

## Chapitre 2 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

### 1 Représentation matricielle d'une application linéaire

**Exercice 1 (★)** On considère les applications linéaires  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définies pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = (y, 2x + 3y, x).$$

On note  $\beta_2$  (resp.  $\beta_3$ ) la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  (resp. de  $\mathbb{R}^3$ ).

1. Déterminer les matrices associées à  $f$  et à  $g$  relativement à  $\beta_2$  et à  $\beta_3$  (c'est-à-dire les matrices  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f)$  et  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(g)$ ).
2. Déterminer de deux manières différentes la matrice  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f + g)$ .
3. Déterminer de deux manières différentes la matrice de l'application linéaire  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(7f)$ .

**Solution.**

1. Rappelons que  $\beta_2 = (b_1, b_2)$  et  $\beta_3 = (c_1, c_2, c_3)$  avec  $b_1 = (1, 0)$ ,  $b_2 = (0, 1)$ ,  $c_1 = (1, 0, 0)$ ,  $c_2 = (0, 1, 0)$  et  $c_3 = (0, 0, 1)$ . En écrivant

$$f(b_1) = (1, 1, 1) = 1.c_1 + 1.c_2 + 1.c_3$$

et

$$f(b_2) = (1, -1, 1) = 1.c_1 + (-1).c_2 + 1.c_3$$

nous obtenons

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on montre que

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. L'application  $f + g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (x + y, x - y, x + y) + (y, 2x + 3y, x) = (x + 2y, 3x + 2y, 2x + y).$$

D'après le cours, nous savons (et ceci se vérifie également directement) que  $f + g$  est linéaire. On a tout de suite

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f + g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une autre manière d'obtenir  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f + g)$  est d'écrire (voir le cours)

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f + g) = \text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f) + \text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. L'application  $7f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est définie par

$$(7f)(x, y) = 7f(x, y) = (7x + 7y, 7x - 7y, 7x + 7y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

D'après le cours (et ceci se vérifie facilement) l'application  $7f$  est linéaire. Par ailleurs, on voit que

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(7f) = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & -7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Une autre manière d'obtenir  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(7f)$  est d'écrire (voir le cours)

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(7f) = 7\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f) = 7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & -7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 2 (★)** On considère les applications linéaires  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définies par

$$f(x, y) = (y, x + 2y, -x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$g(x, y, z) = (x + y, -y + z, x + y + z, z) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

On note respectivement  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et  $\beta_4$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^4$ .

1. Déterminer les matrices  $\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f)$  et  $\text{Mat}_{\beta_4, \beta_3}(g)$ .
2. Calculer  $f(1, 2)$  et  $g(3, 4, 5)$  de deux manières différentes.
3. Déterminer de deux manières différentes la matrice  $\text{Mat}_{\beta_4, \beta_2}(g \circ f)$ .

**Solution.**

1. On vérifie que

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\beta_4, \beta_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On peut bien sûr revenir à la définition de  $f$  et  $g$  pour obtenir  $f(1, 2) = (2, 5, -1)$  et  $g(3, 4, 5) = (7, 1, 12, 5)$ . On peut également utiliser le produit matrice/vecteur colonne en écrivant

$$\text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\beta_4, \beta_3}(g) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. L'application  $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  est définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(y, x + 2y, -x) = (x + 3y, -2x - 2y, 3y, -x).$$

On en déduit

$$\text{Mat}_{\beta_4, \beta_2}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une autre manière d'obtenir cette matrice est d'utiliser l'égalité (voir le cours)

$$\text{Mat}_{\beta_4, \beta_2}(g \circ f) = \text{Mat}_{\beta_4, \beta_3}(g) \text{Mat}_{\beta_3, \beta_2}(f).$$

On trouve alors

$$\text{Mat}_{\beta_4, \beta_2}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 3 (★★)** On considère l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y) = (y, x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On note  $\beta = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et on vérifie que la famille  $\gamma = (2e_1 + 3e_2, 4e_1 + 5e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer les matrices  $\text{Mat}_{\beta, \beta}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\beta, \gamma}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$  et  $\text{Mat}_{\gamma, \gamma}(f)$ .

**Solution.** On a sans difficultés  $f(e_1) = e_2$  et  $f(e_2) = e_1$ , d'où l'on tire

$$\text{Mat}_{\beta, \beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose  $\varepsilon_1 := 2e_1 + 3e_2$  et  $\varepsilon_2 := 4e_1 + 5e_2$ . Il est clair que la famille  $\gamma := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Les égalités  $f(\varepsilon_1) = 3e_1 + 2e_2$  et  $f(\varepsilon_2) = 5e_1 + 4e_2$  donnent tout de suite

$$\text{Mat}_{\beta, \gamma}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir  $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ , il nous faut exprimer  $f(e_1) = e_2$  et  $f(e_2) = e_1$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Commençons par  $f(e_1) = e_2$ . Il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $e_2 = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$  et ceci entraîne

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit  $\alpha = 2$  et  $\beta = -1$ . On conclut que  $e_2 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ . En procédant de même pour  $f(e_2) = e_1$  on obtient  $e_1 = -\frac{5}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2$ . Ainsi, nous avons

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer  $\text{Mat}_{\gamma, \gamma}(f)$ . Il nous faut donc exprimer  $f(\varepsilon_1)$  et  $f(\varepsilon_2)$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . On a (en tenant compte de ce qui précède)

$$f(\varepsilon_1) = 3e_1 + 2e_2 = 3(-\frac{5}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2) + 2(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

ce qui s'écrit encore  $f(\varepsilon_1) = -\frac{7}{2}\varepsilon_1 + \frac{5}{2}\varepsilon_2$ . De même, on a

$$f(\varepsilon_2) = 5e_1 + 4e_2 = -\frac{9}{2}\varepsilon_1 + \frac{7}{2}\varepsilon_2.$$

On conclut

$$\text{Mat}_{\gamma, \gamma}(f) = \begin{pmatrix} -7/2 & -9/2 \\ 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

■

## 2 Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$

**Exercice 4 (★)** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D = (0 \quad 1 \quad 2), E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (si possible !)  $X + Y$  et  $2X$  avec  $X, Y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ .

