

Chapitre 1 : le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1 (★) Montrer que les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 7y = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Solution. On décrit ici un cas plus général. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $n \geq 1$ entier. On veut montrer que

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On procède en deux étapes :

(i) **A t-on $0_{\mathbb{R}^n} \in H$?** On a

$$a_1 \times 0 + \dots + a_n \times 0 = 0,$$

donc $0_{\mathbb{R}^n} \in H$.

(ii) **L'ensemble H est-il stable par combinaison linéaire ?** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux éléments de H . Montrons que $\lambda u + \mu v \in H$.

Ecrivons tout d'abord

$$\lambda u + \mu v = \lambda(u_1, \dots, u_n) + \mu(v_1, \dots, v_n) = (\underbrace{\lambda_1 u_1 + \mu v_1}_{=X_1}, \dots, \underbrace{\lambda_n u_n + \mu v_n}_{=X_n}).$$

Pour établir l'inclusion souhaitée $\lambda u + \mu v \in H$, il nous faut montrer $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = 0$. Remarquons que les inclusions $u \in H$ et $v \in H$ entraînent tout de suite

$$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Il reste à voir que ces deux égalités donnent

$$\begin{aligned} a_1X_1 + \dots + a_nX_n &= a_1(\lambda u_1 + \mu v_1) + \dots + a_n(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) + \mu(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \end{aligned}$$

pour conclure que $\lambda u + \mu v \in H$.

On a montré que la partie H de $\mathbb{R}^n$ contient $0_{\mathbb{R}^n}$ et qu'elle est stable par combinaisons linéaires (à coefficients réels) : elle est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ■

Exercice 2 (★) Montrer que

$$E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution. Observons que $0_{\mathbb{R}^4} \in E$. Soient $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) \in E. \quad (1)$$

Notons que

$$\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$$

et posons $X = \lambda x_1 + \mu x_2$, $Y = \lambda y_1 + \mu y_2$, $Z = \lambda z_1 + \mu z_2$ et $T = \lambda t_1 + \mu t_2$. Constatons que l'inclusion voulue (1) revient à établir que

$$2X + 3Y + Z = 0 \quad \text{et} \quad 4X - Y + T = 0.$$

Puisque $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in E$, on a

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + z_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(2x_2 + 3y_2 + z_2) = 0$$

ce qui donne

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + z_1) + \mu(2x_2 + 3y_2 + z_2) = 0$$

et ceci s'écrit encore

$$2X + 3Y + Z = 0.$$

De même, on a

$$\lambda(4x_1 - y_1 + t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(4x_2 - y_2 + t_2) = 0$$

et on vérifie que cela entraîne

$$4X - Y + T = 0.$$

On conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. ■

Exercice 3 (★) Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}$?

Solution. Aucun des trois n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{N}$ était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, on devrait avoir $(1/3)1 = 1/3 \in \mathbb{N}$. De même pour $\mathbb{Z}$ et pour $\mathbb{D}$. ■

Exercice 4 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}, E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}, E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\},$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}, E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 1\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Solution. Il faut faire les dessins des parties en questions pour voir tout de suite si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ou non ! On rappelle que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{(0, 0)\}$, les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ et $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(a) La partie E_1 est l'union de deux droites distinctes : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, il suffit de voir que $(1, 0) \in E_1$ et $(0, 1) \in E_1$ tandis que

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin E_1.$$

- (b) La partie E_2 correspond au graphe de la fonction carrée (i.e., une parabole) : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, observons que $(1, 1) \in E_1$ tandis que

$$2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin E_2.$$

- (c) La partie E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: en effet, on a $E_3 = \{(0, 0)\}$.
 (d) La partie E_4 est ce que l'on appelle un demi-espace de $\mathbb{R}^2$ (elle correspond à l'hypographe (la partie en dessous du graphe) d'une certaine fonction linéaire) : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, remarquons simplement que $(1, 0) \in E_1$ alors que

$$-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin E_4.$$

- (e) La partie E_5 ne contient pas $(0, 0)$: elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
 (f) La partie E_6 n'est pas une partie de $\mathbb{R}^2$: elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. ■

Exercice 5 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}, E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y = z\}, E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\},$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}, E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 1\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Solution. C'est analogue à l'exercice précédent. On rappelle que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{(0, 0, 0)\}$, les droites de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$, les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ et $\mathbb{R}^3$. On montre que E_1, E_2, E_4, E_5 ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On vérifie également que $E_3 = \{(0, 0, 0)\}$ (qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). Enfin (et contrairement à l'exercice précédent) E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (notons que $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$). ■

2 Combinaisons linéaires

Exercice 6 (★) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $u = (2, -1)$, $v = (-3, 2)$ et $w = (1, 3)$. Montrer que w est combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v .

Solution. Supposons que w soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v . Par définition, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda u + \mu v.$$

Il vient alors

$$(1, 3) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu).$$

On en déduit $\lambda = 11$ et $\mu = 7$. Il reste à vérifier que

$$(1, 3) = 11(2, -1) + 7(-3, 2).$$

Donc, w est bien combinaison linéaire de u et v . ■

Exercice 7 (★★) Peut-on exprimer $\sqrt{2}$ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$? Même question avec des éléments de $\mathbb{R}$.

Solution. La réponse est "non" puisque d'une part $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et d'autre part que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{Q}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est un élément de $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, l'égalité évidente $\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2}$ et l'inclusion $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ montre que $\sqrt{2}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $\mathbb{R}$. ■

Exercice 8 (★★) On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Peut-on exprimer i comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{R}$) d'éléments de $\mathbb{R}$?

Solution. La réponse est "non". Si c'était le cas, on aurait $i \in \mathbb{R}$. ■

Exercice 9 (★★) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $w = (1, a, 3) \in \mathbb{R}^3$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de $u = (-1, -2, 2)$ et $v = (0, 4, -1)$.

Solution. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $w = (1, a, 3)$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et de v . Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$, i.e.,

$$(1, a, 3) = \lambda(-1, -2, 2) + \mu(0, 4, -1).$$

Ceci entraîne que $\lambda = -1$, $a = -18$ et $\mu = -5$. Il reste à vérifier que $(1, -18, 3) = -u - 5v$. ■

3 Familles génératrices et sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 10 (★) Donner une famille génératrice des sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}, E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0\}$$

et

$$E_3 = \{(x, y, z, t, \omega) \in \mathbb{R}^5 : x + \omega = 0\}.$$

Solution. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in E_1 &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x + 2z, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 2, 1),\end{aligned}$$

et ceci entraîne l'égalité

$$E_1 = \text{vect} \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}.$$

Ainsi, la famille $((1, 1, 0), (0, 2, 1))$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel E_1 .

