

Tribu de parties d'un ensemble

Exercice 1 Soit X un ensemble non vide. Etablir les résultats suivants :

1. La classe de parties $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ est une tribu sur X .
2. La classe de parties $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X .
3. Soit A une partie de X . La classe de parties $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion $\subset$) contenant A .
4. Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur X et A une partie non vide de X . Alors, la classe $\{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur A .
5. Montrer que l'ensemble des parties A de X telles que A est dénombrable ou $X \setminus A$ est dénombrable est une tribu sur X .

Solution. Les points 1, 2, 3 et 4 sont immédiats.

5. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties A de X telles que A est dénombrable ou $X \setminus A$ est dénombrable. Montrons que $\mathcal{T}$ satisfait les points (i), (ii) et (iii) de la définition d'une tribu.

(i) Puisque $\emptyset$ est dénombrable, on a $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{T}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ a son complémentaire dans X qui est dénombrable puisque $A = X \setminus (X \setminus A)$. Ceci montre l'inclusion $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

(iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est dénombrable, alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable (en tant que réunion dénombrable d'ensembles dénombrables). Si ce n'est pas le cas, nous pouvons trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que A_N ne soit pas dénombrable. En écrivant

$$X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) \subset X \setminus A_N$$

et en gardant à l'esprit que $X \setminus A_N$ est dénombrable (car $A_N \in \mathcal{T}$ et A_N n'est pas dénombrable) nous voyons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ a son complémentaire dans X dénombrable, en particulier $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. On conclut que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X . ■

Exercice 2 Soit X un ensemble infini. La classe des parties finies de X est-elle une tribu sur X ?

Solution. Non, car le complémentaire d'une partie finie de X est une partie infinie de X . ■

Exercice 3 On note $\mathcal{P}_f$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$. La classe de parties

$$\mathcal{T} := \mathcal{P}_f \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{P}_f\}$$

est-elle une tribu sur $\mathbb{R}$?

Solution. Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$ puisque $\mathbb{N}$ est l'union dénombrable de singletons de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, il est clair que $\mathbb{N}$ n'est pas un élément de $\mathcal{T}$. ■

Exercice 4 Soient X un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une classe de parties de X stable par complémentaires et par intersections finies. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i.e., $B_p \cap B_q = \emptyset$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \neq q$) telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Solution. Posons $B_0 := A_0 \in \mathcal{A}$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$B_n = A_n \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} (X \setminus A_k) = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}.$$

Il est clair que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrons l'inclusion renversée. Fixons $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Observons que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ est non vide et notons m son plus petit élément (on rappelle que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). Si $m = 0$, alors on a $x \in A_0 = B_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Dans le cas contraire, $m > 0$ et on doit avoir $x \in A_m$ et $x \in \bigcap_{k=0}^{m-1} (X \setminus A_k)$, i.e., $x \in B_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. L'égalité $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est donc établie. Il reste à voir que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints : il suffit pour cela d'écrire pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p < q$

$$B_p \cap B_q \subset A_p \cap \bigcap_{k=0}^{q-1} (X \setminus A_k) \subset A_p \cap (X \setminus A_p) = \emptyset.$$

L'exercice est terminé. ■

Exercice 5 Soit $\mathcal{A}$ une classe non vide de parties d'un ensemble non vide X . Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X si et seulement si les trois conditions suivantes ont lieu :

- (i) $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire, i.e., pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (ii) $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, i.e., pour tout $m \geq 2$ entier et pour tout $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^m A_k \in \mathcal{A}$;
- (iii) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe, i.e., pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ avec $A_p \cap A_q = \emptyset$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ distincts, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Solution. $\Rightarrow$, Supposons que $\mathcal{A}$ soit une tribu sur X . Par définition d'une tribu, on dispose tout de suite de (i) et (iii). Par ailleurs, nous savons via l'un des exercices ci-dessus que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable (en particulier, finie).

