

Déterminants

Exercice 1 (★)

- Soient $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que :
 - A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
 - $\det(A) = \det(A^T)$.
 - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et en général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
 - S'il existe $P \in M_2(\mathbb{R})$ inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$, alors

$$\det(A) = \det(B).$$

- Soient $a, b, c, d, x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & b \\ \alpha c + \beta y & d \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} x & b \\ y & d \end{pmatrix}$$

et

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (★★) Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ e & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (★★) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner sous une forme factorisée les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (★★) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(ae_1 - e_2 - e_4, -e_1 + ae_2 - e_3, -e_2 + ae_3 - e_4, -e_1 - e_3 + ae_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 (★★) Déterminer l'ensemble des réels m tels que la matrice

$$M_m := \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m - 1 & 2m - 1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit inversible dans $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (★★★) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et toute famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exercice 7 (★★★) Soient $n \geq 2$ un entier, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *déterminant de Vandermonde* $V(x_1, \dots, x_n)$ l'élément de $\mathbb{K}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice ci-dessus.

1. Appliquer l'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$ au déterminant $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. Poursuivre avec les opérations élémentaires $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$.
3. Effectuer un développement judicieux selon une ligne ou une colonne.
4. Montrer que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$.

Exercice 8 (★★★) Soit $n \geq 2$ un entier. Exprimer le déterminant en fonction de n de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n & n & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9 (★★★) Soient $n \geq 2$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\det(A + M) = \det(A) + \det(M) \quad \text{pour tout } M \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $A \notin GL_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier l'existence d'un entier $r \in \{0, \dots, n-1\}$ et de $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P J_r Q$$

avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r représente la matrice identité de $M_r(\mathbb{R})$.

3. Calculer $\det(M)$ avec $M = PQ - A$. Conclure.

Exercice 10 (★★★) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. On considère les hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (a+b)^2 x + c^2 y + c^2 z = 0\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 x + (b+c)^2 y + a^2 z = 0\}$$

et

$$\mathcal{P}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b^2 x + b^2 y + (c+a)^2 z = 0\}.$$

On note D le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces hyperplans vectoriels aient uniquement en commun $(0, 0, 0)$.
2. Montrer que

$$D = \det \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 \\ a^2 & (b+c)^2 - a^2 & 0 \\ b^2 & 0 & (c+a)^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire

$$D = (a+b+c)^2 \det \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c-a-b & c-a-b \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{pmatrix}.$$

4. Par des opérations sur les lignes, établir que

$$D = 2(a+b+c)^2 \det \begin{pmatrix} ab & -b & -a \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{pmatrix}.$$

5. Via un développement selon une ligne ou une colonne, donner D sous une forme factorisée.
6. Revenir à la Question 1 et conclure.

Exercice 11 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$, $A + tI_n$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$.