De même, on a pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in E_2 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, x + 2z, z, t) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 2, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$E_2 = \text{vect} \{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Ceci nous dit que la famille $((1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel E_2 .

On montre de même que

$$E_3 = \text{vect} \{(1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\}.$$

Autrement dit : la famille $((1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0))$ est génératrice du sous-espace vectoriel E_3 . ■

Exercice 11 (★★) Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Solution. Méthode 1. Remarquons tout d'abord que

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}.$$

Un raisonnement analogue à celui employé dans l'exercice ci-dessus montre alors que

$$E = \text{vect} \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\} \cap \text{vect} \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}.$$

Fixons $(x, y, z) \in E$. D'après l'égalité ci-dessus, il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 0) + \mu_1(0, 1, 1) \quad \text{et} \quad (x, y, z) = \lambda_2(1, 2, 0) + \mu_2(0, -1, 1).$$

On obtient alors $x = \lambda_1 = \lambda_2$, $y = \lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_2 - \mu_2$ et $z = \mu_1 = \mu_2$. Il découle de ceci

$$\lambda_2 + \mu_2 = \lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_2 - \mu_2,$$

d'où les égalités $x = 2\mu_1$, $y = 3\mu_1$ et $z = \mu_1$. Ceci montre que $(x, y, z) \in \text{vect} \{(2, 3, 1)\}$. On a donc l'inclusion $E \subset \text{vect} \{(2, 3, 1)\}$. L'inclusion renversée est immédiate puisque

$$(2, 3, 1) \in \text{vect} \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\} \cap \text{vect} \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}.$$

En conclusion, on a

$$E = \text{vect} \{(2, 3, 1)\},$$

autrement dit $((2, 3, 1))$ est une famille génératrice de E .

Méthode 2. On remarque que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in E \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}y, y, \frac{1}{3}y\right) = y\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

Ceci montre que $E \subset \text{vect} \left\{\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)\right\} = \text{vect} \{(2, 3, 1)\}$. Pour obtenir l'inclusion renversée, il suffit de remarquer que $(2, 3, 1) \in E$ et de dire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $(2, 3, 1)$, en particulier il contient le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $(2, 3, 1)$, i.e., il contient $\text{vect}\{(2, 3, 1)\}$. On conclut que

$$E = \text{vect} \{(2, 3, 1)\},$$

et ceci revient à dire que $((2, 3, 1))$ est une famille génératrice de E . ■

Exercice 12 (★★) Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donner les sous-espaces vectoriels suivants sous forme d'écriture paramétrique et cartésienne :

$$E_1 = \text{vect} \{(1, 2, 3)\} \quad \text{et} \quad E_2 = \text{vect} \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}.$$

Solution. Avant de répondre à la question, donnons deux écritures alternatives de E_1

$$E_1 = \{\lambda(1, 2, 3) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, 2, 3).$$

Pour l'écriture paramétrique, on écrit pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3).$$

Pour obtenir une équation cartésienne, il suffit de reprendre l'équivalence ci-dessus et d'écrire pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3x = z. \end{cases}$$

Nous avons donc deux écritures pour E_1 , à savoir

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3)\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x = y \\ 3x = z \end{cases} \right\}.$$

Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$E_2 := \text{vect}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}.$$

Signalons l'écriture alternative (qui découle de la définition de vect)

$$E_2 = \{\lambda(1, 2, 3) + \mu(4, 5, 6) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Comme dans le cas précédent, l'écriture paramétrique est une formalité :

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ y = 2\lambda + 5\mu \\ z = 3\lambda + 6\mu \end{cases} \right\}.$$

Pour l'écriture cartésienne, on observe que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ y = 2\lambda + 5\mu \\ z = 3\lambda + 6\mu \end{cases} &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ \mu = -(y - 2x)/3 \\ \mu = -(z - 3x)/6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -(y - 2x)/3 = -(z - 3x)/6 \\ &\Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

■

Exercice 13 (★) Que pensez-vous du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donné par $E = \text{vect}\{(1, 2), (3, 4)\}$?

Solution. On a $E = \mathbb{R}^2$. En effet, on a évidemment $E \subset \mathbb{R}^2$ et l'inclusion renversée s'obtient en constatant que

$$(x, y) = \left(\frac{-4x + 3y}{2}\right)(1, 2) + \frac{2x - y}{2}(3, 4) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Exercice 14 (★★) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = (-2, a, b, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $u = (-1, -1, 1, 2)$ et $v = (-1, 2, 3, 1)$.

Solution. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$w \in \text{vect}\{u, v\}$$

avec $w = (-2, a, b, 3)$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$. Il vient alors $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $a = 1$ et $b = 4$. Il reste alors à vérifier l'égalité $(-2, 1, 4, 3) = (-1, -1, 1, 2) + (-1, 2, 3, 1)$. ■

Exercice 15 (★★)

1. Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$ quatre vecteurs de $\mathbb{K}^3$.
Montrer que

$$\text{vect}\{a, b\} = \text{vect}\{c, d\}.$$

2. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{vect}\{u, v\} = \text{vect}\{u + v, u - v\}.$$

3. **Suppression d'un générateur :** Montrer que

$$\text{vect}\{(5, 7, 2), (-3, 1, 4), (19, 11, -8)\} = \text{vect}\{(5, 7, 2), (-3, 1, 4)\}$$

4. **Remplacement d'un générateur :** Montrer que

$$\text{vect}\{(5, 7, 2), (-3, 1, 4)\} = \text{vect}\{(5, 7, 2), (2, 8, 6)\} = \text{vect}\{(2, 8, 6), (-3, 1, 4)\}$$

Solution.

1. Les égalités

$$a = \frac{3}{7}c + \frac{1}{7}d \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{7}c + \frac{2}{7}d.$$

nous disent que $a, b \in \text{vect}\{c, d\}$, d'où

$$\text{vect}\{a, b\} \subset \text{vect}\{c, d\}.$$

On montre de même que

$$\text{vect}\{c, d\} \subset \text{vect}\{a, b\}.$$

L'égalité voulue est ainsi établie.

2. On a tout de suite

$$\text{vect}\{u + v, u - v\} \subset \text{vect}\{u, v\}.$$

L'inclusion renversée s'obtient en remarquant que

$$u = \frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2}.$$

3. Il suffit de voir que $(19, 11, -8)$ est combinaison linéaire des deux autres vecteurs considérés.

4. Il suffit de voir que $(2, 8, 6) = (5, 7, 2) + (-3, 1, 4)$.

■

Exercice 16 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Une sur-famille d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est-elle encore une famille génératrice de F ?

Solution. C'est faux en général. Considérons $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de F , i.e., $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = F$. La sur-famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r)$ de $\mathcal{F}$ avec $v_{p+1}, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ n'est pas en général une famille génératrice de F puisque $v_{p+1}, \dots, v_r$ ne sont pas nécessairement des éléments de F .