$\Leftarrow$, Supposons que (i), (ii) et (iii) aient lieu. Pour $A_0 \in \mathcal{A}$, nous avons (par application de (i) et (iii)) $X = A_0 \cup (X \setminus A_0) \in \mathcal{A}$. Il reste à vérifier que $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. D'après l'un des exercices ci-dessus, nous savons (grâce à (i) et (ii)) qu'il existe $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints vérifiant

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Il suffit alors d'exploiter (iii) pour obtenir que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ et ainsi conclure que $\mathcal{A}$ est bien stable par réunion dénombrable. ■

Exercice 6 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles non vides.

1. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y , alors

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu sur X .

2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X , alors

$$\{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur Y .

3. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X , la classe de parties $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ de Y est-elle nécessairement une tribu sur Y ?

Solution. Les questions 1. et 2. découlent sans difficultés des trois observations suivantes :

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- Pour tout $B \subset Y$, on a $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$;
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Y , on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Concernant 3., on peut remarquer que si f désigne la fonction nulle de $X = \mathbb{R}$ dans $Y = \mathbb{R}$ et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, alors la classe de parties $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{\emptyset, \{0\}\}$ n'est pas une tribu sur $Y = \mathbb{R}$. ■

Exercice 7 Pour chaque partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A := \{-a : a \in A\}$. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{T} : A = -A\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $f^{-1}(T) \in \mathcal{T}$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ (ce qui est le cas par exemple si $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$). Déterminer la tribu image réciproque de $\mathcal{T}$ par la fonction f .

Solution.

1. Montrons que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ en vérifiant les points (i), (ii) et (iii) de la définition d'une tribu.
 - (i) On a bien sûr $\emptyset \in \mathcal{S}$.
 - (ii) Pour $A \in \mathcal{S}$, on a $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{T}$ ainsi que

$$-(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus (-A) = \mathbb{R} \setminus A.$$

Ceci justifie la stabilité de $\mathcal{S}$ par complémentaires.

- (iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$. On a évidemment $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ et

$$-\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{S}$ est stable par unions dénombrables.

2. On a $f^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{S}$. En effet, l'inclusion $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}$ est évidente (par hypothèse et compte-tenu de la parité de la fonction carrée) tandis que l'inclusion renversée s'obtient en remarquant que pour tout $A \in \mathcal{S}$, on a avec $B := \{x^2 : x \in A_0\}$

$$f^{-1}(B) = A_0.$$

■

Exercice 8 Soit X un ensemble non vide. Déterminer la tribu sur X engendrée par les singletons de l'ensemble X .

Solution. Soit X un ensemble non vide. On note $\mathcal{T}$ la tribu de X engendrée par les singletons de X , i.e., $\mathcal{T} := \sigma(\{\{x\} : x \in X\})$ et $\mathcal{C}$ la classe de parties de X dénombrables ou de complémentaires dénombrables. On a vu que $\mathcal{C}$ est une tribu sur X . Cette tribu contenant évidemment les singletons de X (qui sont des ensembles dénombrables) on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$. Soit D une partie de X . Si D est dénombrable, l'égalité $D = \bigcup_{x \in D} \{x\}$ montre que D est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, en particulier $D \in \mathcal{T}$. Si D est de complémentaire dénombrable, alors $X \setminus D$ est également réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, d'où $D \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ puis $\mathcal{C} = \mathcal{T}$. ■

Exercice 9 Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble non vide X . Montrer que si $\mathcal{T}$ contient les singletons de X , alors $\mathcal{T}$ contient toutes les parties dénombrables de X . En déduire que $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Solution. Supposons que $\mathcal{T}$ contienne tous les singletons de X . Soit D une partie dénombrable. L'égalité évidente

$$D = \bigcup_{x \in D} \{x\}$$

combinée à la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{T}$ nous dit alors que D est un élément de $\mathcal{T}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, ce qui précède nous dit que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Exercice 10 Déterminer la tribu borélienne de l'espace topologique $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par la topologie naturelle de $\mathbb{R}$.

