

Algèbre linéaire 1

Florent Nacry (florent.nacry@univ-perp.fr)

Université Perpignan Via Domitia

Laboratoire LAMPS (Campus principal, Bâtiment B, Etage 1)

1. Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

2. Calcul matriciel et systèmes linéaires

3. Déterminants

- **Nombres d'heures** : 18h C.M. et 18h T.D.

- **Nombres d'heures** : 18h C.M. et 18h T.D.
- **Ressources disponibles sur Moodle** : "Algèbre Linéaire 1".

- **Nombres d'heures** : 18h C.M. et 18h T.D.
- **Ressources disponibles sur Moodle** : "Algèbre Linéaire 1".
- **Modalité de contrôle des connaissances (MCC)** : 2 Contrôles Terminaux (CT) avec une note finale donnée par :

$$\text{Note Finale} = \begin{cases} \text{Moy}(\text{CT1}, \text{CT2}) & \text{si présence au CT2,} \\ \text{CT1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Nombres d'heures** : 18h C.M. et 18h T.D.
- **Ressources disponibles sur Moodle** : "Algèbre Linéaire 1".
- **Modalité de contrôle des connaissances (MCC)** : 2 Contrôles Terminaux (CT) avec une note finale donnée par :

$$\text{Note Finale} = \begin{cases} \text{Moy}(\text{CT1}, \text{CT2}) & \text{si présence au CT2,} \\ \text{CT1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Equipe pédagogique (2025-2026)** :
 - Nathalie Caroff (MCF) : 2 groupe de TD
 - Mélanie Dreina (ATER) : 2 groupes de TD
 - Florent Nacry (MCF HDR, florent.nacry@univ-perp.fr) : CM.

Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

- Savoir calculer dans $\mathbb{K}^n$.
- Déterminer si une partie de $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. ou non.
- Obtenir une famille génératrice d'un s.e.v.
- Savoir montrer qu'une famille d'un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ est libre ou liée.
- Obtenir une base d'un s.e.v. et en déduire sa dimension.
Calculer le rang d'une famille de $\mathbb{K}^n$.
- Reconnaître la linéarité et dominer les concepts fondamentaux en lien avec les applications linéaires (notamment noyau et image).

Une brève introduction à partir de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

A ce stade, **nous vous estimons familiers** avec les notions de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, droites, plans, repères, coordonnées, vecteurs, points, etc. et leurs interprétations géométriques.

Une brève introduction à partir de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

A ce stade, **nous vous estimons familiers** avec les notions de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, droites, plans, repères, coordonnées, vecteurs, points, etc. et leurs interprétations géométriques.

A travers un repère "du plan"/"de l'espace", **vous avez identifié** un vecteur $\vec{u}$ à la donnée d'un couple (x, y) /d'un triplet (x, y, z) de réels.

Une brève introduction à partir de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

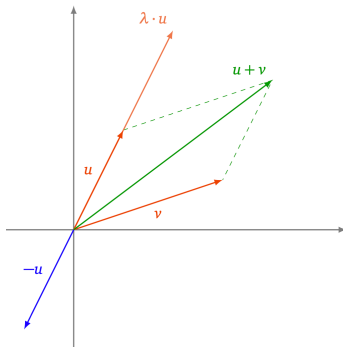
A ce stade, **nous vous estimons familiers** avec les notions de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, droites, plans, repères, coordonnées, vecteurs, points, etc. et leurs interprétations géométriques.

A travers un repère "du plan"/"de l'espace", **vous avez identifié** un vecteur $\vec{u}$ à la donnée d'un couple (x, y) /d'un triplet (x, y, z) de réels. Vous savez notamment **additionner** deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ / de $\mathbb{R}^3$ (dont l'interprétation géométrique est le parallélogramme ci-dessous) ainsi que **multiplier par un réel λ** un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ (qui correspond à un homothétique de $\vec{u}$).

Une brève introduction à partir de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

A ce stade, **nous vous estimons familiers** avec les notions de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, droites, plans, repères, coordonnées, vecteurs, points, etc. et leurs interprétations géométriques.

A travers un repère "du plan"/"de l'espace", **vous avez identifié** un vecteur $\vec{u}$ à la donnée d'un couple (x, y) /d'un triplet (x, y, z) de réels. Vous savez notamment **additionner** deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ / de $\mathbb{R}^3$ (dont l'interprétation géométrique est le parallélogramme ci-dessous) ainsi que **multiplier par un réel λ** un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ (qui correspond à un homothétique de $\vec{u}$).



Une brève introduction : suite et fin

Pour deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, x_2)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la somme de $\vec{u} + \vec{v}$ est donnée par

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et multiplier $\vec{u}$ par un réel λ revient à écrire

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Rappelons que la multiplication de 2 vecteurs n'est pas définie.

Une brève introduction : suite et fin

Pour deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, x_2)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la somme de $\vec{u} + \vec{v}$ est donnée par

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et multiplier $\vec{u}$ par un réel λ revient à écrire

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Rappelons que la multiplication de 2 vecteurs n'est pas définie.

Rien n'empêche a priori d'étendre ces notions d'addition et de multiplication par un réel au-delà de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et c'est ce que nous allons faire dans la suite. Soulignons également que ces calculs peuvent très bien se développer avec $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$.

Une brève introduction : suite et fin

Pour deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, x_2)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la somme de $\vec{u} + \vec{v}$ est donnée par

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et multiplier $\vec{u}$ par un réel λ revient à écrire

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Rappelons que la multiplication de 2 vecteurs n'est pas définie.

Rien n'empêche a priori d'étendre ces notions d'addition et de multiplication par un réel au-delà de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et c'est ce que nous allons faire dans la suite. Soulignons également que ces calculs peuvent très bien se développer avec $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$.

Concluons cette introduction en soulignant que nous n'avons jamais évoqué le terme "point" quand bien même vous avez pu souvent écrire des égalités du type :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)"$$

Les notions de points/de repères du plan ou de l'espace et leurs liens avec les vecteurs seront formalisées en toute rigueur à travers l'algèbre affine/géométrie affine (voir cours de L2) qui s'appuie très fortement sur l'algèbre linéaire.

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.¹

¹Note pour les futurs mathématiciens : tout ce qui suit peut se développer sur un corps commutatif quelconque.

Addition et multiplication (externe) sur $\mathbb{K}^n$

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.¹

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. L'**addition** de deux éléments de $\mathbb{K}^n$ et la **multiplication** d'un élément de $\mathbb{K}^n$ par un élément de $\mathbb{K}$ sont définies par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

¹Note pour les futurs mathématiciens : tout ce qui suit peut se développer sur un corps commutatif quelconque.

Addition et multiplication (externe) sur $\mathbb{K}^n$

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.¹

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. L'**addition** de deux éléments de $\mathbb{K}^n$ et la **multiplication** d'un élément de $\mathbb{K}^n$ par un élément de $\mathbb{K}$ sont définies par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Muni des deux opérations ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est appelé **espace vectoriel canonique de dimension n sur $\mathbb{K}$** .

- Un élément de $\mathbb{K}^n$ est appelé **vecteur**.
- Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé **scalaire**.
- L'**addition** est qualifiée d'interne; la **multiplication** est qualifiée d'externe.

¹Note pour les futurs mathématiciens : tout ce qui suit peut se développer sur un corps commutatif quelconque.

Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$(1, \frac{3}{2}, \pi, \sqrt{3}) + (-1, \frac{1}{2}, 2\pi, \sqrt{2}) = (0, 2, 3\pi, \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$(1, \frac{3}{2}, \pi, \sqrt{3}) + (-1, \frac{1}{2}, 2\pi, \sqrt{2}) = (0, 2, 3\pi, \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a

$$i.(1, 2i, \frac{-5}{2}, \sqrt{2}) = (i, -2, \frac{-5i}{2}, i\sqrt{2}).$$

Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$(1, \frac{3}{2}, \pi, \sqrt{3}) + (-1, \frac{1}{2}, 2\pi, \sqrt{2}) = (0, 2, 3\pi, \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a

$$i.(1, 2i, \frac{-5}{2}, \sqrt{2}) = (i, -2, \frac{-5i}{2}, i\sqrt{2}).$$

Les expressions suivantes ne sont pas définies :

$$??(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = ??$$

$$??(1, 2) + (3, 4, 5) = ??$$

$$??(1, 2).3??$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

● **Notations.** En général, on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le $\cdot$ de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra noter $\frac{x}{\lambda}$ le vecteur $\frac{1}{\lambda}x$.

Etant donné $u \in \mathbb{K}^n$, écrire $u(u_1, \dots, u_n)$ **n'a pas de sens ici**. Si $u \in \mathbb{K}^n$, il existe (par définition) $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

● **Notations.** En général, on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le $\cdot$ de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra noter $\frac{x}{\lambda}$ le vecteur $\frac{1}{\lambda}x$.

Etant donné $u \in \mathbb{K}^n$, écrire $u(u_1, \dots, u_n)$ **n'a pas de sens ici**. Si $u \in \mathbb{K}^n$, il existe (par définition) $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Proposition

Pour tout $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(1): u + v = v + u;$$

$$(2): (v + u) + w = v + (u + w);$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

● **Notations.** En général, on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le $\cdot$ de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra noter $\frac{x}{\lambda}$ le vecteur $\frac{1}{\lambda}x$.

Etant donné $u \in \mathbb{K}^n$, écrire $u(u_1, \dots, u_n)$ **n'a pas de sens ici**. Si $u \in \mathbb{K}^n$, il existe (par définition) $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Proposition

Pour tout $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(1): u + v = v + u;$$

$$(2): (v + u) + w = v + (u + w);$$

$$(3): v + 0_{\mathbb{K}^n} = v;$$

$$(4): v + (-v) = 0_{\mathbb{K}^n};$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

● **Notations.** En général, on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le $\cdot$ de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra noter $\frac{x}{\lambda}$ le vecteur $\frac{1}{\lambda}x$.

Etant donné $u \in \mathbb{K}^n$, écrire $u(u_1, \dots, u_n)$ **n'a pas de sens ici**. Si $u \in \mathbb{K}^n$, il existe (par définition) $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Proposition

Pour tout $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(1): u + v = v + u;$$

$$(2): (v + u) + w = v + (u + w);$$

$$(3): v + 0_{\mathbb{K}^n} = v;$$

$$(4): v + (-v) = 0_{\mathbb{K}^n};$$

$$(5): 1v = v;$$

$$(6): \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v;$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

● **Notations.** En général, on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le $\cdot$ de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra noter $\frac{x}{\lambda}$ le vecteur $\frac{1}{\lambda}x$.

Etant donné $u \in \mathbb{K}^n$, écrire $u(u_1, \dots, u_n)$ **n'a pas de sens ici**. Si $u \in \mathbb{K}^n$, il existe (par définition) $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Proposition

Pour tout $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(1): u + v = v + u;$$

$$(2): (v + u) + w = v + (u + w);$$

$$(3): v + 0_{\mathbb{K}^n} = v;$$

$$(4): v + (-v) = 0_{\mathbb{K}^n};$$

$$(5): 1v = v;$$

$$(6): \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v;$$

$$(7): (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v;$$

$$(8): \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u.$$

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que

$u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

La démonstration

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

La démonstration

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

La démonstration

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(4). On a $v + (-v) = (v_1 + (-v_1), \dots, v_n + (-v_n)) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(4). On a $v + (-v) = (v_1 + (-v_1), \dots, v_n + (-v_n)) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

(5). On a $1.v = (1, \dots, 1).(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(4). On a $v + (-v) = (v_1 + (-v_1), \dots, v_n + (-v_n)) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

(5). On a $1.v = (1, \dots, 1).(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(6). On a $\lambda.(\mu.v) = \lambda.(\mu v_1, \dots, \mu v_n) = (\lambda \mu v_1, \dots, \lambda \mu v_n) = (\lambda \mu).(v_1, \dots, v_n)$.

La démonstration

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(4). On a $v + (-v) = (v_1 + (-v_1), \dots, v_n + (-v_n)) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

(5). On a $1.v = (1, \dots, 1).(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(6). On a $\lambda.(\mu.v) = \lambda.(\mu v_1, \dots, \mu v_n) = (\lambda \mu v_1, \dots, \lambda \mu v_n) = (\lambda \mu).(v_1, \dots, v_n)$.

(7). On a

$$(\lambda + \mu).v = ((\lambda + \mu)v_1, \dots, (\lambda + \mu)v_n) = \lambda.(v_1, \dots, v_n) + \mu.(v_1, \dots, v_n) = \lambda.v + \mu.v.$$

La démonstration

Soient $u, v, w \in \mathbb{K}^n$. Il existe $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.

(1). Il suffit d'écrire $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = v + u$.

(2). On a d'une part

$$(v + u) + w = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) + w = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n)$$

et d'autre part

$$v + (u + w) = (v_1, \dots, v_n) + (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) = (v_1 + u_1 + w_1, \dots, v_n + u_n + w_n).$$

(3). On a $v + 0_{\mathbb{K}^n} = (v_1 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(4). On a $v + (-v) = (v_1 + (-v_1), \dots, v_n + (-v_n)) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

(5). On a $1.v = (1, \dots, 1).(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

(6). On a $\lambda.(\mu.v) = \lambda.(\mu v_1, \dots, \mu v_n) = (\lambda \mu v_1, \dots, \lambda \mu v_n) = (\lambda \mu).(v_1, \dots, v_n)$.