Le résultat a néanmoins lieu si les éléments $v_{p+1}, \dots, v_r \in F$. En effet, sous cette hypothèse, on a

$$F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \text{vect}\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r\} \subset F$$

et ceci nous dit que la sur-famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r)$ de $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F . ■

4 Opérations sur les s.e.v.

Exercice 17 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset G$. L'ensemble $G \setminus F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$?

Solution. La réponse est "non". En effet, $G \setminus F$ ne contient pas 0. ■

Exercice 18 (★★) Soient I un ensemble non vide, $n \geq 1$ un entier et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Solution. Puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans chacun des F_i ($i \in I$), nous savons que $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans l'intersection considérée. Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour chaque $i \in I$, on a (car F_i est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$)

$$\lambda x + \mu y \in F_i.$$

Ceci nous dit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. ■

Exercice 19 (★★) Montrer que

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sans revenir à la définition et sans en déterminer une famille génératrice.

Solution. On peut exploiter le fait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et remarquer que D est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ puisque

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

■

Exercice 20 (★★) L'objectif de cet exercice est d'étudier l'union de deux sous-espaces vectoriels F, G de $\mathbb{K}^n$ où $n \geq 1$ désigne un entier fixé.

1. Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. On suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Nous allons montrer que dans ce cas, $F \cup G$ n'est **jamais** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Procédons par l'absurde en supposant que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
 - (a) Justifier qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$ et $g \in G$ tel que $g \notin F$.
 - (b) Montrer que $f + g \in F \cup G$.
 - (c) Aboutir à une contradiction.

Solution.

1. Si $F \subset G$ (resp. $G \subset F$), alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ puisque dans ce cas $F \cup G = G$ (resp. $F \cup G = F$).
2. Rappelons ici que nous nous plaçons désormais dans le cas où $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Par l'absurde, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
 - (a) Le fait que $F \not\subset G$ entraîne qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. De même, $G \not\subset F$ donne tout de suite l'existence de $g \in G$ tel que $g \notin F$.
 - (b) Puisque $F \cup G$ est supposé être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, les inclusions $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$ permettent d'écrire

$$f + g \in F \cup G. \tag{2}$$

- (c) L'inclusion ci-dessus (2) nous dit que $f + g \in F$ ou $f + g \in G$. Nous allons voir que chacune de ces deux inclusions conduit à une contradiction. Si $f + g \in F$, alors il existe $f' \in F$ tel que $f + g = f'$. Ainsi, on a $g = f - f' \in F$ et ceci contredit le fait que $g \notin F$. De même, on ne peut pas avoir $f + g \in G$. L'inclusion (2) est donc absurde et permet de conclure que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

■

Exercice 21 (★★)

1. Montrer que $F = \mathbb{R}(1, 0, 0)$ et $G = \mathbb{R}(0, 0, 1)$ sont en somme directe. A t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 2) \oplus \mathbb{R}(3, 4)$.
3. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}(1, 2, 3)$ et $\mathbb{R}(2, 4, 6)$ sont-ils en somme directe ?

Solution.

1. Soit $x \in F \cap G$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda(1, 0, 0)$ et $x = \mu(0, 0, 1)$. Il s'ensuit $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. On conclut que $x = (0, 0, 0)$. On a évidemment $F \oplus G \subset \mathbb{R}^3$. L'inclusion renversée n'a pas lieu car $(0, 1, 0) \notin F \oplus G$.
2. De même que ci-dessus, on montre que $\mathbb{R}(1, 2)$ et $\mathbb{R}(3, 4)$ sont en somme directe. Par ailleurs, l'égalité

$$(x, y) = \left(\frac{-4x + 3y}{2}\right)(1, 2) + \frac{2x - y}{2}(3, 4)$$

valide pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ montre que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}(1, 2) + \mathbb{R}(3, 4)$. On conclut que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 2) \oplus \mathbb{R}(3, 4).$$

3. Les sous-espaces vectoriels considérés ne sont pas en somme directe car $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}(1, 2, 3) \cap \mathbb{R}(2, 4, 6)$.

■

Exercice 22 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$ à p éléments avec $p \geq 1$ entier. Montrer que

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p.$$

Solution. L'ensemble $\mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p$ contient $v_1, \dots, v_p$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On a donc

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p.$$

L'inclusion renversée découle du fait que tout élément de $\mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p$ est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$ et donc un élément de $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. ■

Exercice 23 (★★★) Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$ entier). On suppose que

$$E \cap F \subset E \cap G, \quad E + F \subset E + G \quad \text{et} \quad G \subset F.$$

Montrer que $F = G$.

Solution. Puisque $G \subset F$, il suffit d'établir que $F \subset G$. Soit $x \in F$. L'égalité évidente $x = 0_{\mathbb{K}^n} + x$ et l'inclusion $0_{\mathbb{K}^n} \in E$ permettent d'exploiter l'inclusion $E + F \subset E + G$ et ainsi d'écrire $x = y + z$ pour un certain $y \in E$ et $z \in G$. En combinant l'égalité $y = x - z$ avec les inclusions $x \in F$ et $-z \in G \subset F$, on obtient $y \in F$. Il s'ensuit $y \in E \cap F \subset E \cap G$ et donc $y \in G$. Il reste à voir que les inclusions $y \in G$ et $z \in G$ entraînent $x \in G$. On conclut que $F \subset G$. ■

Exercice 24 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que

$$E + (F \cap (E + G)) = E + (G \cap (E + F)).$$

Solution. Notons A le membre de gauche de l'égalité souhaitée et B celui de droite. Soit $x \in E + (F \cap (E + G)) = A$. Commençons par voir qu'il existe $y \in E$ et $z \in F \cap (E + G)$ tels que $x = y + z$. Puisque $z \in E + G$, on peut écrire $z = e + g$ pour un certain $e \in E$ et $g \in G$. Il vient alors $g = z - e \in E + F$. Il reste à écrire $x = (y + e) + g \in E + (G \cap (E + F))$ pour conclure quant à l'inclusion $A \subset B$. L'inclusion $B \subset A$ est analogue et laissée à la charge du lecteur. ■

5 Familles libres et liées

Exercice 25 (★) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la famille $((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Solution. Cette famille est évidemment génératrice puisque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1).$$

Montrons que cette famille est libre. Fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0).$$

Il vient

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0),$$

i.e., $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille considérée est donc libre. ■

