MEEF Mathématiques - UPVD & UM
M1 - Semestre 8
Année universitaire 2021-2022

Problème n°2

Lundi 7 Mars 2022, durée 5h

****

Produits infinis

Rappels :

1. On rappelle que pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un réel $\eta > 0$ et $\varepsilon :]-\eta, \eta[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + x^{n+1}\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \in]-\eta, \eta[.$$
2. On rappelle la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$
3. On rappelle le résultat élémentaire suivant sur les fonctions convexes d'une variable réelle. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. La fonction $p_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$p_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pour tout } x \in I \setminus \{a\}$$
est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Dans tout le problème, $n_0 \geq 0$ est un entier naturel fixé. On appelle *suite des produits partiels* associée à une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ la suite $(p_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ définie pour chaque entier $n \geq n_0$ par
$$p_n := \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} \dots u_n.$$
Lorsque cette suite $(p_n)_{n \geq n_0}$ converge dans $\mathbb{C}$, on note sa limite $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$. **Si tel est le cas et si** $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k \neq 0$, on dit que le produit infini $\prod u_k$ *converge*. Dans le cas contraire (c'est-à-dire lorsque la suite des produits partiels ci-dessus **diverge ou converge vers** 0) nous dirons que le produit infini $\prod u_k$ *diverge*. Comme pour les séries numériques, la *nature* d'un produit infini désigne sa convergence ou sa divergence.

1 Quelques calculs de produits infinis

1. Donner la nature des produits infinis $\prod \frac{1}{2}$ et $\prod 1$.
2. Démontrer l'existence de $\prod_{k=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{k})$ et calculer sa valeur. Quelle est la nature du produit infini $\prod(1-\frac{1}{k})$?
3. Etablir que
$$\prod_{k=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{k^2})=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^{+\infty}(1-\frac{2}{k(k+1)})=\frac{1}{3}.$$
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{4k^2})=\frac{(2n+1)[(2n)!]^2}{4^{2n}(n!)^4}.$$
En déduire que
$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4k^2})=\frac{2}{\pi}.$$
5. Montrer qu'une suite de complexes $(z_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites extraites $(z_{2n})_{n\geq n_0}$ et $(z_{2n+1})_{n\geq n_0}$ convergent vers l. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k})=1.$$

2 Généralités sur la nature d'un produit infini

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de nombres complexes.

1. On suppose que les deux produits infinis $\prod u_n$ et $\prod v_n$ convergent. Montrer que $\prod u_n v_n$ converge. Préciser la valeur de $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n v_n$.
2. Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Que pensez-vous de la réciproque ?
3. On suppose que $\prod u_n$ converge tandis que $\prod v_n$ diverge. Etudier la nature du produit infini $\prod u_n v_n$.
4. Montrer que l'on ne peut pas conclure sur la nature du produit infini $\prod u_n v_n$ lorsque $\prod u_n$ et $\prod v_n$ divergent.
5. On suppose que $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = 0 = \prod_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. Montrer que $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n v_n = 0$.
6. Les produits infinis $\prod u_n$ et $\prod v_n$ sont-ils de même nature lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$?

3 Produits infinis de réels strictement positifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de **réels strictement positifs**.

1. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ a même nature que la série numérique $\sum \ln(u_n)$. En déduire une expression du produit infini $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ lorsque $\prod u_n$ converge.

2. On suppose que la série $\sum(u_n - 1)$ est convergente.
   (a) Etablir que
   $$\frac{1}{2}(u_n-1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (u_n-1) - \ln(u_n).$$
   (b) Montrer que le produit infini $\prod u_n$ a même nature que $\sum(u_n-1)^2$.
3. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]0,1]$ (resp. $u_n \in [1,+\infty[$). Nous allons établir dans les questions (a) et (b) ci-dessous que $\prod u_n$ et $\sum(u_n-1)$ ont même nature.
   (a) Montrer que le résultat a lieu si $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne converge pas vers 1.
   (b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
      (i) Justifier que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$.
      (ii) En déduire que $\sum(u_n-1)$ et $\sum \ln(u_n)$ ont même nature.
      (iii) Conclure.
4. Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{2n}$.
   (a) Quelle est la nature de la série $\sum(v_n - 1) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$?
   (b) Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et une suite réelle $(\lambda_n)_{n\geq N}$ qui **converge vers** 0 telle que
   $$\ln(v_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\lambda_n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
   (c) Déduire de (a) et (b) que $\sum \ln(v_n)$ diverge. Conclure sur la nature du produit infini $\prod v_n$.
   (d) Est-ce en contradiction avec le résultat de la Question 3. ?
   (e) Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et suite réelle $(\lambda_n)_{n\geq N}$ **bornée** telle que
   $$\ln(w_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\lambda_n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
   (f) Déduire de (a) et (e) que la série $\sum \ln(w_n)$ converge. Conclure sur la nature du produit infini $\prod w_n$.
   (g) Est-ce en contradiction avec le résultat de la Question 3. ?

