

Chapitre 1 : le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1 (★) Montrer que les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 7y = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 (★) Montrer que

$$E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (★) Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}$?

Exercice 4 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}, E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}, E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\},$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}, E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 1\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 5 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}, E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y = z\}, E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\},$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}, E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 1\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2 Combinaisons linéaires

Exercice 6 (★) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $u = (2, -1)$, $v = (-3, 2)$ et $w = (1, 3)$. Montrer que w est combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v .

Exercice 7 (★★) Peut-on exprimer $\sqrt{2}$ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$? Même question avec des éléments de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (★★) On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Peut-on exprimer i comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{R}$) d'éléments de $\mathbb{R}$?

Exercice 9 (★★) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $w = (1, a, 3) \in \mathbb{R}^3$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de $u = (-1, -2, 2)$ et $v = (0, 4, -1)$.

3 Familles génératrices et sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 10 (★) Donner une famille génératrice des sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}, E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0\}$$

et

$$E_3 = \{(x, y, z, t, \omega) \in \mathbb{R}^5 : x + \omega = 0\}.$$

Exercice 11 (★★) Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Exercice 12 (★★) Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donner les sous-espaces vectoriels suivants sous forme d'écriture paramétrique et cartésienne :

$$E_1 = \text{vect} \{(1, 2, 3)\} \quad \text{et} \quad E_2 = \text{vect} \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}.$$

Exercice 13 (★) Que pensez-vous du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donné par $E = \text{vect} \{(1, 2), (3, 4)\}$?

Exercice 14 (★★) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = (-2, a, b, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $u = (-1, -1, 1, 2)$ et $v = (-1, 2, 3, 1)$.

Exercice 15 (★★)

1. Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$ quatre vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Montrer que

$$\text{vect} \{a, b\} = \text{vect} \{c, d\}.$$

2. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{vect}\{u, v\} = \text{vect}\{u + v, u - v\}.$$

3. **Suppression d'un générateur :** Montrer que

$$\text{vect} \{(5, 7, 2), (-3, 1, 4), (19, 11, -8)\} = \text{vect} \{(5, 7, 2), (-3, 1, 4)\}$$

4. **Remplacement d'un générateur :** Montrer que

$$\text{vect} \{(5, 7, 2), (-3, 1, 4)\} = \text{vect} \{(5, 7, 2), (2, 8, 6)\} = \text{vect} \{(2, 8, 6), (-3, 1, 4)\}$$

Exercice 16 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Une sur-famille d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est-elle encore une famille génératrice de F ?

4 Opérations sur les s.e.v.

Exercice 17 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset G$. L'ensemble $G \setminus F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$?

Exercice 18 (★★) Soient I un ensemble non vide, $n \geq 1$ un entier et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 19 (★★) Montrer que

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sans revenir à la définition et sans en déterminer une famille génératrice.

Exercice 20 (★★) L'objectif de cet exercice est d'étudier l'union de deux sous-espaces vectoriels F, G de $\mathbb{K}^n$ où $n \geq 1$ désigne un entier fixé.

1. Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. On suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Nous allons montrer que dans ce cas, $F \cup G$ n'est **jamais** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Procédons par l'absurde en supposant que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
 - (a) Justifier qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$ et $g \in G$ tel que $g \notin F$.
 - (b) Montrer que $f + g \in F \cup G$.
 - (c) Aboutir à une contradiction.

Exercice 21 (★★)

1. Montrer que $F = \mathbb{R}(1, 0, 0)$ et $G = \mathbb{R}(0, 0, 1)$ sont en somme directe. A t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 2) \oplus \mathbb{R}(3, 4)$.
3. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}(1, 2, 3)$ et $\mathbb{R}(2, 4, 6)$ sont-ils en somme directe?

Exercice 22 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$ à p éléments avec $p \geq 1$ entier. Montrer que

$$\text{vect} \{v_1, \dots, v_p\} = \mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p.$$

Exercice 23 (★★★) Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$ entier). On suppose que

$$E \cap F \subset E \cap G, \quad E + F \subset E + G \quad \text{et} \quad G \subset F.$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 24 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que

$$E + (F \cap (E + G)) = E + (G \cap (E + F)).$$

5 Familles libres et liées

Exercice 25 (★) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la famille $((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 26 (★) La famille $((1, 1, 0), (4, 1, 4), (2, -1, 4))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 27 (★) Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distincts, la famille (v_i, v_j) est libre dans $\mathbb{R}^3$. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 28 (★★)

1. La famille $((1, 2, 3), (5, 6, 7))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? génératrice de $\mathbb{R}^3$? libre dans $\mathbb{R}^3$?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$, la famille $((1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1))$ est-elle une libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 29 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, (u, v) une famille libre de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire (i.e., le caractère libre ou lié) de la famille (a, b) avec :

1. $a = 2u + 3v$ et $b = mu + v$;
2. $a = 2u + mv$ et $b = mu + v$;
3. $a = mu + 3m^2v$ et $b = (m - 1)u + v$.