Solution. On a tout de suite $\mathcal{B}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Le caractère dénombrable de $\mathbb{Q}$ entraîne la dénombrabilité de A . Ceci et le fait que tout singleton de $\mathbb{Q}$ est fermé dans $\mathbb{Q}$ nous dit que A est l'union dénombrable de boréliens de $\mathbb{Q}$. On conclut que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{Q})$. ■

Exercice 11 Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Déterminer la tribu engendrée par les fermés de $(X, \mathcal{O})$.

Solution. Soit F un fermé de $(X, \mathcal{O})$. On a sans difficultés $X \setminus F \in \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(X)$. Le fait que $\mathcal{B}(X)$ soit stable par complémentaires nous dit que $F \in \mathcal{B}(X)$. Il s'ensuit $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(X)$. Montrons l'inclusion renversée. Soit U un ouvert de $(X, \mathcal{O})$, i.e., $U \in \mathcal{O}$. On a $X \setminus U \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$. Puisque $\sigma(\mathcal{F})$ est stable par complémentaires, on a $U \in \sigma(\mathcal{F})$ et ceci montre que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$. On conclut que $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F})$. ■

Exercice 12 Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux tribus sur un ensemble non vide X . Montrer que

$$\sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \sigma(\{T_1 \cup T_2 : T_1 \in \mathcal{T}_1, T_2 \in \mathcal{T}_2\}) = \sigma(\{T_1 \cap T_2 : T_1 \in \mathcal{T}_1, T_2 \in \mathcal{T}_2\}).$$

Solution. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, on a (puisque $\emptyset, X \in \mathcal{T}_i$)

$$\mathcal{T}_i \subset \{T_1 \cup T_2 : T_1 \in \mathcal{T}_1, T_2 \in \mathcal{T}_2\} =: \mathcal{U}$$

et

$$\mathcal{T}_i \subset \{T_1 \cap T_2 : T_1 \in \mathcal{T}_1, T_2 \in \mathcal{T}_2\} =: \mathcal{I}.$$

Il s'ensuit $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subset \sigma(\mathcal{U})$ et $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subset \sigma(\mathcal{I})$. Il découle de ceci

$$\sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \subset \sigma(\mathcal{U}) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \subset \sigma(\mathcal{I}).$$

D'autre part, on a pour tout $T_1 \in \mathcal{T}_1$

$$T_1 \in \sigma(\mathcal{T}_1) \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$$

et de même pour tout $T_2 \in \mathcal{T}_2$

$$T_2 \in \sigma(\mathcal{T}_2) \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2).$$

Le fait que $\sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$ soit une tribu sur X donne alors $\mathcal{U} \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$ et $\mathcal{I} \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. On en déduit

$$\sigma(\mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2).$$

On conclut que $\sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{I})$. ■

Exercice 13 Soit X un ensemble non vide. On suppose que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ avec I ensemble non vide et $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in I$ distincts.

1. Montrer que la classe de parties $\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{j \in J} X_j : J \subset I \right\}$ est une tribu sur X .
2. Montrer que si l'ensemble I est dénombrable, alors la classe de parties

$$\mathcal{C} := \{X_i : i \in I\}$$

engendre la tribu $\mathcal{T}$, autrement dit $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$.

Solution.

1. Montrons que $\mathcal{T}$ satisfait (i), (ii) et (iii) de la définition d'une tribu.
 - (i) Il est clair que $\emptyset \in \mathcal{T}$ (une réunion indexée sur l'ensemble $\emptyset$ est $\emptyset$).
 - (ii) Soit $A \in \mathcal{T}$. Il existe $J_A \subset I$ tel que $A = \bigcup_{j \in J_A} X_j$. Il vient alors

$$X \setminus A = \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in J_A} X_j \right) = \bigcup_{i \in I \setminus J_A} X_i \in \mathcal{T}.$$

(iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la définition de A_n nous donne un ensemble $J_n \subset I$ tel que $A_n = \bigcup_{i \in J_n} X_i$. En posant $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \subset I$ nous voyons sans difficultés

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{j \in J} X_j \in \mathcal{T}.$$

On conclut que $\mathcal{T}$ est bien une tribu sur X .