4 Produits infinis de nombres complexes

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes **non nuls** définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$. On pose $v_n := u_n - 1$ pour tout entier $n \geq n_0$. On suppose que la série $\sum |v_n|$ converge. Nous allons établir dans cette section que le produit infini $\prod u_n$ converge. Pour chaque entier $n \geq n_0$, on définit
$$p_n := \prod_{k=n_0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad q_n := \prod_{k=n_0}^{n} (1+|v_k|).$$

1. Montrer que le produit infini $\prod(1+|v_n|)$ est convergent.
2. Soit $m \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$, on a
   $$\left|\prod_{k=1}^{m}(1+z_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{m}(1+|z_k|) - 1.$$

3. Montrer que pour tous entiers m, n avec $m > n \geq n_0$, on a
$$|p_m - p_n| \leq q_m - q_n.$$
4. En déduire que $(p_n)_{n \geq n_0}$ converge dans $\mathbb{C}$.
5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a
$$|\ln|1+z|| \leq -\ln(1-|z|).$$
6. En déduire que la série $\sum \ln|u_n|$ est absolument convergente.
7. Conclure que $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k \neq 0$.

5 Sinus cardinal et produit infini

Dans toute la suite, $p \geq 0$ est un entier naturel. Pour chaque entier $k \in \{-p, \dots, p\}$
$$\alpha_k := \frac{k\pi}{2p+1}.$$

1. On considère la fonction polynôme $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$Q(x) := (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} x^{2k+1}(x^2-1)^{p-k} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner la partie imaginaire de $e^{i(2p+1)\theta}$. En déduire que
$$\sin[(2p+1)\theta] = Q\big(\sin(\theta)\big).$$
   (b) Montrer que Q est de degré $2p+1$. Préciser son coefficient dominant.
   (c) Montrer que $\sin(\alpha_k)$ est racine de Q pour chaque entier $k \in \{-p \dots, p\}$. Déterminer l'ensemble des racines de Q.
   (d) En déduire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\sin[(2p+1)\theta] = 4^p \sin\theta \prod_{k=1}^{p} \big(\sin^2(\alpha_k) - \sin^2(\theta)\big).$$
   (e) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Exploiter cette valeur pour obtenir que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$
$$\sin[(2p+1)\theta] = (2p+1)\sin\theta \prod_{k=1}^{p} \big(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\alpha_k)}\big).$$
2. On pose $D := \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$ et on définit $\tan : D \to \mathbb{R}$ par
$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{pour tout } x \in D.$$
   (a) Déterminer explicitement l'ensemble D.

(b) Montrer qu'il existe $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients entiers de degré $2p$ tel que pour tout $\theta \in D$

$$\sin[(2p+1)\theta] = \sin(\theta)\cos^{2p}(\theta) T\big(\tan(\theta)\big).$$

(c) Etablir que pour tout entier **non nul** $k \in \{-p, \dots, p\}$, $\tan \alpha_k$ est racine de T. Déterminer l'ensemble des racines de T.

(d) En déduire que pour tout $\theta \in D$

$$T\big(\tan(\theta)\big) = \prod_{k=1}^{p} \big(\tan^2(\alpha_k) - \tan^2(\theta)\big).$$

(e) Montrer que pour tout $\theta \in D$, on a

$$T\big(\tan(\theta)\big) = (2p+1) \prod_{k=1}^{p} \big(1 - \frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)}\big).$$

(f) Conclure que pour tout $\theta \in D$

$$\sin[(2p+1)\theta] = (2p+1)\sin(\theta)\cos^{2p}(\theta) \prod_{k=1}^{p} \big(1 - \frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)}\big).$$

3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\tan(x)}{\tan(y)} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\sin(x)}{\sin(y)}.$$

4. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \alpha_1[$

$$\sin[(2p+1)\theta] \leq (2p+1)\sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} \big(1 - \frac{\theta^2}{\alpha_k^2}\big) \leq \frac{\sin[(2p+1)\theta]}{\cos^{2p}(\theta)}.$$

5. Dans la suite, on considère un réel fixé $0 < t < \pi$.

(a) Ecrire l'encadrement obtenu à la Question 4. pour le réel $\theta := \frac{t}{2p+1}$.