(7). On a

$$(\lambda + \mu).v = ((\lambda + \mu)v_1, \dots, (\lambda + \mu)v_n) = \lambda.(v_1, \dots, v_n) + \mu.(v_1, \dots, v_n) = \lambda.v + \mu.v.$$

(8). On a

$$\lambda.(v + u) = (\lambda(v_1 + u_1), \dots, \lambda(v_n + u_n)) = \lambda.(v_1, \dots, v_n) + \lambda.(u_1, \dots, u_n) = \lambda.v + \lambda.u.$$



"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;
- $(1, 2) + [-1 \cdot (1, 2)] = (0, 0)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;
- $(1, 2) + [-1 \cdot (1, 2)] = (0, 0)$;

● Les deux suivantes concernent la loi $\cdot$: la première exprime **l'existence d'un neutre 1 et l'associativité**.

- $1 \cdot (1, 2) = (1, 2)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;
- $(1, 2) + [-1 \cdot (1, 2)] = (0, 0)$;

● Les deux suivantes concernent la loi $\cdot$: la première exprime **l'existence d'un neutre 1 et l'associativité**.

- $1 \cdot (1, 2) = (1, 2)$;
- $2 \cdot [3 \cdot (1, 2)] = (2 \times 3) \cdot (1, 2) = 6 \cdot (1, 2) = (6, 12)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;
- $(1, 2) + [-1 \cdot (1, 2)] = (0, 0)$;

● Les deux suivantes concernent la loi $\cdot$: la première exprime **l'existence d'un neutre 1 et l'associativité**.

- $1 \cdot (1, 2) = (1, 2)$;
- $2 \cdot [3 \cdot (1, 2)] = (2 \times 3) \cdot (1, 2) = 6 \cdot (1, 2) = (6, 12)$;

● Enfin, les deux dernières expriment une certaine compatibilité entre $+$ et $\cdot$: la **distributivité à gauche et à droite**.

- $(2 + 3) \cdot (1, 2) = 2 \cdot (1, 2) + 3 \cdot (1, 2) = (5, 10)$;

"Ces huit règles de calculs" sont aussi naturelles que fondamentales : elles seront notamment à la base de la théorie générale des espaces vectoriels.

● Les quatre premières concernent la loi $+$: elles expriment respectivement la **commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre 0 et d'un symétrique**.

- $(1, 2) + (3, 4) = (3, 4) + (1, 2) = (4, 6)$;
- $[(1, 2) + (3, 4)] + (5, 6) = (1, 2) + [(3, 4) + (5, 6)] = (9, 12)$;
- $(1, 2) + (0, 0) = (1, 2)$;
- $(1, 2) + [-1 \cdot (1, 2)] = (0, 0)$;

● Les deux suivantes concernent la loi $\cdot$: la première exprime **l'existence d'un neutre 1 et l'associativité**.

- $1 \cdot (1, 2) = (1, 2)$;
- $2 \cdot [3 \cdot (1, 2)] = (2 \times 3) \cdot (1, 2) = 6 \cdot (1, 2) = (6, 12)$;

● Enfin, les deux dernières expriment une certaine compatibilité entre $+$ et $\cdot$: la **distributivité à gauche et à droite**.

- $(2 + 3) \cdot (1, 2) = 2 \cdot (1, 2) + 3 \cdot (1, 2) = (5, 10)$;
- $2 \cdot [(1, 2) + (3, 4)] = 2 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (3, 4) = (8, 12)$.

On examine ici l'effet d'une multiplication par 0.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Ont lieu:

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $0.x = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, on a $\lambda.x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

On examine ici l'effet d'une multiplication par 0.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Ont lieu:

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $0.x = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, on a $\lambda.x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

Démonstration. (a) En effet, pour un $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$0.(x_1, \dots, x_n) = (0 \times x_1, \dots, 0 \times x_n) = (0, \dots, 0).$$

(b) Il suffit de voir que pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.0_{\mathbb{K}^n} = (\lambda \times 0, \dots, \lambda \times 0) = (0, \dots, 0)$.

(c) Par l'absurde, supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$ et un $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tels que

$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (0, \dots, 0).$$

On observe alors que $\lambda x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ ce qui entraîne

$$x_i = 0 \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ceci est contradictoire et termine la démonstration de (c). ■

Nous introduisons ici une classe de parties au cœur de l'algèbre linéaire.

Définition (Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$)

Soient $n \geq 1$ un entier et F une partie de $\mathbb{K}^n$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** de $\mathbb{K}^n$ lorsque:

(i) $0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0) \in F$;

(ii) pour tout $u, v \in F$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Nous introduisons ici une classe de parties au cœur de l'algèbre linéaire.

Définition (Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$)

Soient $n \geq 1$ un entier et F une partie de $\mathbb{K}^n$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** de $\mathbb{K}^n$ lorsque:

(i) $0_{\mathbb{K}^n} := (0, \dots, 0) \in F$;

(ii) pour tout $u, v \in F$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Il est équivalent de remplacer (i) par (i') : $F \neq \emptyset$. Il est également équivalent de remplacer (ii) par (ii') ou par (ii'') avec

$$(i') : u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \quad \text{pour tout } u, v \in F, \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$(ii'') : \lambda u + v \in F \quad \text{pour tout } u, v \in F, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (qui est une droite de $\mathbb{R}^2$).

Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (qui est une droite de $\mathbb{R}^2$).

Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

(i) On a $(0, 0) \in D$ car $2 \times 0 + 0 = 0$.

Un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (qui est une droite de $\mathbb{R}^2$).

Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

(i) On a $(0, 0) \in D$ car $2 \times 0 + 0 = 0$.

(ii) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition de D , on a

$$2x_1 + y_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 = 0. \tag{1}$$

Un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (qui est une droite de $\mathbb{R}^2$).

Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

(i) On a $(0, 0) \in D$ car $2 \times 0 + 0 = 0$.

(ii) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition de D , on a

$$2x_1 + y_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 = 0. \quad (1)$$

D'autre part, on a

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\underbrace{\lambda x_1 + \mu x_2}_{=: X}, \underbrace{\lambda y_1 + \mu y_2}_{=: Y}).$$

Un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (qui est une droite de $\mathbb{R}^2$).

Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

(i) On a $(0, 0) \in D$ car $2 \times 0 + 0 = 0$.

(ii) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition de D , on a

$$2x_1 + y_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 = 0. \quad (1)$$

D'autre part, on a

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\underbrace{\lambda x_1 + \mu x_2}_{=: X}, \underbrace{\lambda y_1 + \mu y_2}_{=: Y}).$$

Pour voir que $(X, Y) \in D$, il reste à écrire

$$2X + Y = 2(\lambda x_1 + \mu x_2) + \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda(2x_1 + y_1) + \mu(2x_2 + y_2) = 0,$$

où la dernière égalité résulte de (1).

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
- $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
- $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- Soient $n \geq 1$ entier et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
- $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- Soient $n \geq 1$ entier et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

- Piège : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
(En effet, $K = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $x^2 + y^2 = 0$, on doit avoir $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$, donc $x^2 = 0$ puis $x = 0$ et de même pour y).

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
- $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- Soient $n \geq 1$ entier et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

- Piège : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
(En effet, $K = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $x^2 + y^2 = 0$, on doit avoir $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$, donc $x^2 = 0$ puis $x = 0$ et de même pour y).
- Les s.e.v. de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $n \geq 1$ un entier.

- $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ appelé **s.e.v. nul**.

Soit $n \geq 1$ un entier.

- $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ appelé **s.e.v. nul**.
- $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Soit $n \geq 1$ un entier.

- $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ appelé **s.e.v. nul**.
- $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
- Un s.e.v. F de $\mathbb{K}^n$ non nul est infini. En effet, si $v \in F$ alors F contient l'ensemble

$$\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

qui est infini lorsque $v \neq 0$ (puisque $\mathbb{K}$ est infini).

Soit $n \geq 1$ un entier.

- $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ appelé **s.e.v. nul**.
- $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
- Un s.e.v. F de $\mathbb{K}^n$ non nul est infini. En effet, si $v \in F$ alors F contient l'ensemble

$$\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

qui est infini lorsque $v \neq 0$ (puisque $\mathbb{K}$ est infini).

- La propriété (ii') se synthétise en disant qu'un s.e.v. F de $\mathbb{K}^n$ est stable par somme (i.e., la **somme** de deux vecteurs de F appartient à F) et par **produit externe** (i.e., tout multiple/homothétique d'un vecteur de F est encore dans F).

On commence par définir la notion de droite vectorielle aperçue dans le troisième point du transparent précédent:

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. L'ensemble $\mathbb{K}v := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé **$\mathbb{K}$ -droite vectorielle de $\mathbb{K}^n$ engendrée par le vecteur v** .

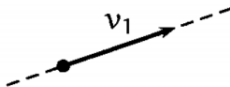


Figure 1: Illustration de la $\mathbb{K}$ -droite vectorielle $\mathbb{K}v_1$ pour un vecteur $v_1 \neq 0$

On commence par définir la notion de droite vectorielle aperçue dans le troisième point du transparent précédent:

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. L'ensemble $\mathbb{K}v := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé **$\mathbb{K}$ -droite vectorielle de $\mathbb{K}^n$ engendrée par le vecteur v** .

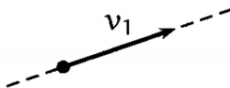


Figure 1: Illustration de la $\mathbb{K}$ -droite vectorielle $\mathbb{K}v_1$ pour un vecteur $v_1 \neq 0$

On vérifie immédiatement que les $\mathbb{K}$ -droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$ sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. On peut bien sûr étendre la notation $\mathbb{K}v$ pour $v = 0$ (auquel cas, on a bien sûr $\mathbb{K}0 := \{\lambda \cdot 0 : \lambda \in \mathbb{K}\} = \{0\}$ qui n'a rien d'une droite... et qui par définition n'est pas une droite vectorielle !).

Droites vectorielles dans $\mathbb{K}^2$

Il est naturel et intéressant d'examiner la notion de $\mathbb{K}$ -droite vectorielle pour $n = 2$, i.e., dans $\mathbb{K}^2$.

Soit $v = (a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si $a \neq 0$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$

$$(x, y) \in \mathbb{K}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \end{cases} \Leftrightarrow y = a^{-1}bx.$$

Le système d'équations ci-dessus est parfois qualifié de **représentation paramétrique de la droite $\mathbb{K}v$** . Il découle de ces équivalences l'égalité

$$\mathbb{K}v = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : a^{-1}bx - y = 0\} \quad \text{lorsque } a \neq 0$$

ce que l'on exprime parfois en disant que $\mathbb{K}v$ admet pour **équation cartésienne** $a^{-1}bx - y = 0$. De même, si $b \neq 0$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$

$$(x, y) \in \mathbb{K}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \end{cases} \Leftrightarrow x = b^{-1}ay.$$

Ceci traduit l'égalité

$$\mathbb{K}v = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : x - b^{-1}ay = 0\} \quad \text{lorsque } b \neq 0,$$

on dit encore que $\mathbb{K}v$ admet pour **équation cartésienne** $x - b^{-1}ay = 0$.

Notons enfin que cette étude montre que tout ensemble de la forme

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : px + qy = 0\} \quad \text{pour } (p, q) \neq (0, 0)$$

(que l'on peut parfois qualifier de *droite admettant pour équation cartésienne* $px + qy = 0$) est une droite vectorielle de $\mathbb{K}^2$.

Un mot sur les droites vectorielles dans $\mathbb{K}^3$

Une **erreur courante** est de penser qu'une démarche analogue à celle du transparent précédent conduit à des équations cartésiennes de droites vectorielles dans $\mathbb{K}^3$ du type $ax + by + cz = 0$.

Fixons $v = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$. Observons que la définition d'une droite vectorielle nous donne pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$

$$(x, y, z) \in \mathbb{K}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, (x, y, z) = \lambda(a, b, c) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \end{cases}$$

Ce système d'équations est là encore qualifié de **représentation paramétrique de la droite $\mathbb{K}v$** .

Un mot sur les droites vectorielles dans $\mathbb{K}^3$

Une **erreur courante** est de penser qu'une démarche analogue à celle du transparent précédent conduit à des équations cartésiennes de droites vectorielles dans $\mathbb{K}^3$ du type $ax + by + cz = 0$.

Fixons $v = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$. Observons que la définition d'une droite vectorielle nous donne pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$

$$(x, y, z) \in \mathbb{K}v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, (x, y, z) = \lambda(a, b, c) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \end{cases}$$

Ce système d'équations est là encore qualifié de **représentation paramétrique de la droite $\mathbb{K}v$** .

Le "passage" en **représentation cartésienne** s'appuie sur le fait que $v \neq 0$. A titre d'exemple, si $a \neq 0$, on peut facilement voir que

$$\mathbb{K}v = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : \begin{cases} a^{-1}xc - z = 0 \\ a^{-1}xb - y = 0 \end{cases} \right\}.$$

Le résultat suivant donne une description explicite de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$.

