MEEF Mathématiques - UPVD & UM
M1 - Semestre 8
Année universitaire 2023-2024

CAPES BLANC

Lundi 25 mars 2024, durée 5h

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes **A TRAITER SUR DEUX COPIES DISTINCTES**.

Partie 1

Pour chacune des affimations suivantes dire si elle est vraie (V) ou fausse (F). Si vous la jugez vraie il faudra justifier votre sentiment en donnant une preuve. Si vous la jugez fausse il faudra assortir votre réponse d'un contre-exemple. Une bonne réponse sans preuve ou contre-exemple ne sera pas prise en compte.

1. Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée d'une fonction dérivable est toujours continue.
3. Si f est solution de l'équation différentielle
$$(1+x^2)y' - \frac{x^{2024}}{1+x^{1492}}y = \cos x$$
et vérifie $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas.
4. Si $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ est continue par morceaux et vérifie $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est la fonction nulle.
5. Si $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ est continue et vérifie $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est la fonction nulle.
6. Si $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est continue et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors f tend vers 0 en $+\infty$.
7. Si une série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.
8. Si une série de terme général u_n converge, alors son terme général est négligeable devant $1/n$.
9. Si le terme général u_n d'une série est négligeable devant $1/n$, alors la série converge.
10. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels. La suite $(u_n)_n$ a une limite (finie) si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

11. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
12. Un système linéaire de trois équations à deux inconnues n'a jamais de solutions (N.B. par équation linéaire, ici à deux inconnues, nous entendons une équation du type $ax + by = c$).
13. Un système linéaire de trois équations à trois inconnues a toujours des solutions.
14. Un système linéaire de trois équations à quatre inconnues a toujours des solutions.
15. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ est une racine de P alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)Q$.
16. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n \geq 1$, alors P possède au maximum n racines réelles.
17. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ a pour seule valeur propre λ, alors A est semblable à la matrice λI_n.
18. Si u, v, w sont trois vecteurs d'un espace vectoriel, deux à deux non colinéaires, alors la famille (u, v, w) est libre.
19. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(e'_1, \cdots, e'_n)$ sont des bases d'un espace vectoriel E, il existe une application linéaire bijective $f : E \to E$ telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_i) = e'_i$.
20. Une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est nécessairement bijective.
21. Si $2x \equiv 2\ (16)$, alors $x \equiv 1\ (16)$.
22. Si $2x \equiv 2\ (16)$, alors $x \equiv 1\ (8)$.
23. Les solutions de l'équation $x^2 \equiv 1\ (41)$ sont $x \equiv 1\ (41)$ ou $x \equiv 40\ (41)$.
24. L'équation diophantienne $2x - 3y = 2$ possède au moins une solution.
25. L'équation diophantienne $12x - 9y = 5$ possède au moins une solution.
26. Dans le plan complexe les points d'affixes 0, z et z' sont alignés si et seulement il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $z' = \lambda z$.
27. Les racines complexes de l'équation du second degré
$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \in \mathbb{C}^*,\ (b, c) \in \mathbb{C}^2$$
sont conjuguées.
28. Deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$ sont parallèles si et seulement si elles ne coupent pas.
29. La somme alternée des coefficients d'une ligne du triangle de Pascal est toujours nulle.
30. Si on lance deux dés équilibrés à six faces, la probabilité d'obtenir 5 comme somme des faces supérieures est la même que celle d'obtenir 9.

Partie 2

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. **On rappelle** qu'une *sous-suite* (ou *suite extraite*) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (appelée parfois *extractrice*) telle que
$$v_n = u_{\varphi(n)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Un réel qui est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On vérifie sans difficultés que la suite $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n^- := \inf_{k\geq n} u_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est croissante. La limite (qui est réelle ou qui vaut $+\infty$ d'après le théorème de convergence des suites monotones (que l'on pourra utiliser librement dans ce qui suit) de cette suite est appelée *limite inférieure* de la suite et vérifie

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} u_n^- = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k. \tag{1}$$

On définit de manière analogue la *limite supérieure* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer qu'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante satisfait $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer qu'une sous-suite d'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ (réelle ou infinie) alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. En déduire que la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Montrer que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce réel ℓ.
5. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente vers ℓ. Montrer (en procédant par l'absurde) que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6. Montrer que la suite $\big(n(-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune valeur d'adhérence. Montrer que la suite $\big(n(1+(-1)^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence sans pour autant converger (dans $\mathbb{R}$).
7. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions (i), (ii) et (iii) ci-dessous sont équivalentes :
   (i) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| \leq \varepsilon\}$ est infini.
   (iii) Il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ (autrement dit, ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
8. On souhaite établir dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite monotone. On considère à cet effet l'ensemble $\Lambda := \{n \in \mathbb{N} : \forall p \geq n, u_p \geq u_n\}$.
   (a) Si Λ est fini, montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante.
   (b) Si Λ est infini, montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
9. Déduire de la question précédente le célèbre théorème suivant (souvent attribué à Bolzano et Weierstrass) : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
10. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle converge.
11. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\inf_{k\geq n} u_k \leq u_{s(n)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   En déduire que si ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \ell.$$

(b) Montrer que la limite inférieure $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On pourra exploiter* (i) *de la Question 6.*

(c) Conclure que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est la plus petite des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [1].

12. **(Vers l'extraction diagonale de Cantor)** On considère un nombre $p \geq 1$ de suites réelles bornées $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$. L'objectif ici est d'établir qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)}^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.
    (a) Justifier que l'on puisse supposer que $p \geq 2$.
    (b) Montrer qu'il une suite extraite $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.
    (c) Montrer que $(x_{\varphi_1(n)}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et en déduire qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Montrer que $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.
    (d) Conclure.
13. **(Extraction diagonale de Cantor)** Dans cette question, on considère pour chaque entier $p \geq 1$ une suite réelle bornée $(x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$.
    (a) Justifier qu'il existe $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'extractions telle que pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ la suite $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $i \leq p$.
    (b) Montrer que la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par
    $$\psi(p) := \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_p(p) \quad \text{pour tout } p \geq 1$$
    est une extractrice.
    (c) Soit $p \geq 1$. Montrer que la suite $(x_{\psi(n)}^{(p)})_{n\geq p}$ est une suite extraite de $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}^{(p)})_{n\geq p}$. Conclure.
    (d) Expliciter le terme "extraction diagonale".

1. On montre de même que la limite supérieure est la plus grande des valeurs d'adhérence de la suite.