(b) Etudier la limite de la suite $\big(\cos^{2n}(\frac{t}{2n+1})\big)_{n \geq 1}$.

(c) En déduire que

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \big(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\big) \quad \text{pour tout } x \in]0, \pi[.$$

(d) Etendre cette dernière égalité à $]-\pi, \pi[$.

Proposition de corrigé.

1 Quelques calculs de produits infinis

1. Il est clair que le produit infini $\prod \frac{1}{2}$ diverge (vers 0) tandis que le produit infini $\prod 1$ converge (vers 1).
2. Il suffit d'observer que pour tout $n \geq 2$,
$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
pour aboutir à
$$\prod_{k=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{k}) = 0.$$
Par définition, le produit infini $\prod(1-\frac{1}{k})$ diverge.
3. Fixons un entier $n \geq 2$. La première égalité souhaitée découle immédiatement des égalités
$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$$
tandis que la deuxième s'obtient via
$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{(n-1)!(n+2)!}{3n!(n+1)!} = \frac{n+2}{3n}.$$
4. La première égalité découle des égalités
$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{4k^2}) = (\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)2k}{4k^2})(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k+1)}{4k^2}) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2}$$
valides pour tout entier $n \geq 1$. Ceci et la formule de Stirling donnent
$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4k^2}) = \frac{2}{\pi}.$$
5. Soit $(z_n)_{n\geq n_0}$ une suite de complexes. L'implication $\Rightarrow$ étant immédiate, nous montrons seulement $\Leftarrow$. Supposons donc que $(z_{2n})_{n\geq n_0}$ et $(z_{2n+1})_{n\geq n_0}$ convergent vers le même complexe l. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Les convergences des deux suites extraites ci-dessus nous donnent un entier $N \geq n_0$ tel que
$$\max\left(|z_{2n}-l|, |z_{2n+1}-l|\right) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
Il reste à voir que
$$|z_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq 2N+1$$
pour conclure quant à la convergence vers l de la suite $(z_n)_{n\geq n_0}$.

Posons pour tout $k \geq 1$, $u_k := 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^{2n} u_k = \prod_{k=1}^{n} u_{2k-1}u_{2k} = 1$$

et

$$\prod_{k=1}^{2n+1} u_k = u_{2n+1}\prod_{k=1}^{2n} u_k = 1 + \frac{1}{2k+1}.$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat ci-dessus pour aboutir à l'égalité souhaitée.

2 Généralités sur la nature d'un produit infini

1. En combinant la convergence des produits infinis $\prod u_n$ et $\prod v_n$ et l'égalité

$$(\prod_{n=n_0}^{N} u_n)(\prod_{n=n_0}^{N} v_n) = \prod_{n=n_0}^{N} (u_n v_n)$$

valide pour tout entier $N \geq n_0$ nous déduisons

$$(\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n)(\prod_{n=n_0}^{+\infty} v_n) = \prod_{n=n_0}^{+\infty} (u_n v_n).$$

La convergence de $\prod u_n v_n$ en découle.

2. On note $(p_n)_{n\geq n_0}$ la suite des produits partiels associée à $(u_n)_{n\geq n_0}$. Supposons que $\prod u_n$ converge, i.e., supposons que la suite $(p_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un certain complexe l non nul. S'il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_N = 0$, alors $p_m = 0$ pour tout entier $m \geq N$, en particulier $l = 0$. Ainsi, nous avons $u_n \neq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$. Par ailleurs, on voit tout de suite que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1.$$

La réciproque est fausse comme le montre la Question 2. de la Partie 1.

3. Supposons sans pertes de généralités que $\prod u_n$ converge et que $\prod v_n$ diverge. Si $\prod(u_n v_n)$ converge, alors

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=n_0}^{N} v_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{\prod_{n=n_0}^{N} u_n v_n}{\prod_{n=n_0}^{N} u_n} = \frac{\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n v_n}{\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n} \neq 0,$$

en particulier $\prod v_n$ converge.