2. On suppose dans cette question que l'ensemble I est dénombrable. Notons que la tribu $\mathcal{T}$ contient la classe $\{X_i : i \in I\}$ puisque

$$X_i = \bigcup_{j \in \{i\}} X_j \quad \text{pour tout } i \in I,$$

en particulier $\mathcal{T} \supset \sigma(\{X_i : i \in I\}) =: \mathcal{T}'$. Pour obtenir l'inclusion renversée, il suffit de remarquer que pour tout $J \subset I$, on a $\bigcup_{j \in J} X_j \in \mathcal{T}'$ par dénombrabilité de J .

■

Exercice 14 L'objectif de cet exercice est d'établir que l'union croissante de tribus n'est en général pas une tribu. On considère pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la classe de parties de $\mathbb{N}$ définie par

$$\mathcal{C}_n := \{\{0\}, \{2\}, \dots, \{2n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \dots, 2n\}\}.$$

et on pose $\mathcal{T}_n := \sigma(\mathcal{C}_n)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. Etablir que $2\mathbb{N} \notin \mathcal{T}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Conclure que l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que

$$\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, 2n\} = (\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, 2n+2\}) \cup \{2n+2\} \in \mathcal{T}_{n+1}$$

et

$$\{0\}, \{2\}, \dots, \{2n\} \in \mathcal{T}_{n+1}$$

on obtient $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$ puis $\sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{T}_{n+1}) = \mathcal{T}_{n+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $X_0 := \{0\}, X_1 := \{2\}, \dots, X_n := \{2n\}$ et $X_{n+1} := \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \dots, 2n\}$ de sorte que $\mathcal{T}_n = \sigma(\{X_i : i \in I\})$ avec $I := \{0, \dots, n+1\}$. L'ensemble I étant dénombrable et la famille $(A_i)_{i \in I}$ formant une partition de $\mathbb{N}$ nous pouvons exploiter la Question 2 de l'Exercice 13 pour obtenir

$$\mathcal{T}_n = \sigma(\{X_i : i \in I\}) = \left\{ \bigcup_{j \in J} X_j : J \subset I \right\}.$$

En particulier, si $2\mathbb{N} \in \mathcal{T}_n$, alors $2\mathbb{N} = \bigcup_{l \in J} A_l$ pour une partie J de I et ceci est bien sûr absurde.

3. Supposons que $\mathcal{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ soit une tribu sur $\mathbb{N}$. La stabilité de $\mathcal{T}$ par réunion dénombrable combinée au fait que $\{2n\} \in \mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous permet d'écrire

$$2\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\} \in \mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n.$$

On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathbb{N} \in \mathcal{T}_{n_0}$ et ceci contredit le résultat de la question précédente. On conclut que $\mathcal{T}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$.

■

Exercice 15 Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace mesurable et Y une partie non vide de X . On suppose qu'il existe une classe $\mathcal{C}$ de parties de X telles que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{T}_X$. On considère la classe de parties de Y

$$\mathcal{C}_Y := \{C \cap Y : C \in \mathcal{C}\}.$$

L'objectif de l'exercice est d'établir que la plus petite tribu sur Y contenant la classe de parties $\mathcal{C}_Y$ est la tribu induite $\mathcal{T}_Y$ par $\mathcal{T}_X$ sur Y .

1. Etablir que $\sigma(\mathcal{C}_Y) \subset \mathcal{T}_Y$.
2. Montrer que

$$\mathcal{T} := \{C \in \mathcal{P}(X) : C \cap Y \in \sigma(\mathcal{C}_Y)\}.$$

est une tribu sur X contenant la classe de parties $\mathcal{C}$.

3. Conclure.

Solution.