Exercice 26 (★) La famille $((1, 1, 0), (4, 1, 4), (2, -1, 4))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Solution. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 4) + \lambda_3(2, -1, 4) = (0, 0, 0).$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda_2 = -\lambda_3$ et $\lambda_1 = 2\lambda_3$. Ces relations nous conduisent à

$$2(1, 1, 0) - (4, 1, 4) + (2, -1, 4) = (0, 0, 0).$$

On conclut que la famille considérée est liée. ■

Exercice 27 (★) Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distincts, la famille (v_i, v_j) est libre dans $\mathbb{R}^3$. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Solution. On a vu que (v_1, v_2, v_3) était liée dans $\mathbb{R}^3$. Pourtant, chacune des sous-familles (v_1, v_2) , (v_2, v_3) et (v_1, v_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. ■

Exercice 28 (★★)

1. La famille $((1, 2, 3), (5, 6, 7))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? génératrice de $\mathbb{R}^3$? libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$, la famille $((1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1))$ est-elle une libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1. La famille $((1, 2, 3), (5, 6, 7))$ est de cardinal 2, elle ne peut donc pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$, a fortiori elle ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, cette famille est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Commençons par fixer $t \in \mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(1, 0, t) + \lambda_2(1, 1, t) + \lambda_3(t, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Il vient $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + t\lambda_3 = 0$ et $t\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. On en déduit $\lambda_3(t^2 - 1) = 0$. Si $t \notin \{-1, 1\}$, on a donc $\lambda_3 = 0 = \lambda_1 = \lambda_2$ et dans ce cas, la famille considérée est libre. Sinon, on vérifie directement que les deux familles correspondant aux valeurs $t = -1$ et $t = 1$ sont liées.

■

Exercice 29 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, (u, v) une famille libre de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire (i.e., le caractère libre ou lié) de la famille (a, b) avec :

1. $a = 2u + 3v$ et $b = mu + v$;
2. $a = 2u + mv$ et $b = mu + v$;
3. $a = mu + 3m^2v$ et $b = (m - 1)u + v$.

Solution.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b , on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (3\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors $\lambda_2(3m - 2) = 0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.

Cas 1 : $m = \frac{2}{3}$. On a tout de suite $3b = a$, donc (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.

Cas 2 : $m \neq \frac{2}{3}$. L'égalité $\lambda_2(3m - 2) = 0$ nous donne $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. Donc, la famille (a, b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b , on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (m\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ m\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors $\lambda_1(2 - m^2) = 0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.

Cas 1 : $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $m = \varepsilon\sqrt{2}$. Puisque $\varepsilon^2 = 1$, on vérifie immédiatement que

$$a = \varepsilon\sqrt{2}b.$$

Donc, (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.

Cas 2 : $m \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Montrons que (a, b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Puisque $m \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, l'égalité $\lambda_1(2 - m^2) = 0$ nous dit que $\lambda_1 = 0$. On en déduit $\lambda_2 = 0$. Ainsi, (a, b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3. Fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b , on a

$$(\lambda_1 m + \lambda_2(m-1))u + (3m^2\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\begin{cases} \lambda_1 m + \lambda_2(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 3m^2\lambda_1 + 3\lambda_2 m(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_2(3m^2 - 3m - 1) = 0$. On vérifie que

$$3m^2 - 3m - 1 = 3\left(m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6}\right)\left(m - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}\right).$$

Ceci nous conduit à distinguer deux cas.

Cas 1 : $m \notin \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Puisque $3m^2 - 3m - 1 \neq 0$, on a $\lambda_2 = 0$ puis $3m^2\lambda_1 = 0$ et donc (car $m \neq 0$) $\lambda_1 = 0$. Ainsi, (a, b) est une famille libre de E .

Cas 2 : $m \in \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Si $m = 0$, alors évidemment on a $a = 0$, donc (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$. Supposons donc $m \neq 0$. On a $3m^2 - 3m - 1 = 0$. En revenant à la définition de a et de b , on vérifie alors que

$$(m-1)a - mb = (3m^2 - 3m - 1)v = 0,$$

donc (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.

■

Exercice 30 (★★)

1. Vérifier que la famille $((1, 0, 2), (4, -1, 0))$ est libre. Trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille

$$((1, 0, 2), (4, -1, 0), v)$$

soit libre. Peut-on trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $((1, 0, 2), (4, -1, 0), v, w)$ est libre ?

2. Faire de même avec la famille à 1 élément $((1, 1, 1))$.

Solution.

- Le fait que la famille $((1, 0, 2), (4, -1, 0))$ soit libre est immédiat. On peut la compléter en une famille libre avec (par exemple !) le vecteur $v = (0, 1, 1)$. On ne peut pas compléter la famille $((1, 0, 2), (4, -1, 0), v)$ en une famille libre de $\mathbb{R}^3$ car le cardinal maximal d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est 3.
- La famille $((1, 1, 1))$ est évidemment libre (une famille de cardinal 1 est libre si et seulement si l'unique élément la constituant est non nul). On peut la compléter en une famille libre avec $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0)$. On ne peut pas compléter $((1, 1, 1), v_1, v_2)$ en une famille libre car le cardinal maximal d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est 3.

■

6 Base, dimension et rang

Exercice 31 (★) Soit A la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0, 4x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de A .
3. En déduire la dimension de A .

Solution.

1. **Méthode 1 :** On revient à la définition (voir, par exemple, Exercice 2).

Méthode 2 : Notons

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0\}$$

et

$$C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 4x - y + t = 0\}$$

et observons que

$$A = B \cap C.$$

On vérifie que B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Or, l'intersection quelconque non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E . Donc, A (qui est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Méthode 3 : Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$

On en déduit pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$

Posons $e_1 = (1, 0, -2, -4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que

$$\text{vect}(e_1, e_2) = A,$$

en particulier A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminons maintenant une base de A . Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$

On en déduit pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$

Posons $e_1 = (1, 0, -2, -4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que (e_1, e_2) est une famille génératrice de A . Montrons que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

On vérifie alors que

$$(\lambda_1, \lambda_2, -2\lambda_1 - 3\lambda_2, -4\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Tout de suite, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc, (e_1, e_2) est une base de A .

■

Exercice 32 (★★) Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et une base de G .
3. Quelles sont les dimensions de F et G ?
4. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe? supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$ est une intersection d'hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$

est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On vérifie que

$$F = \mathbb{R}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \text{vect} \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Les familles $((1, 1, 1))$ et $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ sont évidemment libres, elles sont donc respectivement des bases de F et G .

3. D'après ce qui précède, F est de dimension 1 et G est de dimension 2. Par ailleurs, on montre facilement que $F \cap G = \{0\}$, i.e., F et G sont en somme directe. L'égalité $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ découle de l'inclusion évidente $F + G \subset \mathbb{R}^3$ et de l'égalité $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

■

Exercice 33 (★★) Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -2, -1)$ et $w = (1, 1, -1)$. On pose

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{vect} \{u, v\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E .
2. La famille (u, v, w) est-elle libre?
3. A t-on $w \in F$? $w \in E$?
4. Déterminer une base de $E \cap F$.