4. Il suffit de considérer d'une part $\prod \frac{1}{2}$ et $\prod 2$ et d'autre part $\prod \frac{1}{2}$ et $\prod \frac{1}{2}$.
5. Le résultat découle immédiatement de l'égalité déjà vue ci-dessus, à savoir

$$(\prod_{n=n_0}^{N} u_n)(\prod_{n=n_0}^{N} v_n) = \prod_{n=n_0}^{N} (u_n v_n) \quad \text{pour tout } N \geq n_0.$$

6. On a l'équivalent $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (1 - \frac{1}{n})$ mais le produit infini $\prod 1$ converge tandis que le produit infini $\prod(1 - \frac{1}{n})$ diverge.

3 Produits infinis de réels strictement positifs

1. Commençons par observer que pour tout entier $m \geq n_0$

$$\ln(\prod_{n=n_0}^{m} u_n) = \sum_{n=n_0}^{m} \ln(u_n). \tag{1}$$

$\Rightarrow$, Supposons que le produit infini $\prod u_n$ converge. L'égalité (1) ci-dessus combinée à la continuité de ln sur $]0, +\infty[$ et au fait que $\lim_{m\to+\infty} \prod_{n=n_0}^{m} u_n > 0$ nous assure de la convergence de la série $\sum \ln(u_n)$ ainsi que de l'égalité

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n) = \ln(\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n).$$

$\Leftarrow$, Supposons que la série $\sum \ln(u_n)$ converge. L'égalité (1) s'écrit encore pour tout entier $m \geq n_0$

$$\prod_{n=n_0}^{m} u_n = \exp\big(\sum_{n=n_0}^{m} \ln(u_n)\big).$$

La continuité de exp sur $\mathbb{R}$ entraîne alors

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp\big(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)\big) > 0.$$

On conclut que $\prod u_n$ converge. Sous l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus, on a bien sûr

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp\big(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)\big).$$

2. Posons pour tout entier $n \geq n_0$, $x_n := u_n - 1$.
   (a) Via le Rappel 1, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un réel $\eta > 0$ et $\varepsilon :]-\eta, \eta[\to \mathbb{R}$ une fonction de limite nulle en 0 telle que

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \in]-\eta, \eta[.$$

   Ceci et le fait que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ nous permettent de trouver un entier $N \geq n_0$ et $(\lambda_n)_{n\geq N}$ une suite de réels qui converge vers 0 telle que

$$\ln(1 + x_n) = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 + x_n^2\lambda_n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

   Il s'ensuit

$$\frac{1}{2}x_n^2(1 - 2\lambda_n) = x_n - \ln(1 + x_n) \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

   Il reste à voir que $\lim_{n\to+\infty}(1 - 2\lambda_n) = 1$ pour conclure que

$$\frac{1}{2}x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n - \ln(1 + x_n).$$

(b) Supposons que $\prod u_n$ converge (resp. diverge). D'après la Question 1. de cette partie, nous savons que $\sum \ln(u_n) = \sum \ln(1+x_n)$ converge (resp. diverge). Ceci et la convergence de $\sum x_n$ entraînent que $\sum \big(x_n - \ln(1+x_n)\big)$ converge (resp. diverge). En remarquant que $\frac{1}{2}x_n^2 \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$ et en utilisant l'équivalent obtenu à la question précédente, nous concluons que $\sum x_n^2$ converge (resp. diverge).

3. (a) Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne converge pas vers 1. Dans ce cas, le produit infini $\prod u_n$ diverge (voir Section 2) et la série $\sum(u_n - 1)$ diverge grossièrement.
   (b) Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 1.
      (i) L'équivalent désiré découle de $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 1) = 0$.
      (ii) Il suffit de combiner l'équivalent obtenu à la question précédente au fait que $(u_n - 1)_{n\geq n_0}$ est de signe constant (i.e., $u_n - 1 \leq 0$ pour tout $n \geq n_0$ ou $u_n - 1 \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$).
      (iii) D'après la Question 1. de cette section, la série $\sum \ln(u_n)$ a même nature que le produit infini $\prod u_n$. Le résultat voulu découle alors de (ii).

4. (a) Il s'agit d'une série alternée dont le terme général tend vers 0 et décroît en valeur absolue. Un résultat classique relatif à la convergence des séries alternées nous assure alors de la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (b) D'après la section Rappels, il existe un réel $\eta > 0$ et $\varepsilon :]-\eta,\eta[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \in]-\eta,\eta[.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in]-\eta,\eta[$. Nous pouvons alors écrire

$$\ln(v_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{3n}}{n\sqrt{n}}\varepsilon\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

On conclut en posant $\lambda_n := \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n}}\varepsilon\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ pour tout $n \geq N$ et en remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$ (produit d'une suite réelle bornée par une suite réelle convergente vers 0).