**Solution.** Concernant l'addition,  $X + X$  a un sens pour  $X \in \{A, B, C, D, E, F\}$ ,  $C + F$  et  $F + C$  ont un sens. Les matrices  $2A, 2B, 2C, 2D, 2E, 2F$  ont un sens. Les applications numériques sont laissées aux lecteurs. ■

**Exercice 5 (★★)**

1. Soit  $E$  l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ . Donner une base et sa dimension. Déterminer l'ensemble  $\{M \in E : M^2 = -I_2\}$ .

2. Soit

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$  dont on donnera une base et la dimension.

**Solution.**

1. On montre sans difficultés que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ . Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la famille  $\mathcal{B} = \left\{ I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  est génératrice de  $E$ . Elle est évidemment libre dans  $M_2(\mathbb{R})$ . Ainsi,  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , ce qui nous dit que  $E$  est de dimension 2.

Notons  $A = \{M \in E : M^2 = -I_2\}$ . Soit  $M_0 \in A$ . D'après ce qui précède, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$M_0 = \lambda I_2 + \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \mu^2 & -2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On en déduit  $\lambda = 0$  et  $\mu \in \{-1, 1\}$ . On a donc montré l'inclusion

$$A \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'inclusion renversée étant immédiate, on a l'égalité

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Commençons par observer que  $T$  est une partie de  $M_3(\mathbb{R})$  qui contient  $0_{M_3(\mathbb{R})}$ . Soient  $M_1, M_2 \in T$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Pour chaque  $i \in \{1, 2\}$ , il existe  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$  tels que

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & b_i \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & 0 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix}.$$

En posant  $\alpha = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ ,  $\beta = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ ,  $\gamma = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$  et  $\delta = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ , on a

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \in T.$$

Ainsi,  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ . Soit  $M \in T$ . Par définition de  $T$ , il existe  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  tels que

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Ceci s'écrit encore

$$M = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la famille  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  est génératrice de  $T$ . Il reste à vérifier que cette même famille est libre dans  $M_3(\mathbb{R})$ . Donc,  $\mathcal{B}$  est une base de  $T$  et  $T$  est donc de dimension 4.

■

### 3 Produit matriciel

**Exercice 6 (★)** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D = (0 \quad 1 \quad 2), E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (si possible!)  $XY$  avec  $X, Y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ .

**Solution.** Les produits matriciels qui ont un sens sont :  $AB, AE, BD, CA, C^2, CF, DB, DE, EA,$

$EC, EF, FA, FC, F^2$ . Leur calcul donne

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}, & AE &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, & BD &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \\ CA &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 11 & 20 & 14 \end{pmatrix}, & C^2 &= \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 20 & 19 \end{pmatrix}, & CF &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}, \\ DB &= (8), & DE &= (3 \ 3), & EA &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \\ EC &= \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, & EF &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, & FA &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \\ FC &= \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, & F^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

**Exercice 7 (★★)** Que dire d'une matrice  $A \in M_2(\mathbb{K})$  telle que  $AM = MA$  pour tout  $M \in M_2(\mathbb{K})$ ? Pouvez-vous étendre votre résultat à  $M_n(\mathbb{K})$  pour tout  $n \geq 2$ ?

**Solution.** On exploite l'hypothèse avec les matrices élémentaires. On note  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . On a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire  $b = 0$  et  $c = 0$ . De même, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit  $a = d$ . En conclusion  $A = \alpha I_2$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Réciproquement, toute matrice de la forme  $\beta I_2$  commute avec tout élément de  $M_2(\mathbb{K})$ . Ce résultat s'étend sans difficulté au cadre de  $M_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$ . ■

**Exercice 8 (★★)** Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Examiner la diagonale du produit.

**Solution.** On montre uniquement le cas triangulaire supérieur. Soit  $n \geq 2$  un entier fixé. Pour une matrice  $M \in M_n(\mathbb{K})$ , on note  $(M)_{p,q}$  le coefficient de  $M$  en ligne  $p$  et en colonne  $q$ . Soient  $R, T$  deux matrices triangulaires supérieures à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de taille  $n$ . On a pour tout  $p, q \in \{1, \dots, n\}$  avec  $p > q$ ,

$$(RT)_{p,q} = \sum_{k=1}^n (R)_{p,k} (T)_{k,q} = \sum_{k=p}^n (R)_{p,k} (T)_{k,q} = 0$$

et ceci montre que  $RT$  est triangulaire supérieure. Observons également que les coefficients diagonaux de  $RT$  sont les produits des coefficients diagonaux de  $R$  et  $T$  puisque pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$(RT)_{p,p} = \sum_{k=1}^n (R)_{p,k} (T)_{k,p} = \sum_{k=p}^n (R)_{p,k} (T)_{k,p} = (R)_{p,p} (T)_{p,p}$$

■

**Exercice 9 (★★★)** Soit  $n \geq 1$  un entier. Pour  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ , déterminer le produit matriciel  $E_{i,j}E_{k,l}$ .

