$$

Maintenant, fixons un réel $\varepsilon > 0$. On vérifie que la matrice $C = \frac{1}{\rho(B)+\varepsilon} B$ a un rayon spectral strictement inférieur à 1, i.e., $\rho(C) < 1$. Le théorème précédent nous dit alors que $\lim_{l \to \infty} C^l = 0$. On déduit de ceci qu'il existe un entier $l \geq 1$ (qui dépend de ε) tel que pour tout entier $m \geq l$,

$$N(C^m) = \frac{N(B^m)}{(\rho(B) + \varepsilon)^m} \leq 1. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on aboutit à

$$\rho(B) \leq N(B^m)^{1/m} \leq \rho(B) + \varepsilon \quad \text{pour tout } m \geq l.$$

Ceci termine la preuve.

On s'intéresse ici à l'inversibilité (ou à la non-inversibilité) de perturbations de l'identité :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $\|\cdot\|$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Ont lieu :

(*a*) Si $\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(B) < 1$, alors la matrice $(\mathrm{I}_n + B)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{C})$ et

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|}[(\mathrm{I}_n + B)^{-1}] \leq \frac{1}{1 - \mathscr{N}_{\|\cdot\|}(B)}.$$

(*b*) Si $(\mathrm{I}_n + B)$ est singulière (i.e., n'est pas inversible dans $M_n(\mathbb{C})$), alors pour toute norme matricielle $N(\cdot)$ sur $M_n(\mathbb{C})$

$$N(B) \geq 1.$$

(a) Supposons $\mathscr{N}_{\|\cdot\|}(B) < 1$. Soit $u \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(\mathrm{I}_n + B)(u) = 0$. Si $u \neq 0$, on a tout de suite une contradiction puisque

$$\|u\| = \|Bu\| \leq \mathscr{N}_{\|\cdot\|}(B)\,\|u\| < \|u\|\,.$$

Ainsi, on a nécessairement $u = 0$ et ceci montre que $\mathrm{I}_n + B$ est inversible dans $M_n(\mathbb{C})$. L'inégalité désirée s'obtient en observant que

$$(\mathrm{I}_n + B)^{-1} = \mathrm{I}_n - B(\mathrm{I}_n + B)^{-1}.$$

(b) Si $(\mathrm{I}_n + B)$ est singulière, alors -1 est valeur propre de B et l'un des théorèmes du cours nous dit alors que pour toute norme matricielle $N(\cdot)$ sur $M_n(\mathbb{C})$

$$N(B) \geq \rho(B) \geq 1.$$

La preuve est terminée.