   (c) Supposons par l'absurde que la série $\sum \ln(v_n)$ converge. Les deux questions précédentes nous disent alors que la série $\sum \big(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\lambda_n\big)$ converge. L'équivalent

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

et le fait que $-\frac{1}{2n} \leq 0$ pour tout $n \geq 1$ nous disent alors que $\sum \big(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\lambda_n\big)$ a même nature que $\sum -\frac{1}{2n}$ qui est une série divergente. Ceci est contradictoire et nous permet de conclure que $\sum \ln(v_n)$ diverge. Par ailleurs, le fait que $v_n > 0$ et la Question 1. de cette section nous permettent d'affirmer que $\prod v_n$ diverge.

   (d) La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ ne satisfait pas l'hypothèse de la Question 3 puisque $v_{2n} > 1$ et $v_{2n-1} < 1$ pour tout $n \geq 1$. Nous ne pouvons donc pas appliquer ce résultat qui nous donnerait la convergence de $\prod v_n$ et rentrerait en contradiction avec la question précédente.

(e) On procède de même que dans la Question (b) ci-dessus avec l'égalité $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\big)=0$, pour obtenir l'existence d'un entier $N\geq 1$ tel que pour tout $n\geq N$

$$\begin{aligned}\ln(w_n) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^2+\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^3\varepsilon\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{8n^2}-\frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}}+\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^3\varepsilon\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big).\end{aligned}$$

Il reste alors à vérifier que la suite $(\lambda_n)_{n\geq N}$ définie par

$$\lambda_n := n\sqrt{n}\Big(-\frac{1}{8n^2}-\frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}}+\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^3\varepsilon\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)\Big)\quad \text{pour tout } n\geq N$$

est bornée.

(f) La convergence donnée par (a), la convergence de la série $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}\lambda_n$ (obtenue par comparaison avec une série de Riemann de paramètre $3/2>1$) et la question précédente nous assure de la convergence de la série $\sum\ln(w_n)$. Une application de la Question 1. de cette section à la suite de réels strictement positifs $(w_n)_{n\geq 1}$ garantit la convergence du produit infini $\prod w_n$.

(g) La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ ne satisfait pas l'hypothèse de la Question 3. puisque $w_{2n}>1$ et $w_{2n-1}=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{4n+2}<1$. Nous ne pouvons donc pas appliquer ce résultat qui nous donnerait la divergence de $\prod w_n$.

4 Produits infinis de nombres complexes

1. Puisque $\sum|v_n|$ converge, la Question 3. de la section précédente garantit que le produit infini $\prod(1+|v_n|)$ converge.
2. Notons pour chaque entier $n\geq 1$, la propriété :

$$\mathcal{P}(n):\quad \left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right|\leq\prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1\quad \text{pour tout } z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}.$$

Nous allons établir par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ a lieu pour chaque entier $n\geq 1$. Commençons par noter que $\mathcal{P}(1)$ est évidente. Fixons un entier $m\geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(m)$ ait lieu et montrons que $\mathcal{P}(m+1)$. Soient $z_1,\dots,z_{m+1}\in\mathbb{C}$. Observons que

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{m+1}(1+z_k)-1\right| &= \left|(1+z_{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1+z_k)-1\right|\\ &= \left|(1+z_{m+1})\Big(\prod_{k=1}^{m}(1+z_k)-1\Big)+z_{m+1}\right|\\ &\leq (1+|z_{m+1}|)\left|\prod_{k=1}^{m}(1+z_k)-1\right|+|z_{m+1}|.\end{aligned}$$

En combinant ceci et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\left|\prod_{k=1}^{m+1}(1+z_k)-1\right|\leq(1+|z_{m+1}|)\Big(\prod_{k=1}^{m}(1+|z_k|)-1\Big)+|z_{m+1}|=\prod_{k=1}^{m+1}(1+|z_k|)-1.$$

Ceci montre que $\mathcal{P}(m+1)$ a lieu et termine la récurrence.