**Solution.** Puisque  $E_{i,j}$  et  $E_{k,l}$  sont des matrices carrées, le produit matriciel  $E_{i,j}E_{k,l}$  est bien défini. Soient  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ . On note  $a_{p,q}$  (resp.  $b_{p,q}$ ) le coefficient en  $p$ -ième ligne et  $q$ -ème colonne de  $E_{i,j}$  (resp. de  $E_{k,l}$ ). Par définition du produit matriciel, le coefficient en  $p$ -ième ligne et en  $q$ -ième colonne de la matrice  $E_{i,j}E_{k,l}$  est donné par

$$c_{p,q} = \sum_{m=1}^n a_{p,m}b_{m,q}.$$

La définition de  $E_{i,j}$  donne tout de suite

$$c_{p,q} = a_{p,j}b_{j,q}.$$

Or, on a

$$a_{p,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$b_{j,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \text{ et } q = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$c_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = i, j = k \text{ et } q = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On conclut que

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l},$$

où  $\delta_{j,k}$  désigne le *symbole de Kronecker* défini par

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

**Exercice 10 (★★★)** Montrer que le produit matriciel est associatif.

**Solution.** Soient  $m, n, p$  et  $q$  quatre entiers  $\geq 1$ . Soient  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ . On fixe  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Pour une matrice  $M$ , on note  $(M)_{r,s}$  le coefficient en  $r$ -ème ligne et en  $s$ -ème colonne de  $M$ . On pose  $D = (AB)C$  et  $E = A(BC)$ . Par définition du produit matriciel, on a

$$(D)_{i,j} = \sum_{k=1}^p (AB)_{i,k}(C)_{k,j}.$$

Toujours par définition du produit matriciel, il vient

$$(D)_{i,j} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n (A)_{i,l}(B)_{l,k} \right) (C)_{k,j} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n (A)_{i,l}(B)_{l,k}(C)_{k,j} \right).$$

Avant de poursuivre, il convient de rappeler que pour n'importe quelle famille  $(u_{k,l})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq n}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on a

$$\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n u_{k,l} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p u_{k,l}.$$

Il reste alors à écrire

$$(D)_{i,j} = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^p (A)_{i,l} (B)_{l,k} (C)_{k,j} \right) = \sum_{l=1}^n (A)_{i,l} \left( \sum_{k=1}^p (B)_{l,k} (C)_{k,j} \right)$$

pour aboutir à l'égalité désirée, à savoir

$$(D)_{i,j} = (E)_{i,j}.$$

Nous concluons que  $D = E$ , i.e.,  $(AB)C = A(BC)$ . ■

## 4 Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence

**Exercice 11 (★★)** Soit  $n \geq 1$  un entier. Que dire de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  qui vérifie

$$\text{tr}(AA^T) = 0?$$

Que dire si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ?

**Solution.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  satisfaisant  $\text{tr}(AA^T) = 0$ . Notons  $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$ . Un calcul élémentaire montre que

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}^2 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & \sum_{k=1}^n a_{n,k}^2 \end{pmatrix},$$

où les  $*$  désignent des scalaires qu'il n'est pas utile de déterminer ici. On obtient alors

$$\text{tr}(AA^T) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,k}^2 = 0$$

ce qui entraîne que  $a_{p,q} = 0$  pour chaque  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ , i.e.,  $A = 0$ .

La propriété n'a plus lieu pour des matrices à coefficients complexes. On pourra par exemple le constater avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . ■

**Exercice 12 (★★)** Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

**Solution.** Soient  $n \geq 1$  un entier,  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe deux entiers  $k, l \geq 1$  tels que  $A^k = 0 = B^l$ . En posant  $m = \max\{k, l\} \geq 1$ , on a tout de suite

$$A^m = 0 = B^m.$$

Le fait que  $AB = BA$  donne alors

$$(AB)^m = A^m B^m = 0$$

et ceci nous dit en particulier que  $AB$  est nilpotente.

Pour obtenir que  $A + B$  est également nilpotente, on fait appel au binôme de Newton (ce qui est possible puisque  $AB = BA$ ) en écrivant

$$(A + B)^{2m} = \sum_{k=m}^{2m} \binom{2m}{k} A^k B^{2m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} A^k B^{2m-k} = 0.$$

■



**Exercice 13 (★★)** Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont nilpotentes. Les matrices  $A + B$  et  $AB$  sont-elles nilpotentes ?

**Solution.** On vérifie que  $A^2 = B^2 = 0$ . D'autre part,  $(A + B)^2 = I_2$ , donc  $A + B$  n'est pas nilpotente. Enfin, une récurrence immédiate montre que pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$(AB)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en particulier  $AB$  n'est pas nilpotente. ■

**Exercice 14 (★★)** Soit  $n \geq 1$  un entier. Montrer que pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et pour tout  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B) \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

**Solution.** Seule la deuxième inégalité mérite d'être justifiée. Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Pour chaque  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $c_{p,q}$  (resp.  $d_{p,q}$ ) le coefficient en  $p$ -ème ligne et  $q$ -ème colonne de la matrice  $AB$  (resp.  $BA$ ). Par définition de la trace, on a

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} b_{lk}.$$

Avant de poursuivre, il convient de rappeler que pour n'importe quelle famille  $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{i,j}.$$

A l'aide de cette égalité, nous pouvons conclure que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} b_{lk} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{lk} a_{kl} = \sum_{l=1}^n d_{l,l} = \operatorname{tr}(BA).$$

■

**Exercice 15 (★★)** Soient  $A, B \in M_2(\mathbb{K})$  telles que pour tout  $X \in M_2(\mathbb{K})$ ,  $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$ . Montrer que  $A = B$ . Ce résultat s'étend-t-il à  $M_n(\mathbb{K})$  pour tout  $n \geq 2$  ?

**Solution.** Il suffit d'utiliser les matrices élémentaires. Ce résultat s'étend à n'importe quelle taille de matrices carrées. ■

**Exercice 16 (★)** Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Montrer que pour tout entier  $p \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Ceci découle d'une récurrence immédiate. ■

**Exercice 17 (★★)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . On pose  $B = A - 2I_3$ . Calculer  $B^n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . En déduire  $A^n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Solution.** On vérifie tout de suite que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = 0.$$

En tenant compte de ceci et du fait que  $B$  et  $2I_3$  commutent nous pouvons utiliser le binôme de Newton pour écrire

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^2 2^{n-k} \binom{n}{k} B^k.$$

■

**Exercice 18 (★★)** Soient  $n \geq 1$ ,  $M \in M_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $M^{n+1} = 0$ . Montrer que  $M^n = 0$ .