1. L'inclusion $\mathcal{C}_Y \subset \{C \cap Y : C \in \mathcal{T}_X\} = \mathcal{T}_Y$ entraîne $\sigma(\mathcal{C}_Y) \subset \mathcal{T}_Y$.
2. On a évidemment $\emptyset \in \mathcal{T}$. Soit $A \in \mathcal{T}$. On a par définition de $\mathcal{T}$, l'inclusion $A \cap Y \in \sigma(\mathcal{C}_Y)$. Puisque $\sigma(\mathcal{C}_Y)$ est une tribu sur Y , nous savons que $Y \setminus A \cap Y = (X \setminus A) \cap Y \in \sigma(\mathcal{C}_Y)$, i.e., $X \setminus A \in \mathcal{T}$. Ainsi, la classe $\mathcal{T}$ est stable par complémentaires dans X . Il reste à voir que pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{T}$, on a

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap Y) \in \mathcal{T}$$

où la dernière inclusion découle du fait que $\sigma(\mathcal{C}_Y)$ soit une tribu sur Y et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap Y \in \sigma(\mathcal{C}_Y)$. On conclut que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X . Le fait que $\mathcal{T}$ contient la classe $\mathcal{C}$ est évident.

3. Nous pouvons écrire $\mathcal{T}_X = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$. Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Par définition de $\mathcal{T}_Y$, il existe $V \in \mathcal{T}_X$ tel que $U = V \cap Y$. Or, ce qui précède nous dit que $V \in \mathcal{T}$, i.e., $V \cap Y \in \sigma(\mathcal{C}_Y)$. On aboutit alors à $\mathcal{T}_Y \subset \sigma(\mathcal{C}_Y)$. L'égalité désirée est donc démontrée.

■

Exercice 16 On considère les classes de parties de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}_0 := \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}, \quad \mathcal{C}_1 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

$$\mathcal{C}_2 := \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}, \quad \mathcal{C}_3 := \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

$$\mathcal{C}_4 := \{[q, +\infty[: q \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathcal{C}_5 := \{]q, +\infty[: q \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathcal{C}_6 := \{]-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathcal{C}_7 := \{]-\infty, q[: q \in \mathbb{Q}\}$$

On rappelle (voir Cours) que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par la classe de parties $\mathcal{C}_0$, autrement dit : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_0)$.

1. Montrer que tout intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $\{x\} \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_1)$.
2. De manière analogue, établir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3)$.
3. A l'aide de l'égalité $\sigma(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que $\sigma(\mathcal{C}_4) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que $\sigma(\mathcal{C}_7) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. De même, montrer que $\sigma(\mathcal{C}_5) = \sigma(\mathcal{C}_6) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
5. Peut-on remplacer dans ces diverses expressions de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble $\mathbb{Q}$ par d'autres parties de $\mathbb{R}$?

Solution.

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ car fermé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puis $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n} \right] \in \sigma(\mathcal{C}_1).$$

En écrivant pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$

$$]a, b[= [a, b] \setminus (\{a\} \cup \{b\}) \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

on obtient $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_0) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$. L'égalité voulue est alors établie.

2. Commençons par noter que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ est un borélien de $\mathbb{R}$ puisque $]a, b[= [a, b] \setminus \{b\}$ et que $[a, b]$ et $\{b\}$ sont eux-mêmes des boréliens de $\mathbb{R}$ (car fermés dans $\mathbb{R}$). On a donc $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ceci entraîne bien sûr que $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour obtenir l'inclusion renversée, remarquons tout d'abord que $\sigma(\mathcal{C}_2)$ contient les singletons de $\mathbb{R}$ car

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n} \right[\in \sigma(\mathcal{C}_2).$$

On a alors pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$

$$[a, b] = [a, b[\cup \{b\} \in \sigma(\mathcal{C}_2)$$

et ceci donne $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. On conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_2)$. L'égalité $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_3)$ s'obtient de manière analogue.