3. Soient m, n deux entiers tels que $m > n \geq n_0$. On a

$$|p_m - p_n| = \left| p_n[(\prod_{k=n+1}^{m} u_k)] - 1 \right| = \prod_{k=n_0}^{n} |u_k| \left| (\prod_{k=n+1}^{m} u_k) - 1 \right|.$$

Ceci et la Question 2 ci-dessus donnent

$$\prod_{k=n_0}^{n} |u_k| \left| (\prod_{k=n+1}^{m} u_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=n_0}^{n} (1+|v_k|) \left| \prod_{k=n+1}^{m} (1+v_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=n_0}^{n} (1+|v_k|) \big(\prod_{k=n+1}^{m} (1+|v_k|) - 1 \big).$$

On conclut que

$$|p_m - p_n| \leq \prod_{k=n_0}^{m} (1+|v_k|) - \prod_{k=n_0}^{n} (1+|v_k|) = q_m - q_n.$$

4. En combinant la convergence de la suite $(q_n)_{n \geq n_0}$ et la question précédente, on obtient que la suite $(p_n)_{n \geq n_0}$ est de Cauchy. Il reste à invoquer le caractère complet de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ pour conclure.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Observons tout d'abord que

$$|1+z|(1-|z|) \leq (1+|z|)(1-|z|) = 1 - |z|^2 \leq 1.$$

Il s'ensuit

$$|1+z| \leq \frac{1}{1-|z|}$$

ou encore

$$\ln|1+z| \leq -\ln(1-|z|). \tag{2}$$

Par ailleurs, il découle de $|1+z| \geq 1-|z| > 0$ l'inégalité

$$-\ln|1+z| \leq -\ln(1-|z|). \tag{3}$$

Il reste à combiner (2) et (3) pour conclure que

$$|\ln|1+z|| \leq -\ln(1-|z|).$$

6. Puisque $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 0$, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $|v_n| < 1$. La question précédente donne alors

$$\sum_{k=N}^{n} |\ln|u_k|| = \sum_{k=N}^{n} |\ln|1+v_k|| \leq -\sum_{k=N}^{n} \ln(1-|v_k|) \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Par ailleurs, grâce à l'équivalent $-\ln(1-|v_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n| \geq 0$ et à la convergence de la série $\sum |v_n|$, nous savons que la série $\sum -\ln(1-|v_n|)$ converge. On en déduit que la série numérique à termes positifs $\sum |\ln|u_k||$ à ses sommes partielles majorées dans $\mathbb{R}$, i.e., $\sum |\ln|u_k||$ converge.
7. La convergence de la série $\sum \ln|u_k|$ entraîne (voir Question 1 de la Section 3) la convergence du produit infini $\prod |u_k|$. Si $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n_0}^{n} |u_k| = 0$ et ceci nous dit en particulier que $\prod |u_k|$ diverge : une contradiction. On conclut $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k \neq 0$.

5 Sinus cardinal et produit infini

1. (a) Avec $\theta' := (2p+1)\theta$, il est clair que $\mathfrak{Im}(e^{i\theta'}) = \sin(\theta')$. Par ailleurs, l'identité de Moivre et le binôme de Newton donnent

$$e^{i\theta'} = \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \cos^{2p+1-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta).$$

L'égalité désirée découle alors de

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Im}\Big(\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \cos^{2p+1-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)\Big) \\
=&\mathfrak{Im}\Big(\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2(p-k)}(\theta) i^{2k+1} \sin^{2k+1}(\theta)\Big) \\
=&\mathfrak{Im}\Big(i\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} i^{2k} \big(\cos^2(\theta)\big)^{p-k} \sin^{2k+1}(\theta)\Big) \\
=&\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k \big(1-\sin^2(\theta)\big)^{p-k} \sin^{2k+1}(\theta) \\
=&(-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} \big(\sin^2(\theta)-1\big)^{p-k} \sin^{2k+1}(\theta) \\
=&Q\big(\sin(\theta)\big).
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \{0, \dots, p\}$ un entier fixé. Par commodité, nous allons étudier le degré d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ (plutôt que des fonctions polynomiales). On a tout de suite

$$\deg \binom{2p+1}{2k+1} X^{2k+1}(X^2-1)^{p-k} = 2p+1.$$

Puisque $c := \sum_{l=0}^{p} \binom{2p+1}{2l+1} > 0$, on a

$$\deg \sum_{l=0}^{p} \binom{2p+1}{2l+1} X^{2l+1}(X^2-1)^{p-l} = 2p+1.$$

On en déduit que la fonction polynôme Q est de degré $2p+1$ et de coefficient dominant $(-1)^p c$. Nous allons maintenant obtenir une expression explicite de c. Via le binôme de Newton, on a par écrire que

$$2^{2p+1} = (1+1)^{2p+1} = \sum_{l=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{l}$$

et

$$0 = (1-1)^{2p+1} = \sum_{l=0}^{2p+1} (-1)^l \binom{2p+1}{l}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{\substack{0\leq l\leq 2p+1\\ l\text{ pair}}} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ l \end{pmatrix} = c \quad \text{puis} \quad 2c = 2^{2p+1}.$$