**Solution.** Supposons par l'absurde que  $M^n \neq 0$ . Il existe alors  $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que  $M^n X \neq 0$ . Puisque  $\dim M_{n,1}(\mathbb{K}) = n$ , la famille  $\mathcal{F} := (M^k X)_{0 \leq k \leq n}$  d'éléments de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  de cardinal  $n+1$  est nécessairement liée. Nous allons montrer qu'elle est libre et donc conclure à une contradiction. Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k M^k X = 0.$$

En multipliant chaque membre de l'égalité ci-dessus par  $M^n$ , il vient

$$M^n \left( \sum_{k=0}^n \lambda_k M^k X \right) = 0.$$

En exploitant les égalités  $M^{n+1} = \dots = M^{2n} = 0$ , on aboutit à

$$0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k M^{n+k} X = \lambda_0 X.$$

On montre de même que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Ceci confirme que la famille  $\mathcal{F}$  est libre. ■

**Exercice 19 (★★)**

1. Etablir que  $S_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Etablir que  $A_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
3. Déterminer  $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$ .
4. Montrer de deux manières différentes que  $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ .

**Solution.**

1. On a évidemment  $0_{M_n(\mathbb{K})} \in S_n(\mathbb{K})$ . Ceci et le fait que pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $M_1, M_2 \in S_n(\mathbb{K})$

$$(\lambda M_1 + \mu M_2)^T = \lambda M_1^T + \mu M_2^T = \lambda M_1 + \mu M_2$$

montrent que  $S_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$ .

Fixons  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{K})$ . On peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n m_{k,k} E_{k,k} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}),$$

où pour chaque  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_{p,q}$  désigne la matrice élémentaire de taille  $n$  avec pour seul coefficient non nul en ligne  $p$  et en colonne  $q$  (égal à 1). Pour chaque  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \leq j$ , posons

$$A_{i,j} := \begin{cases} E_{i,i} & \text{si } i = j, \\ E_{i,j} + E_{j,i} & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que

$$M = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_{i,j} A_{i,j}.$$

Ceci nous dit que  $S_n(\mathbb{K})$  est engendré par la famille  $(A_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  qui possède  $n + \sum_{i=1}^n (n-i) = \frac{n(n+1)}{2}$  éléments. Montrons que cette famille est libre. Soit  $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  telle que

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{K})}.$$

En remarquant que cette dernière égalité s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \cdots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

on conclut aisément que  $\lambda_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \leq j$ .

2. On a évidemment  $0_{M_n(\mathbb{K})} \in A_n(\mathbb{K})$ . Ceci et le fait que pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $M_1, M_2 \in A_n(\mathbb{K})$

$$(\lambda M_1 + \mu M_2)^T = \lambda M_1^T + \mu M_2^T = -(\lambda M_1 + \mu M_2)$$

montrent que  $A_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$ .

Fixons  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in A_n(\mathbb{K})$ . Commençons par remarquer que tous les termes diagonaux de  $M$  sont nuls de sorte que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i}),$$

où pour chaque  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_{p,q}$  désigne la matrice élémentaire de taille  $n$  avec pour seul coefficient non nul en ligne  $p$  et en colonne  $q$  (égal à 1). En posant pour chaque  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i < j$

$$A_{i,j} := E_{i,j} - E_{j,i}$$

on peut écrire

$$M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} A_{i,j}.$$

Ceci nous dit que  $S_n(\mathbb{K})$  est engendré par la famille  $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  qui possède  $\sum_{i=1}^n (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$  éléments. Montrons que cette famille est libre. Soit  $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  telle que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{K})}.$$

En remarquant que cette dernière égalité s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ -\lambda_{1,2} & 0 & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{1,n} & -\lambda_{2,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

on conclut aisément que  $\lambda_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i < j$ .

3. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice à la fois symétrique et antisymétrique. Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ . La symétrie de  $A$  donne  $a_{i,j} = a_{j,i}$  tandis que l'antisymétrie nous dit que  $a_{j,i} = -a_{i,j}$ . On a donc  $a_{i,j} = -a_{i,j}$  et ceci nous dit que  $a_{i,j} = 0$ . On conclut que  $A$  est nulle, i.e.,  $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ .
4. Commençons par observer que  $S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ . Nous allons établir l'inclusion renversée de deux manières différentes.

**Méthode 1 :** On a d'une part de  $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$  et d'autre part (d'après les deux premières questions)

$$\dim S_n(\mathbb{K}) + \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Il s'ensuit que  $S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$  et  $M_n(\mathbb{K})$  ont la même dimension.

**Méthode 2 :** Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$ . Remarquons que  $M = A + B$  avec  $A := \frac{1}{2}(M + M^T)$  qui est une matrice symétrique et  $B := \frac{1}{2}(M - M^T)$  qui est une matrice antisymétrique. On a alors  $M_n(\mathbb{K}) \subset S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$ .

Ainsi, quelque soit la méthode choisie, nous avons  $S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ . Il reste à exploiter la question précédente pour conclure  $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ .

■

## 5 Inversibilité et rang

**Exercice 20 (★★)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . Calculer  $A^4$ . En déduire que  $A$  est inversible dans  $M_3(\mathbb{R})$  et donner l'expression de  $A^{-1}$ .

**Solution.** On vérifie facilement que  $A^4 = I_3$ . On en déduit

$$AA^3 = A^4 = I_3 = A^3A$$

ce qui traduit l'inversibilité de  $A$  d'inverse

$$A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 21 (★)** Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ?

**Solution.** Soit  $n \geq 1$  un entier et  $M \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente. Par définition, il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $M^k = 0$ . Si  $M$  était inversible, on aurait

$$M^{k-1} = M^{-1}M^k = 0$$

puis de même,  $M^{k-2} = \dots = M = 0$ . ■

**Exercice 22 (★★)** Soient  $n \geq 1$  un entier,  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = A + B$ . Montrer que  $A$  et  $B$  commutent. *Indication :* Développer le produit  $(A - I_n)(B - I_n)$ .