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont exactement $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$, les droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^2$.

Le résultat suivant donne une description explicite de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$.

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont exactement $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$, les droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^2$.

Démonstration. Nous savons déjà que $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$, $\mathbb{K}^2$ et les droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$ sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^2$.

Réciproquement, considérons F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ distinct de $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$ et qui ne soit pas une $\mathbb{K}$ -droite vectorielle de $\mathbb{K}^2$. Nous allons montrer que $F = \mathbb{K}^2$. On a bien sûr $F \subset \mathbb{K}^2$. Fixons $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. Puisque $F \neq \{0\}$, on peut choisir $v := (a, b) \in F \setminus \{0\}$. Le fait que F ne soit pas une $\mathbb{K}$ -droite vectorielle de $\mathbb{K}^2$ nous dit qu'il existe $w := (c, d) \in F$ avec $w \notin \mathbb{K}v$. Par ailleurs, le fait que (c, d) ne soit pas un multiple/homothétique de (a, b) entraîne sans difficultés que $\delta := ad - bc \neq 0$. En posant $\alpha := \delta^{-1}(xd - yc)$ et $\beta := \delta^{-1}(ya - xb)$ on voit que

$$(x, y) = \alpha(a, b) + \beta(c, d) \in F.$$

On conclut que $F = \mathbb{K}^2$. ■

Vers la classification des s.e.v. de $\mathbb{K}^3$ - plan vectoriels

On peut obtenir une description explicite des s.e.v. de $\mathbb{K}^3$ à l'aide de la notion de plan vectoriel :

Définition

Soient $n \geq 2$ un entier, $v_1 \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $v_2 \in \mathbb{K}^n \setminus \mathbb{K}v_1$. L'ensemble² $\{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est appelé plan vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par v_1 et v_2 .

On vérifie que les plans vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Observer que dans la définition ci-dessus l'entier n est supérieur ou égal à 2 (on ne peut pas définir la notion de plan vectoriels dans $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$). Noter enfin que si $v_1 = 0$ ou $v_2 \in \mathbb{K}v_1$, l'ensemble $\{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est une droite vectorielle.

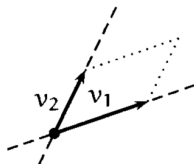


Figure 2: Illustration d'un plan vectoriel engendré par deux vecteurs v_1, v_2

²Cet ensemble sera bientôt noté $\mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2$.

Vers la classification des s.e.v. de $\mathbb{K}^3$ - plan vectoriels

On peut obtenir une description explicite des s.e.v. de $\mathbb{K}^3$ à l'aide de la notion de plan vectoriel :

Définition

Soient $n \geq 2$ un entier, $v_1 \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $v_2 \in \mathbb{K}^n \setminus \mathbb{K}v_1$. L'ensemble² $\{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est appelé plan vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par v_1 et v_2 .

On vérifie que les plans vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Observer que dans la définition ci-dessus l'entier n est supérieur ou égal à 2 (on ne peut pas définir la notion de plan vectoriels dans $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$). Noter enfin que si $v_1 = 0$ ou $v_2 \in \mathbb{K}v_1$, l'ensemble $\{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est une droite vectorielle.

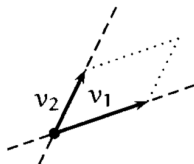


Figure 2: Illustration d'un plan vectoriel engendré par deux vecteurs v_1, v_2

²Cet ensemble sera bientôt noté $\mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2$.

Quelques mots sur les plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$

Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ engendré par deux vecteurs $v_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{K}^3$ et $v_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$.

Quelques mots sur les plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$

Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ engendré par deux vecteurs $v_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{K}^3$ et $v_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$.

Observons que la définition de plan vectoriel donne ce que l'on appelle les **équations paramétriques** : en effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ on a

$$(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (x, y, z) = \lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

Quelques mots sur les plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$

Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ engendré par deux vecteurs $v_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{K}^3$ et $v_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$.

Observons que la définition de plan vectoriel donne ce que l'on appelle les **équations paramétriques** : en effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ on a

$$(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (x, y, z) = \lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} x = \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

On peut établir en toute généralité (c'est assez fastidieux à ce stade (voir le Chapitre 3 pour une méthode "efficace") et nous n'en aurons pas l'usage pour la suite) que

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\} \quad (2)$$

pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** (il est même possible d'avoir des expressions des scalaires α, β et γ en fonctions des a_i, b_i et c_i). On dit parfois que $\mathcal{P}$ admet pour **équation cartésienne** $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Remarquons enfin qu'un ensemble de la forme (2) avec α, β, γ non tous nuls est évidemment un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

On énonce à présent le résultat de classification des s.e.v. de $\mathbb{K}^3$:

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ sont exactement $\{0_{\mathbb{K}^3}\}$, les droites vectorielles de $\mathbb{K}^3$, les plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$ et $\mathbb{K}^3$.

Il est possible d'établir ce résultat en adaptant la démonstration de la classification des s.e.v. de $\mathbb{K}^2$. Nous allons suivre une autre démarche : celle de développer dans ce chapitre les outils nous permettant d'obtenir une classification des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ entier quelconque. Nous obtiendrons donc le résultat ci-dessus comme conséquence directe de notre étude.

Les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0 (resp. les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par 0) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Ils sont "maximaux" au sens où le seul sous-espace vectoriel qui les contiennent strictement est $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Nous verrons plus loin que l'analogue dans $\mathbb{K}^n$ est donné par la définition suivante :

Les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0 (resp. les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par 0) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Ils sont "maximaux" au sens où le seul sous-espace vectoriel qui les contiennent strictement est $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Nous verrons plus loin que l'analogue dans $\mathbb{K}^n$ est donné par la définition suivante :

Définition (Hyperplan)

Soit $n \geq 1$ un entier. Etant donnés $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** et $b \in \mathbb{K}$, on appelle **hyperplan affine** de $\mathbb{K}^n$ l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}.$$

Les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0 (resp. les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par 0) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Ils sont "maximaux" au sens où le seul sous-espace vectoriel qui les contiennent strictement est $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Nous verrons plus loin que l'analogue dans $\mathbb{K}^n$ est donné par la définition suivante :

Définition (Hyperplan)

Soit $n \geq 1$ un entier. Etant donnés $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** et $b \in \mathbb{K}$, on appelle **hyperplan affine** de $\mathbb{K}^n$ l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}.$$

Lorsque $b = 0$, l'ensemble ci-dessus est appelé **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$) le terme "hyperplan" est remplacé par "droite" (resp. "plan").

Les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0 (resp. les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par 0) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Ils sont "maximaux" au sens où le seul sous-espace vectoriel qui les contiennent strictement est $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Nous verrons plus loin que l'analogue dans $\mathbb{K}^n$ est donné par la définition suivante :

Définition (Hyperplan)

Soit $n \geq 1$ un entier. Etant donnés $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** et $b \in \mathbb{K}$, on appelle **hyperplan affine** de $\mathbb{K}^n$ l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}.$$

Lorsque $b = 0$, l'ensemble ci-dessus est appelé **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$) le terme "hyperplan" est remplacé par "droite" (resp. "plan").

- L'hypothèse "**non tous nuls**" est fondamentale.
- Un hyperplan affine n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ en général : c'est un sous-espace affine... dont la théorie générale sera développée en L2.

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- **Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices**
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

La définition de s.e.v. conduit à introduire la :

Définition (Combinaison linéaire)

Soient $n \geq 1$ et L une partie de $\mathbb{K}$. Une **combinaison linéaire** de p (avec $p \geq 1$) vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{K}^n$ à coefficients dans L est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in L.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

La définition de s.e.v. conduit à introduire la :

Définition (Combinaison linéaire)

Soient $n \geq 1$ et L une partie de $\mathbb{K}$. Une **combinaison linéaire** de p (avec $p \geq 1$) vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{K}^n$ à coefficients dans L est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in L.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

- Toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est un élément de $\mathbb{K}^n$.

La définition de s.e.v. conduit à introduire la :

Définition (Combinaison linéaire)

Soient $n \geq 1$ et L une partie de $\mathbb{K}$. Une **combinaison linéaire** de p (avec $p \geq 1$) vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{K}^n$ à coefficients dans L est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in L.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

- Toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est un élément de $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (5, 6, 7, 8)$. Alors, le vecteur

$$2v_1 - 3v_2 = (2, 4, 6, 8) - (15, 18, 21, 24) = (-13, -14, -15, -16)$$

est une combinaison linéaire (de **coefficients** associés **2** et **-3**) de v_1 et de v_2 .

Revenons un instant à la définition de s.e.v. La condition (ii) exprime le fait qu'un s.e.v. F de $\mathbb{K}^n$ est **stable** par combinaison linéaire de deux vecteurs de F (i.e., étant donnés deux vecteurs $x, y \in F$, la combinaison linéaire $\lambda x + \mu y$ est encore un vecteur de F ceci quels que soient les scalaires λ et μ).

Cette stabilité s'étend à un nombre quelconque (fini) de vecteurs de F . Plus précisément :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier. Alors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 2$, pour tout $x_1, \dots, x_k \in F$ et pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in F.$$

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ est évidente compte-tenu de la définition d'un s.e.v. tandis que l'implication réciproque découle d'une récurrence immédiate. ■

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$ à p éléments ($p \geq 1$ entier).

On s'intéresse naturellement à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ formées à partir de $v_1, \dots, v_p$, c'est-à-dire à l'ensemble

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\},$$

Lorsque $p = 1$, l'ensemble $\text{vect}\{v_1\}$ n'est nul autre que $\mathbb{K}v_1$, i.e.,

$$\mathbb{K}v_1 := \text{vect}\{v_1\} = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Si $p = 2$, on a

$$\text{vect}\{v_1, v_2\} := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$$

qui n'est rien d'autre que le plan vectoriel engendré par v_1, v_2 lorsque $v_1 \neq 0$ et $v_2 \notin \mathbb{K}v_1$.

Soit $n \geq 1$ un entier.

Commençons par observer (en revenant à la définition de vect) que pour toute famille $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$ (avec $p \geq 1$) on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \text{vect}\{v_1, \dots, v_p, w\} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{K}^n.$$

Soit $n \geq 1$ un entier.

Commençons par observer (en revenant à la définition de vect) que pour toute famille $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$ (avec $p \geq 1$) on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \text{vect}\{v_1, \dots, v_p, w\} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{K}^n.$$

Nous allons voir ci-dessous que cette inclusion peut être selon les cas **ou bien une égalité** **ou bien stricte**.

- **Un exemple de cas d'égalité** : On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'égalité $(2, 4) = 2(1, 2)$ donne tout de suite

$$\text{vect}\{(1, 2)\} = \text{vect}\{(2, 4)\} = \text{vect}\{(1, 2), (2, 4)\}.$$

- **Un exemple d'inclusion stricte** : Par ailleurs, on peut vérifier que

$$\text{vect}\{(1, 2)\} \neq \text{vect}\{(1, 2), (3, 4)\}.$$

Nous allons maintenant établir que $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est le **plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$** contenant $v_1, \dots, v_p$.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$ à p éléments. On a lieu :

(a) L'ensemble $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(b) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on a $v_k \in \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.

(c) Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant les vecteurs $v_1, \dots, v_p$, alors on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset F.$$

(d) On a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \bigcap_{F \in \mathcal{S}} F =: \{x \in \mathbb{K}^n : \forall F \in \mathcal{S}, x \in F\},$$

où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ contenant $v_1, \dots, v_p$.

On note $V := \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$.

(a) On a évidemment $0_{\mathbb{K}^n} \in V$ puisque

$$0_{\mathbb{K}^n} = 0.v_1 + \dots + 0.v_p.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{et} \quad y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p.$$

Il vient alors

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + \alpha(\lambda_p + \mu_p)v_p,$$

en particulier $\alpha x + \beta y \in V$. On conclut que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

On note $V := \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$.

(a) On a évidemment $0_{\mathbb{K}^n} \in V$ puisque

$$0_{\mathbb{K}^n} = 0.v_1 + \dots + 0.v_p.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{et} \quad y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p.$$

Il vient alors

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + \alpha(\lambda_p + \mu_p)v_p,$$

en particulier $\alpha x + \beta y \in V$. On conclut que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(b) Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$v_k = 1.v_k + \sum_{l \neq k} 0.v_l \in \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}.$$

On note $V := \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$.

(a) On a évidemment $0_{\mathbb{K}^n} \in V$ puisque

$$0_{\mathbb{K}^n} = 0.v_1 + \dots + 0.v_p.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{et} \quad y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p.$$

Il vient alors

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + \alpha(\lambda_p + \mu_p)v_p,$$

en particulier $\alpha x + \beta y \in V$. On conclut que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(b) Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$v_k = 1.v_k + \sum_{l \neq k} 0.v_l \in \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}.$$

(c) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant V . Soit $x \in V$. Par définition de V , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. En combinant (b) et notre hypothèse, il vient $v_1, \dots, v_p \in F$. Il reste alors à exploiter que F est stable par combinaison linéaire pour conclure que $\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k \in F$.

On note $V := \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$.