Solution.

1. Le fait que E soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ découle de l'égalité

$$E = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}.$$

Ceci et le fait que la famille $\beta := ((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ soit libre nous dit que β est une base du sous-espace vectoriel E .

2. En revenant à la définition de famille libre, on montre facilement que (u, v, w) est libre.
3. Si $w \in F$, alors le cours nous dit que (u, v, w) est liée : ceci contredit la question précédente. La définition de E montre tout de suite que $w \in E$.
4. On a $(1, 0, 0) \notin F$ et ceci montre que $E \cap F \neq E$. Ainsi, $E \cap F$ est de dimension 0 ou 1. Il suffit alors de voir que $(7, -1, 1) = 3(1, 1, 1) + 2(2, -2, -1)$ pour conclure que $((7, -1, 1))$ est une base de $E \cap F$.

■

Exercice 34 (★★) Soit $n \geq 2$ un entier. Existe t-il deux hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ notés H_1 et H_2 tels que $H_1 \subset H_2$ et $H_1 \neq H_2$?

Solution. Pour deux hyperplans vectoriels H et H' de $\mathbb{R}^n$ nous savons que $\dim H = \dim H' = n - 1$. Une inclusion de l'un dans l'autre entraîne alors (voir la partie du cours relative à la dimension) l'égalité $H = H'$. ■

Exercice 35 (★★) Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $((-1, 3), (2, 7))$;
2. $((-1, 3), (2, -6))$;
3. $((0, 0, 0), (1, 2, 3))$;
4. $((1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3))$;
5. $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, -2, 3), (1, 1, 2, -2))$.

Solution.

1. On vérifie que la famille est libre : elle est donc de rang 2.
2. La famille est évidemment liée puisque $2(-1, 3) + (2, -6) = (0, 0)$. On a donc

$$\text{vect}\{(-1, 3), (2, -6)\} = \text{vect}\{(-1, 3)\},$$

en particulier la famille étudiée est de rang 1.

3. La famille est de rang 1 car

$$\text{vect}\{(0, 0, 0), (1, 2, 3)\} = \text{vect}\{(1, 2, 3)\}.$$

4. La famille est de rang 1 car

$$\text{vect}\{(1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3)\} = \text{vect}\{(1, 2, 3), (1, 2, 3)\} = \text{vect}\{(1, 2, 3)\}.$$

5. Notons $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 0, -2, 3)$ et $u_4 = (1, 1, 2, -2)$. En observant que

$$-2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = (0, 0, 0, 0)$$

on obtient

$$\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{rg}(u_2, u_3, u_4).$$

On vérifie par ailleurs que la famille (u_2, u_3, u_4) est libre et ceci permet de conclure que $\text{rg}(u_2, u_3, u_4) = 3$.

■

Exercice 36 (★★★) L'objectif de cet exercice est d'établir la formule de Grassmann. Ici, $n \geq 1$ désigne un entier fixé et F, G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

L'inégalité ci-dessus est-elle une égalité en général ?

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ en somme directe, i.e., $F \cap G = \{0\}$. Montrer que si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de F (où $p \geq 1$ entier) et $(g_1, \dots, g_q)$ (où $q \geq 1$ entier) est une famille libre de G , alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre de $F + G$.

3. Montrer que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \quad \text{lorsque } F \cap G = \{0\}.$$

4. On suppose $H := F \cap G \neq \{0\}$.

(a) Justifier que H admet une base.

- (b) On note $\beta = (h_1, \dots, h_r)$ une base de H pour un entier $r \geq 1$. Pourquoi a-t-on $r = \dim(H)$?
(c) Montrer que β est à la fois une famille libre de F et de G .
(d) Montrer que si β est une base de F ou de G , alors on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

- (e) On suppose désormais dans toute la suite que β n'est ni une base de F ni une base de G .
Montrer qu'il existe des vecteurs $f_1, \dots, f_p$ de F et des vecteurs $g_1, \dots, g_q$ de G tels que
 $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ soit une base de F et $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$ soit une base de G .
(f) Montrer que la famille $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F + G$.
(g) En déduire la formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Solution.

1. Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, l'inégalité voulue est immédiate. Supposons donc $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.
Notons $\beta = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F (donc $p = \dim F \geq 1$) et $\gamma = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G (donc $q = \dim G \geq 1$). Nous allons montrer que la famille $\delta := (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est génératrice de $F + G$. Pour le voir, commençons par fixer $x \in F + G$. On peut écrire $x = f + g$ pour un certain $(f, g) \in F \times G$. Le fait que β soit une base de F et γ une base de G permet de trouver des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ tels que

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p \quad \text{et} \quad g = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q.$$

Il reste alors à noter que

$$x = f + g = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q$$

pour conclure que la famille δ est génératrice de $F + G$.

Nécessairement, le cardinal (i.e., le nombre d'éléments) de δ est supérieur ou égal à la dimension de $F + G$, i.e.,

$$\dim(F + G) \leq p + q = \dim F + \dim G.$$

Cette inégalité n'est pas une égalité en général. En effet, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $F = G = \text{vect}\{(1, 0)\}$, on a

$$\dim(F + G) = 1 < \dim F + \dim G = 2.$$

2. On suppose ici que $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Soient $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille libre de G avec $p, q \geq 1$ entiers. Nous allons montrer que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}. \quad (3)$$

Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$. On a tout de suite

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q) \in F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^n}\},$$

i.e., $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0_{\mathbb{K}^n}$. En combinant cette dernière égalité au caractère libre de la famille $(f_1, \dots, f_p)$, on obtient

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

En revenant à (3), on a alors

$$\mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il reste à exploiter le fait que $(g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre de G pour obtenir

$$\mu_1 = \dots = \mu_q = 0.$$

On conclut que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre.

3. On peut supposer $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$ (sinon, l'égalité voulue est évidente). Soient $\beta = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F (donc $p = \dim F \geq 1$) et $\gamma = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G (donc $q = \dim G \geq 1$). On a vu à la question 3. (resp. 4.) que $\delta := (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille génératrice (resp. libre) de $F + G$. Ainsi, δ est une base de $F + G$ ce qui entraîne en particulier

$$\dim(F + G) = p + q = \dim F + \dim G.$$

4. On suppose $H := F \cap G \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
- (a) Evidemment, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Le fait qu'il ne soit pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ nous assure qu'il admet une base.
 - (b) Soit $\beta = (h_1, \dots, h_r)$ une base de H (il en existe d'après la question précédente). Il convient de rappeler ici que toutes les bases de H ont même cardinal (i.e., même nombre d'éléments) et que ce cardinal commun est par définition la dimension de H . On a donc immédiatement $r = \dim H$.
 - (c) La famille β est avant tout une famille de $F \cap G \subset F$. Ceci et le fait que β soit libre nous dit que β est une famille libre de F . De même, β est une famille libre de G .
 - (d) Supposons que β soit une base de F . On a tout de suite $F \cap G \subset F$ et $\dim(F \cap G) = \dim F$, d'où l'égalité

$$F = F \cap G.$$

De ceci, on déduit l'inclusion $F \subset G$ puis

$$G \subset F + G \subset G + G = G.$$

On conclut alors que

$$G = F + G.$$

Il découle de tout ce qui précède

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Si β est une base de G , un raisonnement analogue à ce qui précède donne encore l'égalité ci-dessus.