**Solution.** On commence par écrire

$$(A - I_n)(B - I_n) = AB - A - B + I_n = I_n. \quad (1)$$

Ceci entraîne que  $A - I_n$  et  $B - I_n$  sont inversibles dans  $M_n(\mathbb{R})$  et sont inverses l'une de l'autre. En particulier, on a

$$(B - I_n)(A - I_n) = I_n.$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire donne

$$(B - I_n)(A - I_n) = BA - B - A + I_n = I_n. \quad (2)$$

Il reste à combiner (1) et (2) pour conclure que  $AB = BA$ . ■

**Exercice 23 (★★)** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . Montrer que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible dans  $M_2(\mathbb{K})$  si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Lorsque  $ad - bc \neq 0$  exprimer l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$ . *Indication :* On pourra montrer que  $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$ .

**Solution.** Un calcul élémentaire permet de vérifier l'égalité donnée par l'indication

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0. \quad (3)$$

$\Rightarrow$ , Supposons que  $A$  soit inversible dans  $M_2(\mathbb{K})$ . Par l'absurde, supposons que  $ad - bc = 0$ . L'égalité ci-dessus entraîne alors que

$$A^2 - (a + d)A = 0.$$

Cette égalité associée à l'inversibilité de  $A$  entraîne que  $A = (a + d)I_2$  ce qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}.$$

On conclut que  $A = 0$  ce qui est contradictoire.  $\Leftarrow$ , Supposons que  $ad - bc \neq 0$ . Cette hypothèse combinée à l'égalité (3) donne

$$I_2 = \frac{1}{ad - bc} ((a + d)A - A^2) = \frac{1}{ad - bc} A((a + d)I_2 - A).$$

La matrice  $A$  est donc inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 24 (★★)** Soient  $n \geq 1$  un entier,  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $AB = BA$ ,  $A$  inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$  et  $B$  nilpotente. Montrer que  $A - B$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$  et calculer  $(A - B)^{-1}$ . *Indication :* trouver  $C \in M_n(\mathbb{K})$  et un entier  $p \geq 1$  tels que  $A^p - B^p = (A - B)C$ .

**Solution.** Puisque  $AB = BA$ , on a pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1}).$$

Considérons alors un entier  $p \geq 1$  tel que  $B^p = 0$  (il en existe puisque  $B$  est nilpotente). L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$A^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \dots + AB^{p-2} + B^{p-1})$$

ce qui nous dit que  $A - B$  est inversible d'inverse

$$A^{-p}(A^{p-1} + A^{p-2}B + \dots + AB^{p-2} + B^{p-1}) = A^{-1} + A^{-2}B + \dots + A^{-p}B^{p-1}.$$

■

**Exercice 25 (★★)** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^5 + A = I_n$ . Montrer que  $A^2 + A + I_n$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{R})$  et calculer son inverse. *Indication* : exploiter  $X^5 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - 2$ .

**Solution.** Via l'indication, il est clair que

$$0 = A^5 + A - I_n = (A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) - 2I_n.$$

Il découle de ceci que  $A^2 + A + I_n$  est inversible d'inverse

$$(A^2 + A + I_n)^{-1} = \frac{1}{2}(A^3 - A^2 + I_n).$$

■

**Exercice 26 (★)** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . Que vaut le rang de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ?

**Solution.** On distingue deux cas.

**Cas 1.**  $ad - bc \neq 0$ . Dans ce cas, la matrice  $A$  est inversible et donc de rang 2.

**Cas 2.**  $ad - bc = 0$ . Dans ce cas, la matrice  $A$  n'est pas inversible et

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

**Exercice 27 (★★)** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Solution.**

– On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes pour obtenir

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Noter au passage qu'on peut lire le rang de  $A$  sur la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

– De même que ci-dessus, on a

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Il n'y a nullement besoin de faire appel à Gauss pour la matrice  $C$  qui est clairement de rang 1.

– Concernant  $D$ , on a

$$\text{rg}(D) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 2.$$

– On a

$$\text{rg}(E) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

■

**Exercice 28 (★★)** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Fixons  $a, b \in \mathbb{R}$ . On a

$$\text{rg}(M_{a,b}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix}.$$

**Cas 1 :**  $a = b$ . Il vient alors

$$\text{rg}(M_{a,b}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \{-1, 1\} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

**Cas 2 :**  $a \neq b$ . Dans ce cas, on a

$$\text{rg}(M_{a,b}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = 3.$$

■

## 6 Calcul d'inverse - Résolutions de systèmes linéaires

**Exercice 29 (★)** Soient  $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ . Si possible calculer l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On rappelle que la notion d'inverse n'est définie que pour les matrices carrées ! En particulier, la matrice  $E$  n'est pas inversible. On rappelle également un résultat vu dans le TD précédent :

**Proposition.** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . Montrer que  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible dans  $M_2(\mathbb{K})$  si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Si tel est le cas, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $A$  n'est pas inversible dans  $M_2(\mathbb{R})$ . La matrice  $B$  est inversible dans  $M_2(\mathbb{R})$  d'inverse

$$B^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ , la matrice  $C$  est inversible dans  $M_2(\mathbb{R})$ . De plus, on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $D$  est inversible si et seulement si  $\alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0$ , i.e., si et seulement si  $\alpha \notin \{-2, 1\}$ .  
Si tel est le cas, on a

$$D^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha - 2} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 30 (★★)** Les éléments suivants de  $M_3(\mathbb{R})$  sont-ils inversibles dans  $M_3(\mathbb{R})$ ? Si oui, calculer les inverses.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.**

- Etudions l'inversibilité de  $A_1$ . On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 5/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que  $A_1$  est inversible d'inverse

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Via l'algorithme de Gauss, nous voyons que  $A_2$  est de rang 2, en particulier  $A_2$  n'est pas inversible dans  $M_3(\mathbb{R})$ .
- On vérifie que la matrice  $A_3$  est inversible d'inverse

$$A_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 31 (★★)** Inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Solution.** On écrit la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

puis par opérations élémentaires sur les lignes on en arrive à

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array} \right).$$

On conclut que  $A$  est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \left( \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