(a) On a évidemment $0_{\mathbb{K}^n} \in V$ puisque

$$0_{\mathbb{K}^n} = 0.v_1 + \dots + 0.v_p.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{et} \quad y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p.$$

Il vient alors

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + \alpha(\lambda_p + \mu_p)v_p,$$

en particulier $\alpha x + \beta y \in V$. On conclut que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(b) Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$v_k = 1.v_k + \sum_{l \neq k} 0.v_l \in \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}.$$

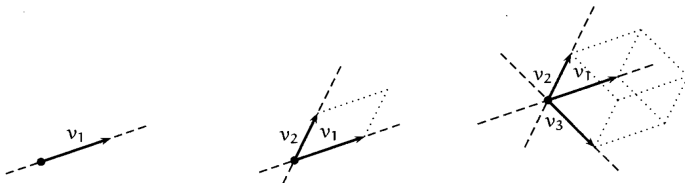
(c) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant V . Soit $x \in V$. Par définition de V , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. En combinant (b) et notre hypothèse, il vient $v_1, \dots, v_p \in F$. Il reste alors à exploiter que F est stable par combinaison linéaire pour conclure que $\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k \in F$.

(d) C'est une conséquence directe de (a), (b) et (c) ci-dessus. ■

On donne un nom au sous-espace vectoriel $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.

Définition (S.e.v. engendré par une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs $\mathbb{K}^n$. L'ensemble $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(v_1, \dots, v_p)$.



On va s'intéresser dans la suite à décrire des sous-espaces vectoriels à l'aide de vect. Cette idée est l'extension naturelle de celle consistant à déterminer un vecteur directeur d'une droite (ce qui permet donc de décrire une droite à l'aide d'un seul vecteur).

Définition (Famille génératrice)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est **génératrice** de F lorsque

$$F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

On va s'intéresser dans la suite à décrire des sous-espaces vectoriels à l'aide de vect. Cette idée est l'extension naturelle de celle consistant à déterminer un vecteur directeur d'une droite (ce qui permet donc de décrire une droite à l'aide d'un seul vecteur).

Définition (Famille génératrice)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est **génératrice** de F lorsque

$$F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

- Soit $v \in \mathbb{K}^n$. La famille à 1 élément (v) est génératrice de $\mathbb{K}v$.
- Soit $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ avec $v_1 \neq 0$ et $v_2 \notin \mathbb{K}v_1$. La famille à 2 éléments (v_1, v_2) est génératrice du plan vectoriel engendré par v_1, v_2 .
- La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{K}^3$, i.e.,

$$\mathbb{K}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Comment obtenir une famille génératrice ?

Nous allons voir comment aller au-delà des deux cas intéressants (bien que limités) développés dans le transparent précédent.

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. On a vu que $\mathcal{D}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer **comment obtenir une famille génératrice** de $\mathcal{D}$, i.e., comment trouver

$v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathcal{D} = \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}.$$

Comment obtenir une famille génératrice ?

Nous allons voir comment aller au-delà des deux cas intéressants (bien que limités) développés dans le transparent précédent.

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. On a vu que $\mathcal{D}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer **comment obtenir une famille génératrice** de $\mathcal{D}$, i.e., comment trouver $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathcal{D} = \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}.$$

En écrivant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (x, -2x) \Leftrightarrow (x, y) = x(1, -2)$$

on voit que

$$\mathcal{D} = \{\lambda(1, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{vect} \{(1, -2)\} =: \mathbb{R}(1, -2).$$

Le s.e.v. $\mathcal{D}$ admet donc une famille génératrice à 1 élément constituée du vecteur $(1, -2)$.

Quelques observations

On note facilement que

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4)\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \dots$$

Quelques observations

On note facilement que

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4)\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \dots$$

Conséquences.

- Pas d'unicité de la famille génératrice.

On note facilement que

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4)\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \dots$$

Conséquences.

- Pas d'unicité de la famille génératrice.
- On peut construire des familles génératrices de cardinal arbitrairement grand.
- Pas d'unicité du nombre d'éléments d'une famille génératrice : l'intérêt est d'avoir à disposition une famille génératrice avec le **plus petit nombre d'éléments possible**.

On note facilement que

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4)\} = \text{vect} \{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \dots$$

Conséquences.

- Pas d'unicité de la famille génératrice.
- On peut construire des familles génératrices de cardinal arbitrairement grand.
- Pas d'unicité du nombre d'éléments d'une famille génératrice : l'intérêt est d'avoir à disposition une famille génératrice avec le **plus petit nombre d'éléments possible**.

S'il est facile (mais sans grand intérêt) de construire des familles génératrices de cardinal arbitrairement grand, il n'en est pas de même du problème évoqué **ci-dessus**.

A titre d'exemple, on pourra montrer que

$$\mathcal{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \text{vect} \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

n'admet pas de famille génératrice contenant un seul élément.

Suppression d'un générateur

Le résultat suivant permet de diminuer le nombre d'éléments d'un vect (parfois appelés "générateurs").

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Si $v_k := \sum_{1 \leq j \leq p, j \neq k} \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}\{v_j : j \in \{1, \dots, p\}, j \neq k\}.$$

Suppression d'un générateur

Le résultat suivant permet de diminuer le nombre d'éléments d'un vect (parfois appelés "générateurs").

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Si $v_k := \sum_{1 \leq j \leq p, j \neq k} \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}\{v_j : j \in \{1, \dots, p\}, j \neq k\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est évidente. Montrons l'inclusion renversée. Soit $x \in \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Il existe $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j=1}^p \mu_j v_j$. On a alors

$$x = \sum_{j \neq k} \mu_j v_j + \mu_k \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j$$

et ceci nous dit que $x \in \text{vect}\{v_j : j \in \{1, \dots, p\}, j \neq k\}$. ■

Suppression d'un générateur

Le résultat suivant permet de diminuer le nombre d'éléments d'un vect (parfois appelés "générateurs").

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Si $v_k := \sum_{1 \leq j \leq p, j \neq k} \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}\{v_j : j \in \{1, \dots, p\}, j \neq k\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est évidente. Montrons l'inclusion renversée. Soit $x \in \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Il existe $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j=1}^p \mu_j v_j$. On a alors

$$x = \sum_{j \neq k} \mu_j v_j + \mu_k \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j$$

et ceci nous dit que $x \in \text{vect}\{v_j : j \in \{1, \dots, p\}, j \neq k\}$. ■

Exemple. Puisque $(-1, 0) = 2(1, 2) - (3, 4)$, on a

$$\text{vect}\{(1, 2), (3, 4), (-1, 0)\} = \text{vect}\{(1, 2), (3, 4)\}.$$

Remplacement d'un générateur

On dispose également d'un résultat permettant de remplacer un générateur donné :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Soit $u := \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\lambda_k \neq 0$. Alors, on a

$$\text{vect} \{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect} \{v_1, \dots, v_{k-1}, u, v_{k+1}, \dots, v_p\}.$$

Remplacement d'un générateur

On dispose également d'un résultat permettant de remplacer un générateur donné :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Soit $u := \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\lambda_k \neq 0$. Alors, on a

$$\text{vect} \{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect} \{v_1, \dots, v_{k-1}, u, v_{k+1}, \dots, v_p\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est claire. L'inclusion $\subset$ découle du fait que

$$v_k = \lambda_k^{-1} (u - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j).$$



Remplacement d'un générateur

On dispose également d'un résultat permettant de remplacer un générateur donné :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $k \in \{1, \dots, p\}$.

Soit $u := \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\lambda_k \neq 0$. Alors, on a

$$\text{vect} \{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect} \{v_1, \dots, v_{k-1}, u, v_{k+1}, \dots, v_p\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est claire. L'inclusion $\subset$ découle du fait que

$$v_k = \lambda_k^{-1} (u - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j).$$



Exemple. $n = 2$, $p = 3$, $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (9, 4)$, $v_3 = (-12, 1)$.

Pour $a := -2v_1 + v_3$, on a $\text{vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{vect} \{a, v_2, v_3\}$.

Pour $b := v_1 + 5v_2 - 7v_3$, on a $\text{vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{vect} \{v_1, b, v_3\}$.

Pour $c := 19v_3$, on a $\text{vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{vect} \{v_1, v_2, c\}$.

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

Opérations sur les s.e.v. de $\mathbb{K}^n$: l'union

Soit $n \geq 1$ un entier et F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

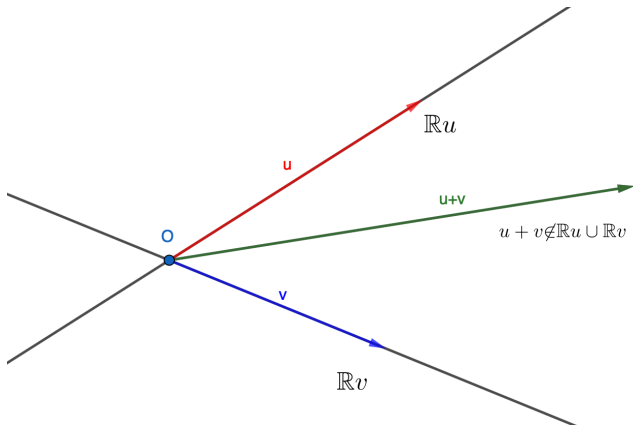
Question. L'ensemble $F \cup G$ (=l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}^n$ qui appartiennent à F ou à G ou aux deux) est-il un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$?

Opérations sur les s.e.v. de $\mathbb{K}^n$: l'union

Soit $n \geq 1$ un entier et F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Question. L'ensemble $F \cup G$ (=l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}^n$ qui appartiennent à F ou à G ou aux deux) est-il un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$?

Réponse. Non, pour le voir, il suffit de prendre deux droites de $\mathbb{R}^2$ distinctes qui passent par $(0, 0)$.



L'intersection d'une famille quelconque de s.e.v. est un s.e.v. Plus précisément :

Proposition

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide (i.e., $I \neq \emptyset$) de s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ fixé. Alors, l'intersection

$$\bigcap_{i \in I} F_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \forall i \in I, x \in F_i\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

L'intersection d'une famille quelconque de s.e.v. est un s.e.v. Plus précisément :

Proposition

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide (i.e., $I \neq \emptyset$) de s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ fixé. Alors, l'intersection

$$\bigcap_{i \in I} F_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \forall i \in I, x \in F_i\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans chacun des F_i ($i \in I$), nous savons que $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans l'intersection considérée.

L'intersection d'une famille quelconque de s.e.v. est un s.e.v. Plus précisément :

Proposition

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide (i.e., $I \neq \emptyset$) de s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ fixé. Alors, l'intersection

$$\bigcap_{i \in I} F_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \forall i \in I, x \in F_i\}$$

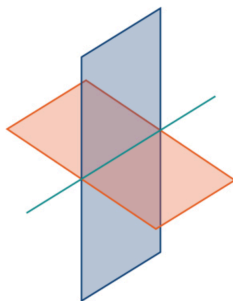
est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans chacun des F_i ($i \in I$), nous savons que $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans l'intersection considérée.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour chaque $i \in I$, on a (car F_i est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$)

$$\lambda x + \mu y \in F_i.$$

Ceci nous dit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. La preuve est terminée. ■



Soient $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$. L'ensemble

$$\mathcal{I} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car il est l'intersection de deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$$

où l'on a noté pour $i \in \{1, 2\}$

$$\mathcal{P}_i := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_i x + b_i y + c_i z = 0\}.$$

Avant de poursuivre notre étude des opérations sur les s.e.v., introduisons (en lien avec le transparent précédent) la :

Définition (Système linéaire)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **système linéaire (S.L.)** (resp. **système linéaire homogène (S.L.H.)**) de $\mathbb{K}^n$ toute intersection finie d'hyperplans affines (resp. vectoriels) de $\mathbb{K}^n$.

Avant de poursuivre notre étude des opérations sur les s.e.v., introduisons (en lien avec le transparent précédent) la :

Définition (Système linéaire)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **système linéaire (S.L.)** (resp. **système linéaire homogène (S.L.H.)**) de $\mathbb{K}^n$ toute intersection finie d'hyperplans affines (resp. vectoriels) de $\mathbb{K}^n$.

"Autrement dit, un S.L. de $\mathbb{K}^n$ revient à se donner m -équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

On a l'important résultat suivant:

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier. Un système linéaire homogène de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

On a l'important résultat suivant:

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier. Un système linéaire homogène de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Ceci découle directement du fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est une intersection d'hyperplans de $\mathbb{K}^n$ qui sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. ■

On a l'important résultat suivant:

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier. Un système linéaire homogène de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Ceci découle directement du fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est une intersection d'hyperplans de $\mathbb{K}^n$ qui sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. ■

Conséquence. Un système homogène admet soit une unique solution (le vecteur nul $(0, \dots, 0)$) ou une infinité de solutions.