3. Les ensembles $[r, +\infty[$ avec $r \in \mathbb{R}$ sont évidemment fermés dans $\mathbb{R}$ et donc en particulier des boréliens. On en déduit que $\sigma(\mathcal{C}_4) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour obtenir l'inclusion renversée, il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, on a

$$[a, b[= [a, +\infty[\setminus [b, +\infty[\in \sigma(\mathcal{C}_4).$$

L'égalité $\sigma(\mathcal{C}_7) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s'obtient en remarquant que $]q, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, q]$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

4. C'est la même démarche que ci-dessus.
5. On peut bien sûr remplacer $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$. On peut également remplacer $\mathbb{Q}$ par n'importe quelle partie dénombrable dense de $\mathbb{R}$.

■

Exercice 17 On considère la classe de parties $\mathcal{C} := \{[a, b] : 0 \leq a \leq b\}$ de $\mathbb{R}$ ainsi que la classe

$$\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B \subset \mathbb{R}_+\} \cup \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{R}_-^* \subset B\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant la tribu $\sigma(\mathcal{C})$. A t-on $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Solution. On a évidemment $\emptyset \in \mathcal{T}$. Pour $A \in \mathcal{T}$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_-^* = (\mathbb{R}_+)^c \subset A^c$ ou $A^c \subset (\mathbb{R}_-^*)^c = \mathbb{R}_+$ et ceci montre que $A^c \in \mathcal{T}$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_-^* \subset A_k$, alors $\mathbb{R}_-^* \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A$ puis $A \in \mathcal{T}$. Dans le cas contraire, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset \mathbb{R}_+$ puis $A \subset \mathbb{R}_+$. On conclut que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, il est clair que $\mathcal{C} \subset \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B \subset \mathbb{R}_+\} =: \mathcal{C}_+$ et cette inclusion entraîne bien sûr $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}_+) \subset \mathcal{T}$.

Enfin, on a $\mathcal{T} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $[-1, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $[-1, 1] \notin \mathcal{T}$. ■

Exercice 18 Donner une expression de la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en fonction de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Solution. La topologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ naturelle de $\mathbb{R}$ est la topologie induite par la topologie $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ naturelle de $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{B \cap \mathbb{R} : B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\} = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : A \subset \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Définissons la classe de parties

$$\mathcal{C} := \{\emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{C}\}$. Observons que l'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est immédiate car tout élément de $\mathcal{C}$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ et tout borélien de $\mathbb{R}$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ (voir (1)). Montrons l'inclusion renversée. Soit $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Distinguons quatre cas :

Cas 1. $B \subset \mathbb{R}$. On a $B = B \cup \emptyset$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir (1)).

Cas 2. $+\infty \in B$ et $-\infty \notin B$. Dans ce cas, $B = B' \cup \{+\infty\}$ avec $B' := B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir (1)).

Cas 3. $-\infty \in B$ et $+\infty \notin B$. Dans ce cas, $B = B' \cup \{-\infty\}$ avec $B' := B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir (1)).

Cas 4. $-\infty, +\infty \in B$. Dans ce cas, $B = B' \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $B' := B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir (1)).

Dans tous les cas, B est l'union d'un borélien de $\mathbb{R}$ et d'un élément de $\mathcal{C}$. ■

Exercice 19

1. Justifier que pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $[a, +\infty]$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$. En déduire que $\mathcal{T} := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.
2. Etablir que $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.
3. Montrer que si $i : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ désigne l'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $i^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$.
4. En appliquant le lemme du transport, montrer que $i^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
5. Conclure.

Solution.

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $[a, +\infty]$ est fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$ et donc en particulier il appartient à $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. On en déduit

$$\mathcal{T} := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}).$$

2. On a $\{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty] \in \mathcal{T}$ et $\{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, +\infty] \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty, +\infty\} \in \mathcal{T}$.