■

**Exercice 32 (★★)** Résoudre le système linéaire d'inconnue  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1 \\ -8x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 12x_4 = -3 \end{cases}$$

**Solution.** On écrit la matrice augmentée du système linéaire, à savoir

$$\left( \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 4 & -6 & 1 \\ -8 & -6 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & 12 & -3 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes pour obtenir successivement

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 3/4 & 1 & -3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -15 & 3 \end{array} \right)$$

puis

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 3/4 & 1 & -3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -7 \end{array} \right).$$

Ainsi, pour tout  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ , on a l'équivalence

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1 \\ -8x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 12x_4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + (3/4)x_2 + x_3 - (3/2)x_4 = 1/4 \\ x_3 - 3x_4 = 1 \\ 15x_4 = -7. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système linéaire s'écrit

$$S = \left\{ \left( -\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{20}, x_2, -\frac{6}{15}, -\frac{7}{15} \right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

**Exercice 33 (★★)** Pour  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ , on considère le système linéaire d'inconnue  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(S_b) \begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ 2x - y + z - t = b_2 \\ 3y + z + 3t = b_3 \\ 3x + 2z = b_4. \end{cases}$$

1. Expliciter l'ensemble  $U$  des  $b \in \mathbb{R}^4$  pour lesquels  $(S_b)$  admette au moins une solution.
2. Pour  $b \in U$ , résoudre le système linéaire  $(S_b)$ .
3. Existe-t-il  $b \in \mathbb{R}^4$  tel que  $(S_b)$  admette une unique solution ?

**Solution.**

1. Fixons pour un moment  $b = (b_1, \dots, b_4) \in \mathbb{R}^4$ . La matrice augmentée du système linéaire  $(S_b)$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & b_3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Une application de l'algorithme de Gauss sur les lignes montre que le système linéaire  $(S_b)$  est équivalent au système linéaire d'inconnue  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(S'_b) : \begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ y + \frac{1}{3}z + t = \frac{2b_1 - b_2}{3} \\ 0 = \frac{b_2 + b_3 - 2b_1}{3} \\ 0 = \frac{b_1 + b_2 - b_4}{3}, \end{cases}$$

L'ensemble  $U$  recherché est alors donné par

$$U = \left\{ (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} b_2 + b_3 - 2b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 - b_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

2. Fixons  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in U$ . Pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , on a

$$\begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ 2x - y + z - t = b_2 \\ 3y + z + 3t = b_3 \\ 3x + 2z = b_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = a_1 \\ y + \frac{1}{3}z + t = a_2. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système linéaire  $(S_b)$  s'écrit

$$S = \left\{ \left( -\frac{2}{3}z + \frac{b_1 + b_2}{3}, -\frac{1}{3}z - t + \frac{2b_1 - b_2}{3}, z, t \right) : z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Les deux questions précédentes montrent que pour tout  $b \in \mathbb{R}^4$ , le système linéaire  $(S_b)$  admet soit une infinité de solutions soit aucune solution.

■

**Exercice 34 (★★)** Soient  $b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse dans cet exercice à la résolution du système linéaire d'inconnue  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = b_3 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice augmentée du système linéaire ci-dessus.
2. Appliquer l'algorithme de Gauss (sur les lignes) à cette matrice.
3. En déduire que le système linéaire étudié n'a pas de solution lorsque  $2b_2 + b_3 \neq 0$ .
4. Résoudre le système linéaire lorsque  $2b_2 + b_3 = 0$ .

**Solution.**

1. La matrice augmentée du système linéaire étudié est donnée par

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes pour obtenir successivement les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 & 2/3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2 & 8/3 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 & 3b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 8 & 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 & 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3(b_3 - b_2) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 & 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 & 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

3. La question précédente montre que pour tout  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = b_3 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 = 0 \\ x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 3b_2 \\ x_4 - 2x_5 = b_2 - b_3 \\ 0 = 2b_2 + b_3. \end{cases}$$

Ainsi, le système étudié n'a pas de solution lorsque  $2b_2 + b_3 \neq 0$ .

4. On suppose que  $2b_2 + b_3 = 0$ . Un 5-uplet de réels  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  est solution du système étudié si et seulement si

$$\begin{cases} x_5 = x_5 \\ x_4 = 2x_5 + b_2 - b_3 = 2x_5 + 3b_2 \\ x_3 = -20x_5 - 6b_2 + 9b_3 = -20x_5 - 24b_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_1 = -x_2 - 13x_5 - 4b_2 + 6b_3 = -x_2 - 13x_5 - 16b_2. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système linéaire étudié peut s'écrire

$$\{(-x_2 - 13x_5 - 16b_2, x_2, -20x_5 - 24b_2, 2x_5 + 3b_2, x_5) : x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

■

**Exercice 35 (★★) (Factorisation LU)** Résoudre le système linéaire d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y - z = 5 \\ -y + 2z = 4. \end{cases}$$

On note  $A$  la matrice (non-augmentée) associée au système linéaire ci-dessus. Déduire de l'étude précédente des matrices  $B_1, B_2, B_3, B_4$  inversibles et  $U$  triangulaire supérieure telles que

$$(B_4 B_3 B_2 B_1)A = U.$$

**Solution.** Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y - z = 5 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y/2 = 1 \\ -x + 2y - z = 5 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y/2 = 1 \\ (3/2)y - z = 6 \\ -y + 2z = 4. \end{cases}$$

Puis pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y - z = 5 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y/2 = 1 \\ y - (2/3)z = 4 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y/2 = 1 \\ y - (2/3)z = 4 \\ (4/3)z = 8. \end{cases}$$

Le système étudié admet une unique solution, à savoir  $\{(5, 8, 6)\}$ . On introduit maintenant les matrices associées aux diverses opérations sur les lignes réalisées ci-dessus :

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$B_4 B_3 B_2 B_1 A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 36 (★★)** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer les ensembles

$$S = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$

et

$$S_0 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}.$$

Soit  $X_1 \in S$  fixé. Montrer que  $S = \{X_1 + X_0 : X_0 \in S_0\}$ .