Soient $n, p \geq 1$ deux entiers, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

L'ensemble

$$E_1 + \dots + E_p := \{x_1 + x_2 + \dots + x_p : x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Soient $n, p \geq 1$ deux entiers, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

L'ensemble

$$E_1 + \dots + E_p := \{x_1 + x_2 + \dots + x_p : x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Notons $E := E_1 + \dots + E_n$. Puisque $0_{\mathbb{K}^n} \in E_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $0_{\mathbb{K}^n} \in E$. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x = x_1 + \dots + x_n$ et $y = y_1 + \dots + y_n$. Il vient alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n).$$

Il reste à exploiter le fait que $E_1, \dots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ pour obtenir $\lambda x_i + \mu y_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On conclut que $\lambda x + \mu y \in E$. ■

Soient $n, p \geq 1$ deux entiers, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

L'ensemble

$$E_1 + \dots + E_p := \{x_1 + x_2 + \dots + x_p : x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Notons $E := E_1 + \dots + E_n$. Puisque $0_{\mathbb{K}^n} \in E_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $0_{\mathbb{K}^n} \in E$. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x = x_1 + \dots + x_n$ et $y = y_1 + \dots + y_n$. Il vient alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n).$$

Il reste à exploiter le fait que $E_1, \dots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ pour obtenir $\lambda x_i + \mu y_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On conclut que $\lambda x + \mu y \in E$. ■

L'ensemble $E_1 + \dots + E_n$ est souvent appelé **sous-espace vectoriel somme** (ou **somme de Minkowski**) de $E_1, \dots, E_n$.

Le résultat ci-dessous donne un premier exemple de sommes de sous-espaces vectoriels :

Proposition

Soient $n, p \geq 1$ deux entiers, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\text{vect} \{ v_1, \dots, v_p \} = \mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p.$$

Le résultat ci-dessous donne un premier exemple de sommes de sous-espaces vectoriels :

Proposition

Soient $n, p \geq 1$ deux entiers, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\text{vect} \{v_1, \dots, v_p\} = \mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_p.$$

Démonstration. Notons V le membre de gauche de l'égalité souhaitée et W celui de droite. Soit $x \in \mathbb{K}^n$.

Supposons $x \in V$. Il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$. Ceci et le fait que $\lambda_i v_i \in \mathbb{K}v_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ nous assurent de l'inclusion $x \in W$. Nous venons d'établir $V \subset W$.

Supposons maintenant que $x \in W$. Il existe alors $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p$. Il s'ensuit $x \in V$. Ceci montre que $W \subset V$.

On conclut que $V = W$. ■

- Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E_1 + \dots + E_n.$$

Attention, en général cette inclusion n'est pas une égalité.

- Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E_1 + \dots + E_n.$$

Attention, en général cette inclusion n'est pas une égalité.

- $\mathbb{R}(1, 0) + \mathbb{R}(0, 1) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(e, \pi) + \mathbb{R}(0, 1).$

- Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E_1 + \dots + E_n.$$

Attention, en général cette inclusion n'est pas une égalité.

- $\mathbb{R}(1, 0) + \mathbb{R}(0, 1) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(e, \pi) + \mathbb{R}(0, 1).$
- $\mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}(1, 2, 3) + \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1).$

- Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E_1 + \dots + E_n.$$

Attention, en général cette inclusion n'est pas une égalité.

- $\mathbb{R}(1, 0) + \mathbb{R}(0, 1) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(e, \pi) + \mathbb{R}(0, 1).$
- $\mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}(1, 2, 3) + \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1).$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \mathbb{R}(1, 0, -1) + \mathbb{R}(0, 1, -1).$

- Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E_1 + \dots + E_n.$$

Attention, en général cette inclusion n'est pas une égalité.

- $\mathbb{R}(1, 0) + \mathbb{R}(0, 1) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(e, \pi) + \mathbb{R}(0, 1).$
- $\mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}(1, 2, 3) + \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1).$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \mathbb{R}(1, 0, -1) + \mathbb{R}(0, 1, -1).$
- $\mathbb{R}(1, 1) + \mathbb{R}(2, 2) = \mathbb{R}(1, 1) \neq \mathbb{R}^2.$

Remarquons que deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ ont toujours une intersection vide (puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ appartient à n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$). Ceci conduit à la définition ci-dessous :

Définition (Somme directe)

Soient $n \geq 1$ un entier, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Lorsque $E \cap F = \{0\}$, on dit que E et F sont en **somme directe** : l'ensemble $E + F$ est alors noté $E \oplus F$.

Avec la définition ci-dessus, nous pouvons introduire la notion de supplémentaire dans $\mathbb{K}^n$. Il s'agit simplement de reconstruire $\mathbb{K}^n$ comme la somme de deux de ses sous-espaces en somme directe.

Définition (Supplémentaire)

Soient $n \geq 1$ un entier, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On dit que E et F sont **supplémentaires** lorsque $\mathbb{K}^n = E + F$ et E et F sont en somme directe. On écrit alors $\mathbb{K}^n = E \oplus F$.

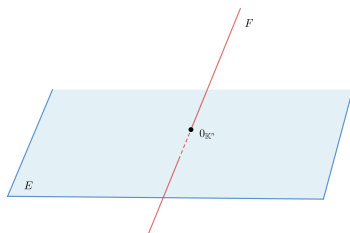


Figure 3: Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires.

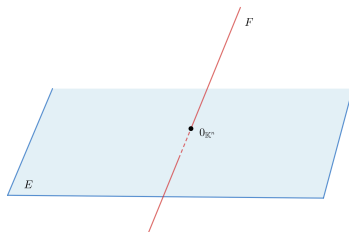


Figure 3: Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires.

- **Attention :** les notions de somme directe et de supplémentaire ne s'étendent pas directement au cas de trois (ou plus) sous-espaces.

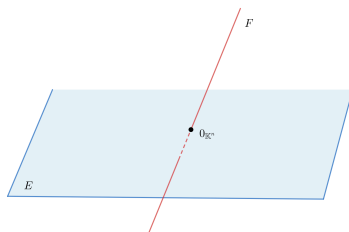


Figure 3: Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires.

- **Attention :** les notions de somme directe et de supplémentaire ne s'étendent pas directement au cas de trois (ou plus) sous-espaces.
- On a $\mathbb{R}(1,2) \oplus \mathbb{R}(2,5) = \mathbb{R}^2$ tandis que $\mathbb{R}(1,2)$ et $\mathbb{R}(1,2)$ ne sont même pas en somme directe.

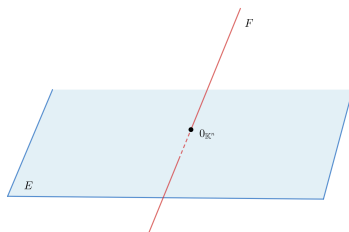


Figure 3: Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires.

- **Attention : les notions de somme directe et de supplémentaire ne s'étendent pas directement au cas de trois (ou plus) sous-espaces.**
- On a $\mathbb{R}(1,2) \oplus \mathbb{R}(2,5) = \mathbb{R}^2$ tandis que $\mathbb{R}(1,2)$ et $\mathbb{R}(1,2)$ ne sont même pas en somme directe.
- Les sous-espaces vectoriels $E = \text{vect}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ et $F = \mathbb{R}(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.

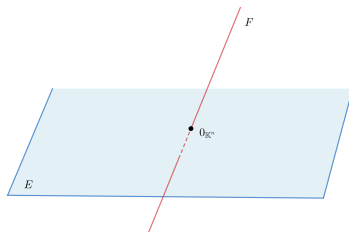


Figure 3: Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires.

- **Attention : les notions de somme directe et de supplémentaire ne s'étendent pas directement au cas de trois (ou plus) sous-espaces.**
- On a $\mathbb{R}(1,2) \oplus \mathbb{R}(2,5) = \mathbb{R}^2$ tandis que $\mathbb{R}(1,2)$ et $\mathbb{R}(1,2)$ ne sont même pas en somme directe.
- Les sous-espaces vectoriels $E = \text{vect}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ et $F = \mathbb{R}(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.
- Nous verrons plus loin que tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ possède un supplémentaire.

Le caractère supplémentaire s'exprime par l'existence et l'unicité d'une décomposition sur les sous-espaces impliqués. Plus précisément :

Le caractère supplémentaire s'exprime par l'existence et l'unicité d'une décomposition sur les sous-espaces impliqués. Plus précisément :

Proposition

Soient $n \geq 1$, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}^n, \exists!(e, f) \in E \times F, x = e + f.$$

Le caractère supplémentaire s'exprime par l'existence et l'unicité d'une décomposition sur les sous-espaces impliqués. Plus précisément :

Proposition

Soient $n \geq 1$, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}^n, \exists!(e, f) \in E \times F, x = e + f.$$

Démonstration. $\Rightarrow$, Supposons que $\mathbb{K}^n = E \oplus F$. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Puisque $\mathbb{K}^n = E + F$, il existe $(e_1, f_1) \in E \times F$ tel que $x = e_1 + f_1$. Soit $(e_2, f_2) \in E \times F$ tel que $x = e_2 + f_2$. Il vient

$$e_1 - e_2 = f_2 - f_1,$$

en particulier $e_1 - e_2 \in E \cap F$ et $f_2 - f_1 \in E \cap F$. Il reste à exploiter l'égalité $E \cap F = \{0\}$ pour aboutir à $(e_1, f_1) = (e_2, f_2)$.

Le caractère supplémentaire s'exprime par l'existence et l'unicité d'une décomposition sur les sous-espaces impliqués. Plus précisément :

Proposition

Soient $n \geq 1$, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}^n, \exists!(e, f) \in E \times F, x = e + f.$$

Démonstration. $\Rightarrow$, Supposons que $\mathbb{K}^n = E \oplus F$. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Puisque $\mathbb{K}^n = E + F$, il existe $(e_1, f_1) \in E \times F$ tel que $x = e_1 + f_1$. Soit $(e_2, f_2) \in E \times F$ tel que $x = e_2 + f_2$. Il vient

$$e_1 - e_2 = f_2 - f_1,$$

en particulier $e_1 - e_2 \in E \cap F$ et $f_2 - f_1 \in E \cap F$. Il reste à exploiter l'égalité $E \cap F = \{0\}$ pour aboutir à $(e_1, f_1) = (e_2, f_2)$.

$\Leftarrow$, Supposons que pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique couple $(e, f) \in E \times F$ tel que $x = e + f$. On a tout de suite $\mathbb{K}^n = E \oplus F$. Par ailleurs, pour $x \in E \cap F$ les égalités $x + (-x) = 0 = 0 + 0$ et notre hypothèse d'unicité montrent que $(0, 0) = (x, -x)$, i.e., $x = 0$. ■

La notion de sous-espace vectoriel est compatible avec le produit cartésien. Plus précisément :

Proposition

Soient m, n deux entiers ≥ 1 , E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Alors, l'ensemble $E \times F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{n+m}$.

La notion de sous-espace vectoriel est compatible avec le produit cartésien. Plus précisément :

Proposition

Soient m, n deux entiers ≥ 1 , E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Alors, l'ensemble $E \times F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{n+m}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition de sous-espaces vectoriels. ■

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

Commençons par étendre à $\mathbb{K}^n$ la notion de colinéarité.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ ³.

³Attention à cette petite subtilité (souvent négligée) dans la définition de la colinéarité (penser au cas où $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$).

Commençons par étendre à $\mathbb{K}^n$ la notion de colinéarité.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ ³.

Remarquons que v_1 et v_2 sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

³Attention à cette petite subtilité (souvent négligée) dans la définition de la colinéarité (penser au cas où $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$).

Familles libres et liées : une introduction via la colinéarité

Commençons par étendre à $\mathbb{K}^n$ la notion de colinéarité.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ ³.

Remarquons que v_1 et v_2 sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs **non-colinéaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$. Que dire alors des coefficients λ_1, λ_2 ?

³Attention à cette petite subtilité (souvent négligée) dans la définition de la colinéarité (penser au cas où $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$).

Familles libres et liées : une introduction via la colinéarité

Commençons par étendre à $\mathbb{K}^n$ la notion de colinéarité.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ ³.

Remarquons que v_1 et v_2 sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs **non-colinéaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$. Que dire alors des coefficients λ_1, λ_2 ? Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ ce qui entraîne en particulier que v_1 et v_2 sont colinéaires : **CONTRADICTION**. De même, on ne peut pas avoir $\lambda_2 \neq 0$.

³Attention à cette petite subtilité (souvent négligée) dans la définition de la colinéarité (penser au cas où $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$).

Familles libres et liées : une introduction via la colinéarité

Commençons par étendre à $\mathbb{K}^n$ la notion de colinéarité.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ ³.

Remarquons que v_1 et v_2 sont colinéaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs **non-colinéaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{K}^n}$. Que dire alors des coefficients λ_1, λ_2 ? Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ ce qui entraîne en particulier que v_1 et v_2 sont colinéaires : **CONTRADICTION**. De même, on ne peut pas avoir $\lambda_2 \neq 0$.

On a donc montré que si v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, on a pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

³Attention à cette petite subtilité (souvent négligée) dans la définition de la colinéarité (penser au cas où $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$).