- (e) On suppose dans toute la suite que β n'est ni une base de F ni une base de G . Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de la base incomplète pour obtenir des vecteurs $f_1, \dots, f_p$ de F et des vecteurs $g_1, \dots, g_q$ de G tels que $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ soit une base de F et $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$ soit une base de G .
- (f) On note $\delta = (h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$. Nous allons montrer que la famille δ est une base de $F + G$.

La famille δ est génératrice de $F + G$: Soit $x \in F + G$. Par définition, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Le fait que la famille $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ (resp. $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$) soit une base de F (resp. de G) entraîne l'existence de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ (resp. $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$ et $\nu_1, \dots, \nu_q$) tels que

$$f = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_r h_r + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p$$

(resp.

$$g = \lambda'_1 h_1 + \dots + \lambda'_r h_r + \nu_1 g_1 + \dots + \nu_q g_q).$$

Il vient alors

$$x = f + g = \sum_{k=1}^r (\lambda_k + \lambda'_k) h_k + \sum_{k=1}^p \mu_k f_k + \sum_{k=1}^q \nu_k g_k.$$

La famille δ est libre : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_p f_p + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}. \quad (4)$$

En remarquant que

$$\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_p f_p = -(\gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_q g_q)$$

nous voyons que

$$v := \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_p f_p \in F \cap G = H. \quad (5)$$

Puisque $(h_1, \dots, h_r)$ est une base de H , il existe $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \alpha'_1 h_1 + \dots + \alpha'_r h_r. \quad (6)$$

Les égalités (5) et (6) donnent deux décompositions de v sur la base $(h_1, \dots, h_r, f_1, \dots, f_p)$ de F . Il s'ensuit que

$$\beta_1 = \dots = \beta_p = 0.$$

En revenant à (4), on a alors

$$\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il reste à invoquer le caractère libre de la famille $(h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_q)$ (qui vient du fait que c'est une base de G) pour aboutir à

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0.$$

- (g) En examinant le cardinal des diverses bases impliquées dans la question précédente, on obtient

$$\dim(F + G) = r + p + q \quad \text{et} \quad \dim(F \cap G) = r$$

ainsi que

$$\dim F = p \quad \text{et} \quad \dim G = q.$$

La formule de Grassmann en découle.

■

Exercice 37 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $(e_1, \dots, e_q)$ une famille génératrice de F (en particulier, $q \geq \dim F$) et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de F (en particulier $p \leq \dim F$). Montrer (en s'inspirant de la démonstration du théorème de la base incomplète) qu'il existe $v_{p+1}, \dots, v_r \in \{e_1, \dots, e_q\}$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r)$ soit une base de F .

Solution. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres incluses dans F . Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{S}_k$ comme l'ensemble des sur-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de la forme $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+k})$ avec $v_{p+1}, \dots, v_{p+k} \in \{e_1, \dots, e_q\}$. Posons

$$\Omega := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Supposons un moment que $A := \{e_1, \dots, e_q\} \subset \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} =: V$. Il s'ensuit

$$F = \text{vect } A \subset V \subset F,$$

en particulier $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille génératrice de F , une contradiction. On a donc $A \not\subset V$ et ceci nous donne l'existence de $\xi \in A$ avec $\xi \notin \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Le résultat relatif à l'enrichissement des familles libres nous dit alors que $(v_1, \dots, v_p, \xi)$ est une famille libre incluse dans F . Ainsi, Ω est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ (car $1 \in \Omega$) et majorée (par $\dim F$). Notons K son plus grand élément. Il existe alors $v_{p+1}, \dots, v_{p+K} \in \{e_1, \dots, e_q\}$ tels que $\beta := (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+K})$ soit libre. Si cette dernière famille β n'est pas génératrice, alors par le même argument que ci-dessus on aurait $K+1 \in \Omega$ et ceci contredirait le fait que K soit le plus grand élément de Ω . ■

7 Applications linéaires

Exercice 38 (★) La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle linéaire ? Même question avec la fonction carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. On a $\cos(2\pi) \neq 2\cos(\pi)$ ce qui montre que la fonction $\cos$ n'est pas linéaire. On a $(2.2)^2 \neq 2.(2)^2$ ce qui permet de conclure que la fonction carrée n'est pas linéaire. ■

Exercice 39 (★) Montrer que $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x, y, z) = (x + 2y - z, x + z) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

est linéaire.

Solution. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$h(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = h(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2).$$

Notons $X := \lambda x_1 + \mu x_2$, $Y := \lambda y_1 + \mu y_2$ et $Z := \lambda z_1 + \mu z_2$. Par définition de h , on a

$$h(X, Y, Z) = (X + 2Y - Z, X + Z).$$

On a sans difficultés

$$X + 2Y - Z = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2)$$

et

$$X + Z = \lambda(x_1 + z_1) + \mu(x_2 + z_2).$$

On a alors

$$h(X, Y, Z) = [\lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2), \lambda(x_1 + z_1) + \mu(x_2 + z_2)]$$

et ceci s'écrit encore

$$h(X, Y, Z) = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1, x_1 + z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2, x_2 + z_2) = \lambda h(x_1, y_1, z_1) + \mu h(x_2, y_2, z_2).$$

On conclut que h est linéaire. ■

Exercice 40 (★★) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaires.

Solution. Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est évidemment linéaire.

Considérons à présent une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire. Par définition, on a pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

En posant $a := f(1)$, il vient alors

$$f(\lambda) = \lambda a \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On conclut que l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donné par

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}.$$

■

Exercice 41 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x) = (3x, 5x, 7x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Montrer de deux façons différentes que $\ker(f) = \{0\}$.
3. Déterminer le rang de f de deux manières différentes.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a tout de suite

$$f(\lambda x + \mu y) = (3(\lambda x + \mu y), 5(\lambda x + \mu y), 7(\lambda x + \mu y)).$$

Il reste à voir que

$$\begin{aligned} (3(\lambda x + \mu y), 5(\lambda x + \mu y), 7(\lambda x + \mu y)) &= (3\lambda x + 3\mu y, 5\lambda x + 5\mu y, 7\lambda x + 7\mu y). \\ &= \lambda(3x + 5x, 7x) + \mu(3y, 5y, 7y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

pour conclure que f est linéaire.