On conclut que Q a pour coefficient dominant $(-1)^p 4^p$.

(c) Via (a), on observe sans difficultés que pour tout $k \in K := \{-p, \dots, p\}$

$$Q\big(\sin(\alpha_k)\big) = \sin(k\pi) = 0.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{-p, \dots, p\}$, $s_k := \sin(\alpha_k)$ est racine de Q. L'inclusion $\alpha_k \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[=: I$ valide pour chaque $k \in K$ et l'injectivité de sin sur I nous disent que les éléments de la famille $(s_k)_{k\in K}$ sont deux à deux distincts. Par ailleurs, (b) entraîne évidemment que Q a au plus $2p+1$ racines. On conclut que l'ensemble des racines de Q est $\{s_k : k \in K\}$.

(d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les deux questions précédentes permettent d'écrire

$$\sin[(2p+1)\theta] = (-4)^p \prod_{k=-p}^{p} \big(\sin(\theta) - \sin(\alpha_k)\big) = (-4)^p \sin(\theta) \prod_{\substack{-p\leq k\leq p\\ k\neq 0}} \big(\sin(\theta) - \sin(\alpha_k)\big).$$

En observant que l'imparité de sin donne $\sin(\alpha_{-k}) = -\sin(\alpha_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il vient

$$\sin[(2p+1)\theta] = (-4)^p \sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} \big(\sin^2(\theta) - \sin^2(\alpha_k)\big).$$

On aboutit alors à

$$\sin[(2p+1)\theta] = 4^p \sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} \big(\sin^2(\alpha_k) - \sin^2(\theta)\big).$$

(e) En exploitant l'égalité

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

dans la question précédente, on obtient

$$2p+1 = 4^p \prod_{k=1}^{p} \sin^2(\alpha_k).$$

Il reste à observer que $\sin(\alpha_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ pour obtenir que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin[(2p+1)\theta] = \sin(\theta)(2p+1) \prod_{k=1}^{p} \sin^{-2}(\alpha_k)\big(\sin^2(\alpha_k) - \sin^2(\theta)\big).$$

L'égalité voulue en découle aisément.

(a) Il suffit d'écrire

$$\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = (\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}) = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

(b) On a pour tout $\theta \in D$ avec $D := \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}
\sin[(2p+1)\theta] = Q\big(\sin(\theta)\big) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \left(\begin{array}{c} 2p+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \sin^{2k+1}(\theta)(\sin^2(\theta) - 1)^{p-k} \\
= \sin(\theta)\cos^{2p}(\theta) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\begin{array}{c} 2p+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \sin^{2k}(\theta)\cos^{-2k}(\theta) \\
= \sin(\theta)\cos^{2p}(\theta) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\begin{array}{c} 2p+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \tan^{2k}(\theta) \\
= \sin(\theta)\cos^{2p}(\theta) T\big(\tan(\theta)\big),
\end{aligned}$$

avec $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(x) := \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\begin{array}{c} 2p+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) x^{2k} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

qui est bien sûr une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré $2p$.

(c) Fixons pour un moment un entier $k \in \{-p, \ldots, p\}$ non nul. On a vu que

$$\sin[(2p+1)\alpha_k] = Q\big(\sin(\alpha_k)\big) = \sin(\alpha_k)\cos^{2p}(\alpha_k) T\big(\tan(\alpha_k)\big).$$

Par ailleurs, puisque $\alpha_k \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, on a $\sin(\alpha_k)\cos^{2p}(\alpha_k) \neq 0$. Il s'ensuit

$$T\big(\tan(\alpha_k)\big) = 0,$$

i.e., $\tan(\alpha_k)$ est racine de T. Il reste à observer que T est de degré $2p$ pour conclure que l'ensemble des racines de T n'est nul autre que

$$\{\tan \alpha_k : k \in \{-p, \ldots, p\}, k \neq 0\}.$$

(d) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$\tan(\alpha_{-k}) = \tan(-\alpha_k) = -\tan(\alpha_k).$$

Ceci et les questions précédentes donnent alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T(x) = (-1)^p \prod_{k=1}^{p} \big(x - \tan(\alpha_k)\big)\big(x + \tan(\alpha_k)\big) = \prod_{k=1}^{p} \big(\tan^2(\alpha_k) - x^2\big).$$

L'égalité souhaitée est ainsi justifiée.