Familles libres et liées : une introduction via la coplanarité

On étend tout d'abord la notion de coplanarité à $\mathbb{K}^n$.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ sont **coplanaires** lorsque l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Notons que v_1, v_2, v_3 sont coplanaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ trois vecteurs **non-coplanaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2, v_3 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Que dire alors des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

Familles libres et liées : une introduction via la coplanarité

On étend tout d'abord la notion de coplanarité à $\mathbb{K}^n$.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ sont **coplanaires** lorsque l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Notons que v_1, v_2, v_3 sont coplanaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ trois vecteurs **non-coplanaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2, v_3 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Que dire alors des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$? Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3$ ce qui entraîne en particulier que v_1, v_2 et v_3 sont coplanaires : **CONTRADICTION**. De même, on ne peut pas avoir $\lambda_2 \neq 0$ ou $\lambda_3 \neq 0$.

Familles libres et liées : une introduction via la coplanarité

On étend tout d'abord la notion de coplanarité à $\mathbb{K}^n$.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ sont **coplanaires** lorsque l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Notons que v_1, v_2, v_3 sont coplanaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ trois vecteurs **non-coplanaires**. Examinons les combinaisons linéaires de v_1, v_2, v_3 nulles. Pour cela, fixons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Que dire alors des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$? Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3$ ce qui entraîne en particulier que v_1, v_2 et v_3 sont coplanaires : **CONTRADICTION**. De même, on ne peut pas avoir $\lambda_2 \neq 0$ ou $\lambda_3 \neq 0$.

On a donc montré que si v_1, v_2, v_3 ne sont pas coplanaires, on a pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{K}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Les deux études précédentes nous conduisent naturellement à introduire les notions ci-dessous:

Définition (Famille libre-famille liée)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit que $(v_1, \dots, v_p)$ forme une **famille libre** de $\mathbb{K}^n$ lorsque pour chaque $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Les deux études précédentes nous conduisent naturellement à introduire les notions ci-dessous:

Définition (Famille libre-famille liée)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit que $(v_1, \dots, v_p)$ forme une **famille libre** de $\mathbb{K}^n$ lorsque pour chaque $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n},$$

on dit que $(v_1, \dots, v_p)$ forme une **famille liée** de $\mathbb{K}^n$.

Les deux études précédentes nous conduisent naturellement à introduire les notions ci-dessous:

Définition (Famille libre-famille liée)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit que $(v_1, \dots, v_p)$ forme une **famille libre** de $\mathbb{K}^n$ lorsque pour chaque $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n},$$

on dit que $(v_1, \dots, v_p)$ forme une **famille liée** de $\mathbb{K}^n$.

- La notion de famille liée étend donc les concepts de colinéarité et de coplanarité.
- Dans la littérature, une famille libre est souvent appelée "famille linéairement indépendante".

On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$. On va montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{K}^3$.

On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$. On va montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{K}^3$.

Rédaction type. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

On veut établir que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$. On va montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{K}^3$.

Rédaction type. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

On veut établir que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'égalité ci-dessus s'écrit

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

ou encore

$$(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$. On va montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{K}^3$.

Rédaction type. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

On veut établir que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'égalité ci-dessus s'écrit

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

ou encore

$$(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

On aboutit donc à un système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc la résolution est immédiate et donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En conclusion, la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{K}^3$.

- La phrase en rouge dans le transparent précédent est **FONDAMENTALE**.

- La phrase en rouge dans le transparent précédent est **FONDAMENTALE**.
- Il n'y a **PAS BESOIN** de faire appel au symbole " $\Rightarrow$ " d'implication dans la rédaction.

- La phrase en **rouge** dans le transparent précédent est **FONDAMENTALE**.
- Il n'y a **PAS BESOIN** de faire appel au symbole " $\Rightarrow$ " d'implication dans la rédaction.
- On pose $v_1 = \dots$, $v_2 = \dots$ et $v_p = \dots$. On va montrer que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

ERREUR CLASSIQUE N1 : "Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Montrons que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}."$$
(3)

CECI NE CORRESPOND PAS A LA NOTION DE FAMILLE LIBRE OU LIEE. DE PLUS, L'EGALITE (3) N'A EN GENERAL PAS LIEU DES LORS QUE L'UN DES VECTEURS IMPLIQUES EST NON NUL.

- La phrase en **rouge** dans le transparent précédent est **FONDAMENTALE**.
- Il n'y a **PAS BESOIN** de faire appel au symbole " $\Rightarrow$ " d'implication dans la rédaction.
- On pose $v_1 = \dots$, $v_2 = \dots$ et $v_p = \dots$. On va montrer que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

ERREUR CLASSIQUE N1 : "Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Montrons que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}."$$
(3)

CECI NE CORRESPOND PAS A LA NOTION DE FAMILLE LIBRE OU LIEE. DE PLUS, L'EGALITE (3) N'A EN GENERAL PAS LIEU DES LORS QUE L'UN DES VECTEURS IMPLIQUES EST NON NUL.

ERREUR CLASSIQUE N2 : On va montrer que (v_1, v_2) est libre dans $\mathbb{K}^n$ et que (v_3, v_4) est libre dans $\mathbb{K}^n$

Comment établir une liaison ?

Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (-3, 4, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Montrer que (u, v, w) est liée.

Sans relation de liaison évidente, on peut procéder comme suit :

Comment établir une liaison ?

Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (-3, 4, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Montrer que (u, v, w) est liée.

Sans relation de liaison évidente, on peut procéder comme suit :

Analyse. Fixons pour un moment $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

Il vient

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & (1) \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & (2) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Comment établir une liaison ?

Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (-3, 4, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Montrer que (u, v, w) est liée.

Sans relation de liaison évidente, on peut procéder comme suit :

Analyse. Fixons pour un moment $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

Il vient

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & (1) \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & (2) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En effectuant $2 \times (1) - (2)$ on obtient $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Cette dernière égalité combinée à (1) donne $\lambda_1 = -3\lambda_3$.

Synthèse. Avec le choix de $\lambda_3 = 1$, l'analyse ci-dessus nous conduit à poser $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$. Il reste à vérifier que

$$-3 \cdot u + 2 \cdot v + 1 \cdot w = 0_{\mathbb{K}^3},$$

pour observer que (u, v, w) est liée.

- L'ordre des vecteurs ne change pas le caractère lié ou libre.

Conséquences de la définition

- L'ordre des vecteurs ne change pas le caractère lié ou libre.
- Une famille à 1 élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.

Conséquences de la définition

- L'ordre des vecteurs ne change pas le caractère lié ou libre.
- Une famille à 1 élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

- L'ordre des vecteurs ne change pas le caractère lié ou libre.
- Une famille à 1 élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Démonstration. C'est une application directe de la définition de famille libre/liée. ■

- L'ordre des vecteurs ne change pas le caractère lié ou libre.
- Une famille à 1 élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Démonstration. C'est une application directe de la définition de famille libre/liée. ■

Remarque. Le deuxième point conduit naturellement à s'intéresser aux familles libres possédant le **plus grand nombre d'éléments possible**.

Une caractérisation des familles liées

On énonce et démontre maintenant une importante caractérisation des familles liées.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

On énonce et démontre maintenant une importante caractérisation des familles liées.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$, Supposons que $\mathcal{F}$ soit liée. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$. Avec $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$, on a

$$v_k = -\lambda_k^{-1} \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j.$$

Ceci donne la propriété attendue.

Une caractérisation des familles liées

On énonce et démontre maintenant une importante caractérisation des familles liées.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$, Supposons que $\mathcal{F}$ soit liée. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$. Avec $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$, on a

$$v_k = -\lambda_k^{-1} \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j.$$

Ceci donne la propriété attendue.

$\Leftarrow$, Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p$ tels que $v_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j$. On a tout de suite

$$1 v_k - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$$

et ceci nous dit que $\mathcal{F}$ est liée. ■

Une caractérisation des familles liées

On énonce et démontre maintenant une importante caractérisation des familles liées.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$, Supposons que $\mathcal{F}$ soit liée. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$. Avec $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$, on a

$$v_k = -\lambda_k^{-1} \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j.$$

Ceci donne la propriété attendue.

$\Leftarrow$, Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p$ tels que $v_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j$. On a tout de suite

$$1 v_k - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$$

et ceci nous dit que $\mathcal{F}$ est liée. ■

Exemple. La famille $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (-2, -1, 0))$ est liée car

$$(-2, -1, 0) = 2(1, 2, 3) - (4, 5, 6).$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Considérons une famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $p \geq 1$ entier. En introduisant l'ensemble $K := \{1, \dots, p\}$, on peut noter $\mathcal{F}$ de manière condensée :

$$\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) = (v_k)_{k \in K}.$$

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Considérons une famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $p \geq 1$ entier. En introduisant l'ensemble $K := \{1, \dots, p\}$, on peut noter $\mathcal{F}$ de manière condensée :

$$\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) = (v_k)_{k \in K}.$$

- On appelle **sous-famille (non vide)** de $\mathcal{F}$ toute famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$$

avec $r \geq 1$ entier, $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, p\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Considérons une famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $p \geq 1$ entier. En introduisant l'ensemble $K := \{1, \dots, p\}$, on peut noter $\mathcal{F}$ de manière condensée :

$$\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) = (v_k)_{k \in K}.$$

- On appelle **sous-famille (non vide)** de $\mathcal{F}$ toute famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$$

avec $r \geq 1$ entier, $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, p\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

- On appelle **sur-famille** de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{K}^n$ toute famille $\mathcal{S}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathcal{F}$ soit une sous-famille de $\mathcal{S}$.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Considérons une famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $p \geq 1$ entier. En introduisant l'ensemble $K := \{1, \dots, p\}$, on peut noter $\mathcal{F}$ de manière condensée :

$$\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) = (v_k)_{k \in K}.$$

● On appelle **sous-famille (non vide)** de $\mathcal{F}$ toute famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$$

avec $r \geq 1$ entier, $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, p\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

● On appelle **sur-famille** de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{K}^n$ toute famille $\mathcal{S}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathcal{F}$ soit une sous-famille de $\mathcal{S}$.

Exemple. Soit $\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- La famille $\mathcal{F}_1 = ((1, 2, 3), (7, 8, 9))$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$.
- La famille $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (1, 2, 3), (7, 8, 9))$ n'est pas une sous-famille de $\mathcal{F}$.
- La famille $\mathcal{F}_3 = ((1, 2, 3), (\pi, e, \sqrt{2}), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$.
- La famille $\mathcal{F}_4 = ((1, 2, 3), (1, 2, 3), (\pi, e, \sqrt{2}), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$.

Sur-famille d'une famille liée

Le caractère lié d'une famille se propage à n'importe laquelle de ses sur-familles.
Plus précisément :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Le caractère lié d'une famille se propage à n'importe laquelle de ses sur-familles.
Plus précisément :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille liée à p éléments (avec $p \geq 1$) de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sur-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère lié d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit pour un entier $r \geq 0$

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}) \quad \text{avec } v_{p+1}, \dots, v_{p+r} \in \mathbb{K}^n.$$

Le caractère lié d'une famille se propage à n'importe laquelle de ses sur-familles.
Plus précisément :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille liée à p éléments (avec $p \geq 1$) de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sur-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère lié d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit pour un entier $r \geq 0$

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}) \quad \text{avec } v_{p+1}, \dots, v_{p+r} \in \mathbb{K}^n.$$

Le fait que $\mathcal{F}$ soit liée donne (par définition) $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Avec $\lambda_{p+1} := 0, \dots, \lambda_{p+r} := 0$, on peut écrire

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} + \dots + \lambda_{p+r} v_{p+r} = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Sur-famille d'une famille liée

Le caractère lié d'une famille se propage à n'importe laquelle de ses sur-familles.
Plus précisément :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille liée à p éléments (avec $p \geq 1$) de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sur-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère lié d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit pour un entier $r \geq 0$

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}) \quad \text{avec } v_{p+1}, \dots, v_{p+r} \in \mathbb{K}^n.$$

Le fait que $\mathcal{F}$ soit liée donne (par définition) $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Avec $\lambda_{p+1} := 0, \dots, \lambda_{p+r} := 0$, on peut écrire

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} + \dots + \lambda_{p+r} v_{p+r} = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

L'un des λ_i (avec $i \in \{1, \dots, r\}$) dans la combinaison linéaire ci-dessus étant **non nul**, nous déduisons que $\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_{p+r})$ est liée. ■

Dans la ligne du résultat précédent, on a :

Proposition

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre à p éléments (avec $p \geq 1$) de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère libre d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_r) \quad \text{avec } r < p.$$

Sous-famille d'une famille libre

Dans la ligne du résultat précédent, on a :

Proposition

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre à $p \geq 1$ de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère libre d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_r) \quad \text{avec } r < p.$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Avec $\lambda_{r+1} := 0, \dots, \lambda_p := 0$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Sous-famille d'une famille libre

Dans la ligne du résultat précédent, on a :

Proposition

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre à $p \geq 1$ éléments de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$). Soit $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$. Puisque le caractère libre d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs constituant la famille, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ s'écrit

$$\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_r) \quad \text{avec } r < p.$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Avec $\lambda_{r+1} := 0, \dots, \lambda_p := 0$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Le fait que $\mathcal{F}$ soit libre donne

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0.$$

On conclut que $\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_r)$ est libre. ■

En général, une sur-famille d'une famille libre peut être liée ou libre. On donne ici une condition suffisante (et même nécessaire...) assurant la liberté d'une sur-famille.