3. Il suffit d'écrire

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \{i^{-1}(T) : T \in \mathcal{T}\} = \{\mathbb{R} \cap T : T \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{T},$$

où la dernière inclusion résulte de $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

4. On a

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \sigma(\{i^{-1}([a, +\infty]) : a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{Q}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

5. En combinant les deux dernières questions, on obtient $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$. La description de la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ obtenue à l'Exercice 18 permet alors de conclure que $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

■

Exercice 20 Soit X un ensemble non vide muni de la distance discrète $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour chaque $(x, y) \in X^2$ par

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{\{x\} : x \in X\}).$$

En déduire que si X contient une partie qui n'est ni dénombrable ni de complémentaire dénombrable, on a

$$\mathcal{B}(X) \neq \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

Solution. On commence par voir que pour $x \in X$ et $r > 0$ donnés, la boule ouverte $B(x, r)$ vaut soit X soit le singleton $\{x\}$. Il s'ensuit que l'ensemble des ouverts de X muni de d n'est nul autre que $\mathcal{P}(X)$, en particulier $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$. En notant $\mathcal{C} := \{X, \{\{x\} : x \in X\}\}$, il vient

$$\sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \sigma(\mathcal{C}). \quad (2)$$

En observant que tout élément de $\mathcal{C}$ est un élément de la classe $\mathcal{C}'$ constituée des parties dénombrables de X ou de complémentaires dans X dénombrables et en rappelant que la tribu engendrée par les singletons de X est $\sigma(\mathcal{C}')$, on en arrive à

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}') = \sigma(\{\{x\} : x \in X\}).$$

Si X contient une partie A qui n'est ni dénombrable ni de complémentaire dans X dénombrable, alors $A \notin \sigma(\mathcal{C}')$ et l'on conclut à l'aide de (2). ■

Exercice 21 Pour $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles non vides et $\mathcal{C}$ une classe de parties de X , on note $f(\mathcal{C}) := \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$. A t-on en général l'égalité $\sigma(f(\mathcal{C})) = f(\sigma(\mathcal{C}))$?

Solution. La réponse est non. Posons $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} := \{\{0\}\}$ et considérons la fonction $f : X \rightarrow Y$ nulle. On a bien sûr

$$\sigma(f(\mathcal{C})) = \sigma(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\} = \sigma(\mathcal{C})$$

tandis que

$$f(\sigma(\mathcal{C})) = \{\emptyset, \{0\}\}.$$

■

Exercice 22 On note $X = \{1, 2\}$. Montrer que

$$\sigma(\{1\}) \otimes \sigma(\{1\}) \neq \sigma(\{(1, 1)\}).$$

Solution. Observons d'une part que

$$\sigma(\{(1, 1)\}) = \{\emptyset, \{(1, 1)\}, X^2 \setminus \{(1, 1)\}, X^2\}$$

et d'autre part

$$\sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}.$$

On a évidemment

$$\{1, 2\} \times \{2\} \in \sigma(\{1\}) \otimes \sigma(\{1\})$$

tandis que

$$\{1, 2\} \times \{2\} = \{(1, 2), (2, 2)\} \notin \sigma(\{(1, 1)\}).$$

■

Exercice 23 Soit $n \geq 1$ un entier. Etablir que $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{[\cdot]}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, où

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{[\cdot]}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] : \forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{Q} \ni a_k < b_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Solution. En notant $\mathcal{C} := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$, on voit que

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{[\cdot]}(\mathbb{R}^n) = \{A_1 \times \dots \times A_n : \forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in \mathcal{C}\}.$$

Par ailleurs, nous savons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$. Le cours nous dit alors que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : \forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in \mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}\}\}).$$

Notons que la tribu $\sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : \forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{[\cdot]}(\mathbb{R}^n))$ contient la classe

$$\{A_1 \times \dots \times A_n : \forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in \mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}\}\}$$

puisque tout élément de cette dernière est une union dénombrable de produits d'intervalles fermés à extrémités rationnelles (ceci provenant de l'égalité évidente $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]$). On conclut que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : \forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{[\cdot]}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

■