(e) D'après ce qui précède, on a

$$T\big(\tan(\theta)\big) = \prod_{k=1}^{p} \tan^2(\alpha_k)\big(1 - \frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)}\big) \quad \text{pour tout } \theta \in D.$$

Ceci et les égalités $T(0) = 2p+1 = \prod_{k=1}^{p} \tan^2(\alpha_k)$ permettent de conclure que

$$T(\tan(\theta)) = (2p+1) \prod_{k=1}^{p} (1 - \frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)}) \quad \text{pour tout } \theta \in D.$$

(f) L'égalité demandée découle immédiatement de la question précédente de la Question 2.(b).

2. Soient $0 < x \leq y < \frac{\pi}{2}$. Il suffit d'observer que la fonction tan est convexe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ pour pouvoir écrire (voir Rappel 3.)

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} \leq \frac{\tan(y) - \tan(0)}{y - 0},$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\tan(x)}{\tan(y)} \leq \frac{x}{y}.$$

De même, la concavité de sin sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donne

$$\frac{-\sin(x) + \sin(0)}{x - 0} \leq \frac{-\sin(y) + \sin(0)}{y - 0}$$

et ceci s'écrit encore

$$\frac{x}{y} \leq \frac{\sin(x)}{\sin(y)}.$$

L'encadrement désiré est ainsi démontré.

3. Soit $\theta \in]0, \alpha_1[$. Observons tout d'abord que

$$0 < \theta < \alpha_k < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, p\}.$$

La question précédente donne alors facilement

$$\frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)} \leq \frac{\theta^2}{\alpha_k^2} \leq \frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\alpha_k)} < 1 \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, p\}.$$

En combinant ceci et la Question 1.(e), il vient

$$\sin[(2p+1)\theta] \leq (2p+1)\sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} (1 - \frac{\theta^2}{\alpha_k^2}) \leq (2p+1)\sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} (1 - \frac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\alpha_k)})$$

Il reste alors à exploiter la Question (f) ci-dessus pour aboutir à l'encadrement désiré, à savoir

$$\sin[(2p+1)\theta] \leq (2p+1)\sin(\theta) \prod_{k=1}^{p} (1 - \frac{\theta^2}{\alpha_k^2}) \leq \frac{\sin[(2p+1)\theta]}{\cos^{2p}(\theta)}.$$

4. (a) D'après 4., on a

$$\sin(t) \leq (2p+1)\sin(\frac{t}{2p+1}) \prod_{k=1}^{p} (1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}) \leq \frac{\sin(t)}{\cos^{2p}(\frac{t}{2p+1})}.$$

(b) On a pour tout $n \geq 1$,

$$\cos^{2n}\left(\frac{t}{2n+1}\right) = e^{2n \ln[\cos\left(t/(2n+1)\right)]}.$$

En exploitant $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ et $\cos(x)-1 \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, il vient

$$2n\ln[\cos(\frac{t}{2n+1})] \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\Big(\cos\big(\frac{t}{2n+1}\big)-1\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{nt^2}{(2n+1)^2}.$$

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\ln[\cos\big(\frac{t}{2n+1}\big)] = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \cos^{2n}\big(\frac{t}{2n+1}\big) = 1.$$

(c) Via (a) ci-dessus, on a

$$\frac{\sin(t)}{t} \leq \frac{2p+1}{t}\sin(\frac{t}{2p+1})\prod_{k=1}^{p}(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}) \leq \frac{\sin(t)}{t\cos^{2p}(\frac{t}{2p+1})}.$$

Il reste à passer à la limite lorsque $p\to+\infty$ pour aboutir à l'égalité voulue.

(d) La relation ci-dessus s'étend à $[0,\pi[$ pourvu que l'on étende la fonction $x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ par continuité en 0. Par ailleurs, la parité de sin permet d'étendre cette même relation à $]-\pi,\pi[$.