Proposition

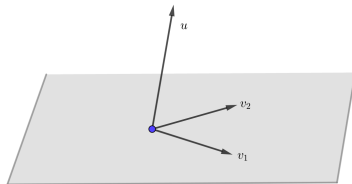
Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et $u \in \mathbb{K}^n$. Si $u \notin \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors la sur-famille $(v_1, \dots, v_p, u)$ est libre.

Enrichir une famille libre

En général, une sur-famille d'une famille libre peut être liée ou libre. On donne ici une condition suffisante (et même nécessaire...) assurant la liberté d'une sur-famille.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et $u \in \mathbb{K}^n$. Si $u \notin \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors la sur-famille $(v_1, \dots, v_p, u)$ est libre.

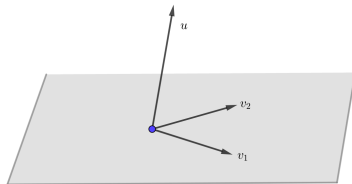


Enrichir une famille libre

En général, une sur-famille d'une famille libre peut être liée ou libre. On donne ici une condition suffisante (et même nécessaire...) assurant la liberté d'une sur-famille.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et $u \in \mathbb{K}^n$. Si $u \notin \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors la sur-famille $(v_1, \dots, v_p, u)$ est libre.

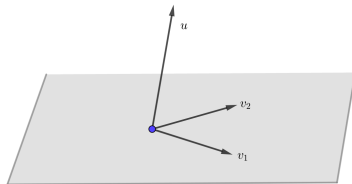


Démonstration. Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j v_j + \lambda u = 0_{\mathbb{K}^n}$. Si $\lambda \neq 0$, on contredit l'inclusion $u \in \mathbb{K}^n \setminus \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. On a donc $\lambda = 0$. Il reste à utiliser le caractère libre de $(v_1, \dots, v_p)$ pour conclure. ■

En général, une sur-famille d'une famille libre peut être liée ou libre. On donne ici une condition suffisante (et même nécessaire...) assurant la liberté d'une sur-famille.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et $u \in \mathbb{K}^n$. Si $u \notin \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors la sur-famille $(v_1, \dots, v_p, u)$ est libre.



Démonstration. Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j v_j + \lambda u = 0_{\mathbb{K}^n}$. Si $\lambda \neq 0$, on contredit l'inclusion $u \in \mathbb{K}^n \setminus \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. On a donc $\lambda = 0$. Il reste à utiliser le caractère libre de $(v_1, \dots, v_p)$ pour conclure. ■

Exemple. $n = 3$, $p = 2$, $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0)$. Il est clair que (v_1, v_2) est une famille libre de $\mathbb{K}^3$ et que $v_3 := (1, 1, 1) \notin \text{vect}\{v_1, v_2\}$. Par application du résultat ci-dessus, nous savons que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre.

Une inégalité à retenir

Le résultat suivant est **fondamental** : il exprime que dans un s.e.v. engendré par p vecteurs, il n'y a pas de famille libres possédant strictement plus de p vecteurs.

Une inégalité à retenir

Le résultat suivant est **fondamental** : il exprime que dans un s.e.v. engendré par p vecteurs, il n'y a pas de famille libres possédant strictement plus de p vecteurs.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre de $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est de cardinal (i.e., a un nombre d'éléments) $\leq p$.

Une inégalité à retenir

Le résultat suivant est **fondamental** : il exprime que dans un s.e.v. engendré par p vecteurs, il n'y a pas de famille libres possédant strictement plus de p vecteurs.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre de $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est de cardinal (i.e., a un nombre d'éléments) $\leq p$.

Démonstration. Posons $F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de F . Par l'absurde, supposons que $q > p$. On peut écrire

$$u_1 = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j \quad \text{pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Une inégalité à retenir

Le résultat suivant est **fondamental** : il exprime que dans un s.e.v. engendré par p vecteurs, il n'y a pas de famille libres possédant strictement plus de p vecteurs.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre de $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est de cardinal (i.e., a un nombre d'éléments) $\leq p$.

Démonstration. Posons $F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de F . Par l'absurde, supposons que $q > p$. On peut écrire

$$u_1 = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j \quad \text{pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Puisque $u_1 \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, on peut supposer (quitte à réindexer) $\lambda_1 \neq 0$. D'après le résultat "Remplacement d'un générateur", on a

$$F = \text{vect}\{u_1, v_2, \dots, v_p\}.$$

Une inégalité à retenir

Le résultat suivant est **fondamental** : il exprime que dans un s.e.v. engendré par p vecteurs, il n'y a pas de famille libres possédant strictement plus de p vecteurs.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre de $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est de cardinal (i.e., a un nombre d'éléments) $\leq p$.

Démonstration. Posons $F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de F . Par l'absurde, supposons que $q > p$. On peut écrire

$$u_1 = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j \quad \text{pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Puisque $u_1 \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, on peut supposer (quitte à réindexer) $\lambda_1 \neq 0$. D'après le résultat "Remplacement d'un générateur", on a

$$F = \text{vect}\{u_1, v_2, \dots, v_p\}.$$

En itérant le procédé (à travers p étapes), on obtient que $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de F . En particulier, la famille $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ est liée et ceci est contradictoire. ■

- Puisque $\mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement de cardinal ≤ 3 .

- Puisque $\mathbb{R}^3 = \text{vect} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement de cardinal ≤ 3 .
- Le résultat précédent s'étend tout de suite à $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$: toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ a au plus n éléments.

- Puisque $\mathbb{R}^3 = \text{vect} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement de cardinal ≤ 3 .
- Le résultat précédent s'étend tout de suite à $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$: toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ a au plus n éléments.
- Les familles libres de $F = \text{vect} \{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$ sont de cardinal ≤ 2 . Mais comme $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$, on a

$$F = \text{vect} \{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\} = \text{vect} \{(1, 2, 3)\}.$$

Ainsi, les familles libres de F sont en fait de cardinal $= 1$.

- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

Nous allons maintenant caractériser les familles à la fois libre et génératrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_p)$ une famille de F à p -éléments. Sont équivalentes :

Nous allons maintenant caractériser les familles à la fois libre et génératrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_p)$ une famille de F à p -éléments. Sont équivalentes :

(a) La famille $(b_1, \dots, b_p)$ est **libre et génératrice** de F ;

Nous allons maintenant caractériser les familles à la fois libre et génératrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_p)$ une famille de F à p -éléments. Sont équivalentes :

- (a) La famille $(b_1, \dots, b_p)$ est **libre et génératrice** de F ;
- (b) Tout vecteur de F s'écrit de **manière unique comme combinaison linéaire** de $b_1, \dots, b_p$, i.e., pour tout $x \in F$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k b_k.$$

Nous allons maintenant caractériser les familles à la fois libre et génératrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_p)$ une famille de F à p -éléments. Sont équivalentes :

- (a) La famille $(b_1, \dots, b_p)$ est **libre et génératrice** de F ;
- (b) Tout vecteur de F s'écrit de **manière unique comme combinaison linéaire** de $b_1, \dots, b_p$, i.e., pour tout $x \in F$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k b_k.$$

- La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ est évidemment libre et génératrice.

Nous allons maintenant caractériser les familles à la fois libre et génératrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_p)$ une famille de F à p -éléments. Sont équivalentes :

- (a) La famille $(b_1, \dots, b_p)$ est **libre et génératrice** de F ;
- (b) Tout vecteur de F s'écrit de **manière unique comme combinaison linéaire** de $b_1, \dots, b_p$, i.e., pour tout $x \in F$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k b_k.$$

- La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ est évidemment libre et génératrice.
- Avec $F = \text{vect} \{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)\}$, on a

$$(3, 6, 9) = 1 \cdot (3, 6, 9) = 1 \cdot (1, 2, 3) + 1 \cdot (2, 4, 6).$$

Ceci nous dit en particulier que $((1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9))$ n'est pas libre.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Soit $u \in F$. Puisque $(b_1, \dots, b_p)$ est génératrice, on a

$$u = \sum_{j=1}^p \lambda_j b_j \quad \text{pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Supposons que $u = \sum_{j=1}^p \mu_j b_j$ pour un $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$. En combinant

$$\sum_{j=1}^p (\mu_j - \lambda_j) b_j = 0_{\mathbb{K}^n}$$

avec la liberté de $(b_1, \dots, b_p)$, on obtient $\mu_j - \lambda_j = 0$ pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$.

L'unicité voulue est établie.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Soit $u \in F$. Puisque $(b_1, \dots, b_p)$ est génératrice, on a

$$u = \sum_{j=1}^p \lambda_j b_j \quad \text{pour un certain } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Supposons que $u = \sum_{j=1}^p \mu_j b_j$ pour un $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$. En combinant

$$\sum_{j=1}^p (\mu_j - \lambda_j) b_j = 0_{\mathbb{K}^n}$$

avec la liberté de $(b_1, \dots, b_p)$, on obtient $\mu_j - \lambda_j = 0$ pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$.

L'unicité voulue est établie.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seule la liberté est à justifier. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j b_j = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il suffit de voir que $0_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^p 0 \cdot b_j$ et d'appliquer l'hypothèse d'unicité donnée par (b) pour obtenir $\lambda_j = 0$ pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$. ■

On donne un nom aux familles libres et génératrices.

Définition (Base d'un s.e.v.)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre et génératrice de F est appelée une **base** de F .

On donne un nom aux familles libres et génératrices.

Définition (Base d'un s.e.v.)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre et génératrice de F est appelée une **base** de F .

Exemple. $\mathcal{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$. En écrivant pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z) \Leftrightarrow (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1),$$

on voit que $((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathcal{P}$. En remarquant d'autre part que cette famille est libre (**POURQUOI ?**), on conclut que

$$((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \quad \text{est une base de } \mathcal{P}.$$

Quels sont les s.e.v. qui admettent une base ?

Quels sont les s.e.v. qui admettent une base ?

Un premier élément de réponse : Soit $n \geq 1$ un entier.

- Le s.e.v. nul $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ n'admet pas de base : il n'y a pas de famille libre contenant $0_{\mathbb{K}^n}$.

Quels sont les s.e.v. qui admettent une base ?

Un premier élément de réponse : Soit $n \geq 1$ un entier.

- Le s.e.v. nul $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ n'admet pas de base : il n'y a pas de famille libre contenant $0_{\mathbb{K}^n}$.
- Soit $n \geq 1$ un entier fixé. La famille constituée des vecteurs de $\mathbb{K}^n$

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

est évidemment (**POURQUOI ?**) génératrice et libre de $\mathbb{K}^n$: c'est donc une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Quels sont les s.e.v. qui admettent une base ?

Un premier élément de réponse : Soit $n \geq 1$ un entier.

- Le s.e.v. nul $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ n'admet pas de base : il n'y a pas de famille libre contenant $0_{\mathbb{K}^n}$.
- Soit $n \geq 1$ un entier fixé. La famille constituée des vecteurs de $\mathbb{K}^n$

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

est évidemment (**POURQUOI ?**) génératrice et libre de $\mathbb{K}^n$: c'est donc une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Ceci conduit naturellement à s'interroger sur le nombre d'éléments d'une base de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Ont lieu :

- (a) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ contient au plus n -vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n -vecteurs.
- (c) Toute base de $\mathbb{K}^n$ possède exactement n -vecteurs.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. On a lieu :

- (a) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ contient au plus n -vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n -vecteurs.
- (c) Toute base de $\mathbb{K}^n$ possède exactement n -vecteurs.

Démonstration. (c) est une conséquence directe de (a) et de (b). Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. On a :

- (a) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ contient au plus n -vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n -vecteurs.
- (c) Toute base de $\mathbb{K}^n$ possède exactement n -vecteurs.

Démonstration. (c) est une conséquence directe de (a) et de (b). Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(a) Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ à p -éléments. L'égalité

$$\mathbb{K}^n = \text{vect} \{e_1, \dots, e_n\}$$

combinée à la proposition liant le cardinal d'une famille libre et d'une famille génératrice, nous dit que $p \leq n$.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. On a lieu :

- (a) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ contient au plus n -vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n -vecteurs.
- (c) Toute base de $\mathbb{K}^n$ possède exactement n -vecteurs.

Démonstration. (c) est une conséquence directe de (a) et de (b). Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(a) Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ à p -éléments. L'égalité

$$\mathbb{K}^n = \text{vect} \{e_1, \dots, e_n\}$$

combinée à la proposition liant le cardinal d'une famille libre et d'une famille génératrice, nous dit que $p \leq n$.

(b) Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Le fait que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une famille libre de $\mathbb{K}^n = \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$ nous permet d'appliquer la même proposition que ci-dessus et d'aboutir à $n \leq p$. ■

- La famille $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ étant de cardinal 2, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$\text{vect}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\} \neq \mathbb{R}^3.$$

- La famille $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ étant de cardinal 2, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$\text{vect}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\} \neq \mathbb{R}^3.$$

- La famille de $\mathbb{R}^3$ $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12))$ n'est pas libre car elle contient 4 éléments.