**Exercice 37 (★)** Transformer la matrice suivante en une matrice échelonnée via l'algorithme de Gauss sur les lignes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poursuivre en proposant une forme échelonnée réduite. Que pouvez-vous dire en appliquant des opérations sur les colonnes ?

**Solution.** Une application directe de l'algorithme de Gauss montre que  $A$  est équivalente (i.e., a même rang) à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée (mais non échelonnée réduite). Cette dernière matrice est évidemment équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée réduite. Des opérations élémentaires sur les colonnes montrent que cette matrice est équivalente à

$$J_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 38 (★★)** Soit  $n \geq 1$  un entier. Déterminer (si possible) l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.**

- La matrice  $A$  est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls. Pour déterminer explicitement l'inverse de  $A$ , on commence par écrire la matrice augmentée :

$$\left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & \ddots & & & 1 & 1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & 1 \end{array} \right).$$

Remarquons que la matrice  $A$  est déjà échelonnée : ceci nous dit que les opérations à mener sur les lignes doivent conduire à une forme échelonnée réduite de  $A$ . On note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de cette dernière matrice. En effectuant  $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ ,  $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_n, \dots, L_1 \leftarrow L_1 - L_n$  on obtient

$$\left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & 1 \end{array} \right)$$

De même avec  $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-1}$ ,  $L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - L_{n-1}, \dots, L_1 \leftarrow L_1 - L_{n-1}$ , on obtient

$$\left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & 1 \end{array} \right)$$

On procède de même avec  $L_{n-3}, \dots, L_2$  pour aboutir à

$$\left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & & & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & & \ddots & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On conclut que  $A$  est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice  $B$  est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls. Pour déterminer explicitement l'inverse de  $B$ , on commence par écrire la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue alors successivement les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$  pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 1 & 0 & 1 & -1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 & & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à effectuer  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$  pour aboutir à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & \ddots & & 1 & & 1 & -2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & & & & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On conclut que  $B$  est inversible d'inverse

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 39 (★★★)** Considérons un entier  $n \geq 2$  et introduisons l'ensemble

$$F = \{aI_n + bJ_n : (a, b) \in \mathbb{K}^2\},$$

où  $J_n$  désigne

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$ . En donner une base.
2. Etablir que pour  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$(aI_n + bJ_n)(cI_n + dJ_n) = [ac + bd(n-1)]I_n + [ad + bc + bd(n-2)]J_n. \quad (4)$$

En déduire que  $F$  est stable par produits (i.e., que la multiplication de deux éléments de  $F$  est encore un élément de  $F$ ).

3. Soit  $M \in F$ . Il existe donc  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  tels que  $M = \alpha I_n + \beta J_n$ . L'objectif de cette question est d'établir que  $M$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$  avec  $M^{-1} \in F$  si et seulement si  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n - 1)) \neq 0$ .

(a) On va montrer l'implication  $\Rightarrow$ . On suppose donc que  $M$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$  avec  $M^{-1} \in F$ .

(i) Justifier qu'il existe  $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$  tels que

$$M^{-1} = \gamma I_n + \delta J_n.$$

(ii) En exploitant l'égalité (4), montrer que

$$\begin{cases} \alpha\gamma + \beta\delta(n - 1) = 1 \\ \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n - 2) = 0. \end{cases}$$

(iii) En déduire que  $\alpha - \beta \neq 0$  ainsi que les égalités

$$\delta = \gamma - (\alpha - \beta)^{-1} \quad (5)$$

et

$$(\alpha + \beta(n - 1))\gamma = 1 + \beta(\alpha - \beta)^{-1}(n - 1). \quad (6)$$

(iv) Montrer que  $\alpha + \beta(n - 1) \neq 0$ . Conclure.

(v) Exprimer  $\gamma$  et  $\delta$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $n$ .

(b) En vous appuyant sur la Question 3.(a)-(v), établir l'implication réciproque  $\Leftarrow$ .

(c) Sous l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus, donner une expression de  $M^{-1}$ .

### Solution.

1. Le fait que  $F$  soit un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$  est immédiat. Compte-tenu de la définition de  $F$ , il est clair qu'une base de  $F$  est donnée par  $(I_n, J_n)$ .

2. Il découle de l'égalité

$$J_n^2 = (n - 1)I_n + (n - 2)J_n$$

que pour tout  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$(aI_n + bJ_n)(cI_n + dJ_n) = [ac + bd(n - 1)]I_n + [ad + bc + bd(n - 2)]J_n,$$

ce qui entraîne en particulier que  $F$  est stable par produit.

3. (a) On suppose que  $M$  est inversible d'inverse dans  $F$ .

(i) L'existence des scalaires  $\gamma, \delta$  est assurée par la définition de  $F$  et le fait que  $M^{-1} \in F$ .

(ii) En revenant à l'égalité (4), on peut écrire

$$I_n = MM^{-1} = [\alpha\gamma + \beta\delta(n - 1)]I_n + [\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n - 2)]J_n,$$

ce qui permet d'obtenir (car  $(I_n, J_n)$  est une base de  $F$ )

$$\begin{cases} \alpha\gamma + \beta\delta(n - 1) = 1 \\ \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n - 2) = 0. \end{cases}$$

(iii) On tire sans difficultés de ces deux égalités  $\alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\delta - \beta\gamma = 1$  ou de manière équivalente