2. D'après le théorème du rang, on doit avoir $\dim \ker(f) + \operatorname{rg}(f) = 1$. Puisque f n'est pas nulle, on a nécessairement $\operatorname{rg}(f) > 0$. Ainsi, $\dim \ker(f) = 0$, i.e., $\ker(f) = \{0\}$. Une autre manière d'obtenir cette dernière égalité est d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x, 5x, 7x) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0.$$

3. Le théorème du rang et la question précédente donne tout de suite $\operatorname{rg}(f) = 1$. Une autre façon d'obtenir cette égalité consiste à écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x(3, 5, 7)$$

de sorte que $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}(3, 5, 7)$ qui est donc de dimension 1.

4. Le fait que le noyau de f soit réduit à zéro nous dit que f est injective. Puisque $\operatorname{rg}(f) \neq 3$, l'application linéaire f n'est pas surjective.

■

Exercice 42 (★★) On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x + y \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que l'application g est linéaire.
2. Sans déterminer de base (du noyau et de l'image de g), déterminer la dimension du noyau de g et son rang.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en déterminant une base du noyau de g et son image.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de g .

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Commençons par noter que

$$g(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = g(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Par définition de g , on a

$$g(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2).$$

Il reste alors à voir que

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2) = \lambda g(x_1, y_1) + \mu g(x_2, y_2)$$

pour conclure que g est linéaire.

2. L'application g est non nulle donc son rang $\text{rg}(g) > 0$. Par ailleurs, $\text{im}(g) \subset \mathbb{R}$, donc $\text{rg}(g) \leq 1$. On en déduit que $\text{rg}(g) = 1$. Une application du théorème du rang donne alors $\dim \ker(g) = 2 - 1 = 1$.
3. La question précédente montre que $\text{im}(g) = \mathbb{R}$ (donc une base de $\text{im}(g)$ est la famille à un élément (1)). De plus, en écrivant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (x, -x) \Leftrightarrow (x, y) = x(1, -1)$$

nous voyons que $\ker(g)$ a pour base $((1, -1))$.

4. L'application g n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à zéro. Elle est en revanche surjective puisque $\text{im}(g) = \mathbb{R}$.

■

Exercice 43 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Déterminer le noyau de f et son image. Est-ce en accord avec le théorème du rang ?
3. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a évidemment

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Par définition de f , on a

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Ceci s'écrit encore

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2).$$

On peut alors conclure que

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2).$$

2. Soit $(x, y) \in \ker(f)$. Par définition de f , on a $x + y = 0$ et $x - y = 0$, i.e., $x = y = 0$. Il vient alors $\ker(f) = \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a

$$\text{im}(f) = \{(x + y, x - y, x + y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ceci montre que

$$\text{im}(f) = \text{vect} \{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\}.$$

C'est bien en accord avec le théorème du rang (qui nous dit que la dimension de l'image plus celle du noyau doit valoir celle de $\mathbb{R}^2$ qui vaut 2).

3. Puisque $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, nous savons que f est injective. Par ailleurs, f n'est pas surjective car $\text{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$.

■

Exercice 44 (★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \quad \text{et} \quad g^{-1}(\operatorname{im}(g \circ f)) = \ker(g) + \operatorname{im}(f).$$

Solution. Notons $K := \ker(g \circ f)$ et $I := \operatorname{im}(g \circ f)$.

Montrons la première égalité. On procède par double inclusion en commençant par établir que $f(K) \subset \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$. Soit $y \in f(K)$. Il existe alors $x \in K$ tel que $y = f(x)$ et ceci entraîne bien sûr que $y \in \operatorname{im}(f)$. Par ailleurs, la définition de K donne $0 = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$ et ceci nous dit que $y \in \ker(g)$. Ceci confirme l'inclusion voulue à savoir $f(K) \subset \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$.

Montrons l'inclusion renversée, i.e., $\ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \subset f(K)$. Soit $y \in \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$. On peut écrire $y = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{K}^m$. Le fait que y soit un élément du noyau de g nous dit alors que $0 = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, i.e., $x \in K$. Il s'ensuit que $y \in f(K)$ et ceci traduit l'inclusion souhaitée $\ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \subset f(K)$. La première égalité est ainsi établie.

Montrons la seconde égalité. On procède par double inclusion en commençant par établir que $g^{-1}(I) \subset \ker(g) + \operatorname{im}(f)$. Soit $x \in g^{-1}(I)$. On a tout de suite $g(x) \in I$. Par définition de I , il existe $x' \in \mathbb{K}^m$ tel que $g(x) = (g \circ f)(x')$. Par linéarité de g , on peut écrire $g(x - f(x')) = 0$. Il s'ensuit que $x - f(x') \in \ker(g)$ et ceci nous dit que $x \in \operatorname{im}(f) + \ker(g)$.

Montrons l'inclusion renversée, i.e., $\ker(g) + \operatorname{im}(f) \subset g^{-1}(I)$. Soit $x \in \ker(g) + \operatorname{im}(f)$. Il existe $u \in \ker(g)$ et $v \in \operatorname{im}(f)$ tels que $x = u + v$. Par définition de l'image de f , on peut écrire $v = f(w)$ pour un certain $w \in \mathbb{K}^m$. On a alors $0 = g(u) = g(x - v) = g(x - f(w))$ et la linéarité de g entraîne $g(x) = (g \circ f)(w)$. On aboutit alors à $x \in g^{-1}(I)$. La seconde égalité est ainsi démontrée. ■

Exercice 45 (★★) Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de noyau

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}?$$

Solution. La partie H de $\mathbb{R}^4$ est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1. L'existence d'une telle application linéaire f donnerait via le théorème du rang $\operatorname{rg}(f) = 4 - 1 = 3$ ce qui est absurde compte-tenu du fait que $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. ■

Exercice 46 (★★) Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)).$$

Solution. Montrons d'abord les inégalités de gauche. Considérons deux applications linéaires $h_1, h_2 : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$. On a tout de suite

$$\operatorname{im}(h_1 + h_2) \subset \operatorname{im}(h_1) + \operatorname{im}(h_2).$$

On déduit de cette inclusion et de la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(h_1 + h_2) &\leq \dim(\operatorname{im}(h_1) + \operatorname{im}(h_2)) \\ &= \dim(\operatorname{im}(h_1)) + \dim(\operatorname{im}(h_2)) - \dim(\operatorname{im}(h_1) \cap \operatorname{im}(h_2)) \\ &\leq \dim(\operatorname{im}(h_1)) + \dim(\operatorname{im}(h_2)) \\ &= \operatorname{rg}(h_1) + \operatorname{rg}(h_2). \end{aligned} \tag{7}$$