Exercice 30 (★★)

1. Vérifier que la famille $((1, 0, 2), (4, -1, 0))$ est libre. Trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille

$$((1, 0, 2), (4, -1, 0), v)$$

soit libre. Peut-on trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $((1, 0, 2), (4, -1, 0), v, w)$ est libre ?

2. Faire de même avec la famille à 1 élément $((1, 1, 1))$.

6 Base, dimension et rang

Exercice 31 (★) Soit A la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0, 4x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de A .
3. En déduire la dimension de A .

Exercice 32 (★★) Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et une base de G .
3. Quelles sont les dimensions de F et G ?
4. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ? supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 33 (★★) Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -2, -1)$ et $w = (1, 1, -1)$. On pose

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{vect} \{u, v\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E .
2. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
3. A t-on $w \in F$? $w \in E$?
4. Déterminer une base de $E \cap F$.

Exercice 34 (★★) Soit $n \geq 2$ un entier. Existe t-il deux hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ notés H_1 et H_2 tels que $H_1 \subset H_2$ et $H_1 \neq H_2$?

Exercice 35 (★★) Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $((-1, 3), (2, 7))$;
2. $((-1, 3), (2, -6))$;

3. $((0, 0, 0), (1, 2, 3))$;
4. $((1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3))$;
5. $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, -2, 3), (1, 1, 2, -2))$.

Exercice 36 (★★★) L'objectif de cet exercice est d'établir la formule de Grassmann. Ici, $n \geq 1$ désigne un entier fixé et F, G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

L'inégalité ci-dessus est-elle une égalité en général ?

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ en somme directe, i.e., $F \cap G = \{0\}$. Montrer que si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de F (où $p \geq 1$ entier) et $(g_1, \dots, g_q)$ (où $q \geq 1$ entier) est une famille libre de G , alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre de $F + G$.
3. Montrer que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \quad \text{lorsque } F \cap G = \{0\}.$$

4. On suppose $H := F \cap G \neq \{0\}$.

- (a) Justifier que H admet une base.
- (b) On note $\beta = (h_1, \dots, h_r)$ une base de H pour un entier $r \geq 1$. Pourquoi a-t-on $r = \dim(H)$?
- (c) Montrer que β est à la fois une famille libre de F et de G .
- (d) Montrer que si β est une base de F ou de G , alors on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

- (e) On suppose désormais dans toute la suite que β n'est ni une base de F ni une base de G . Montrer qu'il existe des vecteurs $f_1, \dots, f_p$ de F et des vecteurs $g_1, \dots, g_q$ de G tels que $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ soit une base de F et $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$ soit une base de G .
- (f) Montrer que la famille $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F + G$.
- (g) En déduire la formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 37 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $(e_1, \dots, e_q)$ une famille génératrice de F (en particulier, $q \geq \dim F$) et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de F (en particulier $p \leq \dim F$). Montrer (en s'inspirant de la démonstration du théorème de la base incomplète) qu'il existe $v_{p+1}, \dots, v_r \in \{e_1, \dots, e_q\}$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r)$ soit une base de F .

7 Applications linéaires

Exercice 38 (★) La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle linéaire ? Même question avec la fonction carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 39 (★) Montrer que $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x, y, z) = (x + 2y - z, x + z) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

est linéaire.

Exercice 40 (★★) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaires.

Exercice 41 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x) = (3x, 5x, 7x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Montrer de deux façons différentes que $\ker(f) = \{0\}$.
3. Déterminer le rang de f de deux manières différentes.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Exercice 42 (★★) On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x + y \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que l'application g est linéaire.
2. Sans déterminer de base (du noyau et de l'image de g), déterminer la dimension du noyau de g et son rang.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en déterminant une base du noyau de g et son image.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de g .

Exercice 43 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Déterminer le noyau de f et son image. Est-ce en accord avec le théorème du rang ?
3. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Exercice 44 (★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \quad \text{et} \quad g^{-1}(\operatorname{im}(g \circ f)) = \ker(g) + \operatorname{im}(f).$$

Exercice 45 (★★) Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de noyau

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}?$$

Exercice 46 (★★) Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)).$$

Exercice 47 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est bijective. Montrer que

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n.$$

Exercice 48 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) $\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.
- (b) $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$.
- (c) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 49 (★★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que $\ker(g|_{\text{im}(f)}) = \ker(g) \cap \text{im}(f)$.

(b) En déduire que

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\ker(g) \cap \text{im}(f)).$$

(c) Conclure que

$$\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n.$$

Exercice 50 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ la famille $(x, f(x))$ est liée. Le but de cet exercice est d'établir que f est une homothétie vectorielle, i.e., il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $f(x) = \lambda x$.

1. Etablir que pour chaque $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. *On pourra commencer par étudier le cas où la famille (x, y) est liée.*
3. Conclure.