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = 1.$$

Ainsi, on a  $\alpha - \beta \neq 0$  et

$$\delta = \gamma - (\alpha - \beta)^{-1}.$$

En combinant cette dernière égalité et la première égalité de (ii) ci-dessus, il vient

$$(\alpha + \beta(n - 1))\gamma = 1 + \beta(\alpha - \beta)^{-1}(n - 1).$$



- (iv) Supposons par l'absurde que  $\alpha + \beta(n-1) = 0$ . Ce qui précède nous dit alors que  $1 + \beta(\alpha - \beta)^{-1}(n-1) = 0$ , ce qui s'écrit encore

$$\alpha + \beta(n-1) = \beta.$$

Notre hypothèse entraîne ainsi  $\beta = 0$ , puis  $M = \alpha I_n$ . Il reste à invoquer l'inversibilité de  $M$  pour obtenir  $\alpha \neq 0$  et contredire  $\alpha + \beta(n-1) = \alpha = 0$ . On a donc montré

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n-1)) \neq 0.$$

- (v) Notons enfin (via les égalités (6) et (5)) que

$$\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta(n-1)} \left( 1 + \frac{\beta(n-1)}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha + \beta(n-2)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n-1))}$$

et

$$\delta = \gamma - \frac{1}{\alpha - \beta} = -\frac{\beta}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n-1))}.$$

- (b) Supposons  $\alpha - \beta \neq 0$  et  $\alpha + \beta(n-1) \neq 0$ . Posons

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta(n-2)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n-1))} \quad \text{et} \quad \delta = -\frac{\beta}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta(n-1))}.$$

Posons  $\hat{M} = \gamma I_n + \delta J_n$  et remarquons que  $\hat{M} \in F$ . Une nouvelle fois, l'égalité (4) fournit

$$M\hat{M} = [\alpha\gamma + \beta\delta(n-1)]I_n + [\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n-2)]J_n.$$

Il suffit alors de constater que

$$\alpha\gamma + \beta\delta(n-1) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n-2) = 0$$

pour conclure que  $M\hat{M} = I_n$  et en arriver à l'inversibilité de  $M$  dans  $M_n(\mathbb{K})$ . L'équivalence désirée est donc établie.

- (c) L'expression voulue découle du développement ci-dessus.

■

## 7 Changement de bases

**Exercice 40 (★★)** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y).$$

On note  $\beta = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Montrer que  $\beta' = ((3, 2), (2, 2))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $v = 3e_1 - 4e_2$ . Déterminer les coordonnées de  $v$  dans la base  $\beta'$ . Déterminer les coordonnées de  $f(v)$  dans la base  $\beta$  et dans la base  $\beta'$ .
3. Déterminer  $\text{Mat}_{\beta', \beta'}(f)$ .

**Solution.**

1. La famille  $\beta'$  est évidemment de cardinal 2 et libre. Puisque  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2, la famille  $\beta'$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

2. On cherche deux réels  $a, b$  tels que

$$(3, -4) = a(3, 2) + b(2, 2)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} 3a + 2b = 3, \\ 2a + 2b = -4. \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne

$$(3, -4) = 7(3, 2) - 9(2, 2).$$

Ainsi, les coordonnées de  $v$  dans la base  $\beta'$  sont  $(7, -9)$ .

Par ailleurs, on a directement

$$f(v) = f(3e_1 - 4e_2) = 3f(e_1) - 4f(e_2) = 3(2, 3) - 4(1, -2) = (2, 17).$$

Les coordonnées de  $f(v)$  dans la base  $\beta$  sont donc  $(2, 17)$ . Les coordonnées de  $f(v)$  dans  $\beta'$  sont données par le produit matriciel

$$\text{Mat}_{\beta', \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

On a évidemment

$$\text{Mat}_{\beta', \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{Mat}_{\beta, \beta'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

On conclut que le vecteur colonne des coordonnées de  $f(v)$  dans  $\beta'$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 47/2 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le cours, on a

$$\text{Mat}_{\beta', \beta'}(f) = \text{Mat}_{\beta', \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \text{Mat}_{\beta, \beta}(f) \text{Mat}_{\beta, \beta'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$$

ce qui donne

$$\text{Mat}_{\beta', \beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercice 41 (★★)** Soient  $\beta_1 = ((1, 1, 0), (0, -1, 0), (3, 2, -1))$  et  $\beta_2 = ((1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1))$  deux bases de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\beta$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$M := \text{Mat}_{\beta_1, \beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux bases de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer  $\text{Mat}_{\beta, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  puis  $\text{Mat}_{\beta_1, \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .
3. En déduire  $\text{Mat}_{\beta_1, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  et  $\text{Mat}_{\beta_2, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .
4. Donner  $\text{Mat}_{\beta_2, \beta_2}(f)$ .

5. Déterminer la matrice  $M^k$  pour chaque entier  $k \geq 1$ .

**Solution.**

1. Les familles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont toutes les deux de cardinal  $3 = \dim \mathbb{R}^3$ . On vérifie alors que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont libres pour conclure qu'elles sont des bases de  $\mathbb{R}^3$ .
2. La matrice  $\text{Mat}_{\beta, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  s'obtient sans difficultés :

$$\text{Mat}_{\beta, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, cette dernière matrice est inversible d'inverse  $\text{Mat}_{\beta_1, \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ . On montre sans difficultés que

$$\text{Mat}_{\beta_1, \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Une nouvelle application du cours donne

$$\text{Mat}_{\beta_1, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Mat}_{\beta_1, \beta}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{Mat}_{\beta, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Comme ci-dessus, la matrice  $\text{Mat}_{\beta, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  s'obtient immédiatement et vaut

$$\text{Mat}_{\beta, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que

$$\text{Mat}_{\beta_1, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, nous savons que cette matrice est inversible d'inverse

$$\text{Mat}_{\beta_2, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On applique la formule du changement de bases (dans le cadre de 2 bases) :

$$\text{Mat}_{\beta_2, \beta_2}(f) = \text{Mat}_{\beta_2, \beta_1}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{Mat}_{\beta_1, \beta_1}(f) \text{Mat}_{\beta_1, \beta_2}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

On conclut alors

$$\text{Mat}_{\beta_2, \beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Posons  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a vu que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}MP.$$

Il vient alors

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = M.$$

Par récurrence, on montre que pour tout entier  $k \geq 1$

$$M^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

■