En appliquant ceci avec $h_1 = f$ et $h_2 = g$, on obtient

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

En observant que $f + g$ et $-g$ sont des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$, on peut appliquer (7) avec $h_1 = f + g$ et $h_2 = -g$, il vient

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f + g - g) \leq \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-g).$$

Il reste à voir que $\text{rg}(g) = \text{rg}(-g)$ pour aboutir à

$$\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g).$$

De manière analogue, on montre que

$$\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g).$$

On conclut alors que

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g).$$

Montrons maintenant l'inégalité à droite dans l'énoncé. On a

$$(g \circ f)(\mathbb{K}^m) = g(f(\mathbb{K}^m)) = g(\text{im}(f)) \subset \text{im}(g),$$

d'où l'on tire

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g).$$

Par ailleurs, l'application linéaire $g|_{\text{im}(f)} : \text{im}(f) \rightarrow \mathbb{K}^n$ a pour image

$$g|_{\text{im}(f)}(\text{im}(f)) = g(\text{im}(f)) = \text{im}(g \circ f).$$

Ceci et une application directe du théorème du rang donnent

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g|_{\text{im}(f)}) \leq \dim(\text{im}(f)) = \text{rg}(f).$$

On conclut alors que

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f)).$$

■

Exercice 47 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est bijective. Montrer que

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n.$$

Solution. On commence par rappeler que

$$\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g). \quad (8)$$

Puisque l'application linéaire $f + g$ est bijective, on a

$$\text{rg}(f + g) = n.$$

D'autre part, l'égalité $f \circ g = 0$ donne sans difficultés $\text{im}(g) \subset \ker(f)$, en particulier $\text{rg}(g) \leq \dim \ker(f)$. En combinant ceci et le théorème du rang, il vient

$$\text{rg}(g) \leq n - \text{rg}(f).$$

En revenant à (8), nous voyons que

$$n = \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f) + n - \text{rg}(f) = n.$$

L'égalité souhaitée est établie. ■

Exercice 48 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) $\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.
- (b) $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$.
- (c) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Solution. (a) $\Rightarrow$ (b), On suppose que $\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$. On a toujours $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$. Soit $y \in \operatorname{im}(f)$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \operatorname{im}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Il s'ensuit que $y = f(x_1 + x_2) = f(x_2)$. Ceci et le fait que $x_2 \in \operatorname{im}(f)$ permet d'écrire $x_2 = f(z)$ pour un certain $z \in \mathbb{K}^n$ donnent $y = f^2(z) \in \operatorname{im}(f^2)$. (b) $\Rightarrow$ (c), Supposons $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$. En appliquant le théorème du rang à f et à f^2 , on obtient sans difficultés

$$\dim \ker(f) = \dim \ker(f^2).$$

En combinant ceci et l'inclusion évidente $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, on aboutit à $\ker(f) = \ker(f^2)$.

(c) $\Rightarrow$ (a), Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. Montrons tout d'abord que $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont en somme directe. Fixons $y \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Il vient alors $0 = f(y) = f^2(x)$, i.e., $x \in \ker(f^2)$. Notre hypothèse nous dit alors que $x \in \ker(f)$ et ceci montre que $y = 0$. En combinant ceci, la formule de Grassmann et le théorème du rang, on obtient

$$\dim(\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)) = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = n.$$

Il reste à voir que $\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \subset \mathbb{K}^n$ pour conclure que

$$\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f).$$

■

Exercice 49 (★★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires.

- (a) Montrer que $\ker(g|_{\operatorname{im}(f)}) = \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$.
- (b) En déduire que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\ker(g) \cap \operatorname{im}(f)).$$

- (c) Conclure que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n.$$

Solution. (a) L'égalité désirée découle tout de suite de la définition de $g|_{\operatorname{im}(f)}$.

- (b) Il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'application linéaire $g|_{\operatorname{im}(f)} : \operatorname{im}(f) \rightarrow \mathbb{K}^p$ pour obtenir

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\ker g|_{\operatorname{im}(f)}) + \operatorname{rg}(g|_{\operatorname{im}(f)}).$$

Puisque par définition $\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$, il reste à établir que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g|_{\operatorname{im}(f)})$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{K}^m$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g|_{\operatorname{im}(f)}(f(x)),$$

on obtient aisément $(g \circ f)(\mathbb{K}^m) = g|_{\operatorname{im}(f)}(\operatorname{im}(f))$. On conclut que

$$\dim((g \circ f)(\mathbb{K}^m)) = \dim(g|_{\operatorname{im}(f)}(\operatorname{im}(f)))$$

ce qui s'écrit encore

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g|_{\operatorname{im}(f)}).$$

- (c) L'inégalité voulue découle de la question précédente et de

$$\dim(\ker(g) \cap \operatorname{im}(f)) \leq \dim(\ker(g)) = n - \operatorname{rg}(g).$$

■

Exercice 50 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ la famille $(x, f(x))$ est liée. Le but de cet exercice est d'établir que f est une homothétie vectorielle, i.e., il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $f(x) = \lambda x$.

1. Etablir que pour chaque $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. *On pourra commencer par étudier le cas où la famille (x, y) est liée.*
3. Conclure.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}$ (qui dépendent bien sûr du vecteur x) tel que

$$\alpha x + \beta f(x) = 0.$$

Si $\beta = 0$, alors $\alpha x = 0$ puis $\alpha = 0$ ce qui est contradictoire. Il s'ensuit $\beta \neq 0$ puis $f(x) = -\alpha\beta^{-1}x$. Il reste à poser $\lambda_x := -\alpha\beta^{-1}$ pour conclure.

2. Supposons tout d'abord que la famille (x, y) soit liée. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0$. Supposons dans un premier temps que $\alpha \neq 0$. Il existe alors $x = \delta y$ et ceci permet d'écrire

$$\lambda_x x = f(x) = f(\delta y) = \delta f(y) = \delta \lambda_y y = \lambda_y x.$$

Il vient alors $(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$ puis (en gardant à l'esprit que $x \neq 0$) $\lambda_x = \lambda_y$. Si $\alpha = 0$, alors nécessairement $\beta \neq 0$ et un raisonnement analogue donnerait encore $\lambda_x = \lambda_y$.

Supposons maintenant que (x, y) soit libre. Il suffit d'écrire

$$\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

pour en arriver à

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Le caractère libre de la famille (x, y) donne alors $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, en particulier $\lambda_x = \lambda_y$.

3. D'après la Question 2., il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $c = \lambda_x$. Il reste à revenir à la Question 1., pour aboutir à l'égalité $f(x) = cx$ valide pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$.

■