Le théorème suivant dit d'une part que toute famille libre se complète en une base et d'autre part que toute famille génératrice contient une base. Plus précisément :

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel **non nul** de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F . On a lieu :

Le théorème suivant dit d'une part que toute famille libre se complète en une base et d'autre part que toute famille génératrice contient une base. Plus précisément :

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel **non nul** de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F . Ont lieu :

(a) Si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre et n'est pas une base de F , il existe $v_{p+1}, \dots, v_r \in F$ tels que $(v_1, \dots, v_{p+1}, \dots, v_r)$ soit une base de F .

Le théorème suivant dit d'une part que toute famille libre se complète en une base et d'autre part que toute famille génératrice contient une base. Plus précisément :

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel **non nul** de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F . Ont lieu :

(a) Si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre et n'est pas une base de F , il existe $v_{p+1}, \dots, v_r \in F$ tels que $(v_1, \dots, v_{p+1}, \dots, v_r)$ soit une base de F .

(b) Si $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de F , alors il existe des entiers $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p$ tels que $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ soit une base de F .

(a) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit libre et ne soit pas une base de F . Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres de $\mathbb{K}^n$ incluses dans F . Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{S}_k$ comme l'ensemble des sur-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de la forme $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+k})$ avec $v_{p+1}, \dots, v_{p+k} \in F$. Posons

$$\Omega := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

(a) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit libre et ne soit pas une base de F . Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres de $\mathbb{K}^n$ incluses dans F . Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{S}_k$ comme l'ensemble des sur-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de la forme $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+k})$ avec $v_{p+1}, \dots, v_{p+k} \in F$. Posons

$$\Omega := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Puisque $(v_1, \dots, v_p)$ n'est pas une famille génératrice de F , on peut choisir $v_{p+1} \in F \setminus \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \neq \emptyset$. D'après le résultat d'enrichissement d'une famille libre, on a $(v_1, \dots, v_{p+1}) \in \mathcal{F}$, i.e., $1 \in \Omega \neq \emptyset$. D'autre part, l'ensemble Ω est majoré par n puisque toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ est au plus de cardinal n .

(a) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit libre et ne soit pas une base de F . Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres de $\mathbb{K}^n$ incluses dans F . Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{S}_k$ comme l'ensemble des sur-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de la forme $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+k})$ avec $v_{p+1}, \dots, v_{p+k} \in F$. Posons

$$\Omega := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Puisque $(v_1, \dots, v_p)$ n'est pas une famille génératrice de F , on peut choisir $v_{p+1} \in F \setminus \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \neq \emptyset$. D'après le résultat d'enrichissement d'une famille libre, on a $(v_1, \dots, v_{p+1}) \in \mathcal{F}$, i.e., $1 \in \Omega \neq \emptyset$. D'autre part, l'ensemble Ω est majoré par n puisque toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ est au plus de cardinal n .

L'ensemble Ω est donc non vide et majoré, il admet un plus grand élément, noté K . Il existe alors $v_{p+1}, \dots, v_{p+K} \in F$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_p, \dots, v_{p+K}) \in \mathcal{F}$. Cette famille est génératrice car dans le cas contraire, on aurait $K+1 \in \Omega$ et ceci contredirait le fait que K est le plus grand élément de Ω . Ceci termine la démonstration de (a).

(b) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit une famille génératrice de F . Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des familles génératrices de F . Pour chaque entier $k \geq 1$, notons $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des sous-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de cardinal k . Considérons l'ensemble

$$\Gamma := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{R}_k \cap \mathcal{G} \neq \emptyset\}.$$

(b) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit une famille génératrice de F . Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des familles génératrices de F . Pour chaque entier $k \geq 1$, notons $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des sous-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de cardinal k . Considérons l'ensemble

$$\Gamma := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{R}_k \cap \mathcal{G} \neq \emptyset\}.$$

Cet ensemble Γ est non vide puisque $p \in \Gamma$. Il s'ensuit que Γ admet un plus petit élément noté K . On dispose donc d'une famille génératrice de F de cardinal K .

(b) Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ soit une famille génératrice de F . Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des familles génératrices de F . Pour chaque entier $k \geq 1$, notons $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des sous-familles de $(v_1, \dots, v_p)$ de cardinal k . Considérons l'ensemble

$$\Gamma := \{k \in \mathbb{N}^* : \mathcal{R}_k \cap \mathcal{G} \neq \emptyset\}.$$

Cet ensemble Γ est non vide puisque $p \in \Gamma$. Il s'ensuit que Γ admet un plus petit élément noté K . On dispose donc d'une famille génératrice de F de cardinal K .

Cette famille est libre car dans le cas contraire, l'un des $v_1, \dots, v_K$ serait combinaison linéaire des autres et le résultat de suppression d'un générateur garantirait alors l'existence d'une sous-famille de $(v_1, \dots, v_K)$ à la fois de cardinal $K - 1$ et génératrice de F . Ceci termine la démonstration de (b).

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée plus-haut sur l'existence d'une base.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ **non nul**. Ont lieu :

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée plus-haut sur l'existence d'une base.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ **non nul**. Ont lieu :

(a) Le s.e.v. F admet une base.

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée plus-haut sur l'existence d'une base.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ **non nul**. Ont lieu :

- (a) Le s.e.v. F admet une base.
- (b) Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée plus-haut sur l'existence d'une base.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ **non nul**. Ont lieu :

- (a) Le s.e.v. F admet une base.
- (b) Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. (a) On choisit un élément non nul $u \in F$. La famille (u) est libre, donc on peut la compléter en une base de F .
(b) C'est une conséquence directe de la proposition liant le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. ■

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée plus-haut sur l'existence d'une base.

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ **non nul**. Ont lieu :

- (a) Le s.e.v. F admet une base.
- (b) Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. (a) On choisit un élément non nul $u \in F$. La famille (u) est libre, donc on peut la compléter en une base de F .

(b) C'est une conséquence directe de la proposition liant le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. ■

Conséquence. Ceci nous dit en particulier que tout s.e.v. F de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$ entier) s'écrit sous la forme

$$F = \text{vect} \{v_1, \dots, v_p\}$$

avec $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^n$ et $0 \leq p \leq n$.

Maintenant que nous savons que tout s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$ admet une base, nous en sommes en mesure de définir la notion de coordonnées.

Définition (Coordonnées)

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$, $\beta = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Pour chaque $x \in F$, l'unique élément $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^p x_k f_k.$$

est appelé vecteur des **coordonnées** de x dans la base β .

Maintenant que nous savons que tout s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$ admet une base, nous en sommes en mesure de définir la notion de coordonnées.

Définition (Coordonnées)

Soient $n \geq 1$ un entier, F un s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$, $\beta = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Pour chaque $x \in F$, l'unique élément $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^p x_k f_k.$$

est appelé vecteur des **coordonnées** de x dans la base β .

Exemple. Soient $f_1 = (1, 2)$ et $f_2 = (3, 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On vérifie sans difficultés que $\beta = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur $x = (0, 1)$ satisfait l'égalité

$$x = \frac{3}{2} f_1 + \frac{-1}{2} f_2.$$

En termes de coordonnées, ceci revient à dire que x a pour coordonnées $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ dans la base β .

Le point (a) du théorème précédent nous a permis de définir la notion de coordonnées dans un s.e.v. non nul. Le point (b) quant à lui nous permet de définir le concept de dimension d'un s.e.v.

Définition (Dimension)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$. Le nombre commun d'éléments de toute base du s.e.v. F est noté $\dim F$ et est appelé la **dimension** de F .

Par convention, le s.e.v. nul est de dimension 0.

Soit F le s.e.v. de $\mathbb{K}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

La dimension sur un exemple

Soit F le s.e.v. de $\mathbb{K}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

Intuitivement. Nous pouvons exprimer l'une des 4 variables en fonction des trois autres : on doit donc avoir 3 degrés de liberté. On **conjecture** $\dim F = 3$.

La dimension sur un exemple

Soit F le s.e.v. de $\mathbb{K}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

Intuitivement. Nous pouvons exprimer l'une des 4 variables en fonction des trois autres : on doit donc avoir 3 degrés de liberté. On **conjecture** $\dim F = 3$.

Preuve de la conjecture. On commence par chercher une famille génératrice de F . Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$, on a

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, z, -x - y - z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \underbrace{x(1, 0, 0, -1)}_{=\xi_1} + \underbrace{y(0, 1, 0, -1)}_{=\xi_2} + \underbrace{z(0, 0, 1, -1)}_{=\xi_3}.\end{aligned}$$

Les équivalences précédentes nous disent que

$$F = \text{vect} \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

D'autre part, on voit facilement que $\beta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est libre. La famille β est donc une base de F , en particulier

$$\dim F = 3.$$

Soient $n \geq 1$ un entier, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_m \neq 0$. L'ensemble $H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Nous allons donner une base de H et en déduire en particulier que H est de dimension $n - 1$.

Commençons par noter que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \in H &\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{m-1}, -a_m^{-1} \sum_{k \neq m} a_k x_k, x_{m+1}, \dots, x_n) \\&\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \neq m} x_k e_k - \sum_{k \neq m} a_m^{-1} a_k x_k e_m \\&\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \neq m} x_k (e_k - a_m^{-1} a_k e_m).\end{aligned}$$

Nous disposons alors d'une **famille génératrice** à $n - 1$ éléments de H puisque

$$H = \text{vect} \left\{ e_k - a_m^{-1} a_k e_m : k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{m\} \right\}.$$

Nous allons établir que cette famille est **libre** et donc une **base**. Soient $(\lambda_k)_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{m\}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$\sum_{k \neq m} \lambda_k (e_k - a_m^{-1} a_k e_m) = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il vient tout de suite

$$\sum_{k \neq m} \lambda_k e_k = \left(\sum_{k \neq m} \lambda_k a_m^{-1} a_k \right) e_m.$$

Puisque $e_m \notin \text{vect} \{e_k : k \neq m\}$, on a $(\sum_{k \neq m} \lambda_k a_m^{-1} a_k) = 0$. On en arrive alors à $\sum_{k \neq m} \lambda_k e_k = 0_{\mathbb{K}^n}$. Il reste à invoquer le caractère libre de la famille $(e_k)_{k \neq m}$ pour aboutir à $\lambda_k = 0$ pour tout $k \neq m$.

On conclut que la famille étudiée est une **base** de H : en particulier, $\dim H = n - 1$. ■

Remarque. On peut montrer que la réciproque est vraie, à savoir : tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - 1$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Rang d'une famille de vecteurs

Nous allons nous intéresser à la dimension d'un vect.

Définition (Rang d'une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$ la dimension du s.e.v. $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, i.e.,

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) := \dim \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

Nous allons nous intéresser à la dimension d'un vect.

Définition (Rang d'une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$ la dimension du s.e.v. $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, i.e.,

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) := \dim \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

- En remarquant que $(7, 8, 9) = -(1, 2, 3) + 2(4, 5, 6)$, on a

$$\text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)) = \text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6)) = 2.$$

Rang d'une famille de vecteurs

Nous allons nous intéresser à la dimension d'un vect.

Définition (Rang d'une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$ la dimension du s.e.v. $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, i.e.,

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) := \dim \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

- En remarquant que $(7, 8, 9) = -(1, 2, 3) + 2(4, 5, 6)$, on a

$$\text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)) = \text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6)) = 2.$$

- On pose $\mathcal{D} := \text{vect}\{b\}$ pour un $b \in \mathbb{K}^n$. Si $b \neq 0$, alors (b) est une base de $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}$ est de dimension 1. **Attention** : si $b = 0$, alors $\mathcal{D} = \{0\}$ est le s.e.v. nul, donc de dimension 0.

Rang d'une famille de vecteurs

Nous allons nous intéresser à la dimension d'un vect.

Définition (Rang d'une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$ la dimension du s.e.v. $\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, i.e.,

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) := \dim \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

- En remarquant que $(7, 8, 9) = -(1, 2, 3) + 2(4, 5, 6)$, on a

$$\text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)) = \text{rg}((1, 2, 3), (4, 5, 6)) = 2.$$

- On pose $\mathcal{D} := \text{vect}\{b\}$ pour un $b \in \mathbb{K}^n$. Si $b \neq 0$, alors (b) est une base de $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}$ est de dimension 1. **Attention :** si $b = 0$, alors $\mathcal{D} = \{0\}$ est le s.e.v. nul, donc de dimension 0.
- On pose $\mathcal{P} := \text{vect}\{b_1, b_2\}$ pour deux vecteurs $b_1, b_2 \in \mathbb{K}^n$ donnés. Si (b_1, b_2) est libre, alors (b_1, b_2) est une base et donc $\mathcal{P}$ est de dimension 2. **Attention :** Si (b_1, b_2) est liée, la dimension est 0 ou 1.

Le nombre d'éléments d'un vect n'est pas toujours sa dimension !

Soit $n \geq 1$ un entier.

- Pour une famille quelconque $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$, on a toujours

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p.$$

Démonstration. Si $F := \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{0\}$ l'inégalité ci-dessus est triviale. Supposons donc $F \neq \{0\}$. La famille $(v_1, \dots, v_p)$ étant génératrice de F , (b) du théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe un entier $r \in \{1, \dots, p\}$ $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p$ tels que $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ soit une base de F . Il s'ensuit $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = r \leq p$. ■

Le nombre d'éléments d'un vect n'est pas toujours sa dimension !

Soit $n \geq 1$ un entier.

- Pour une famille quelconque $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$, on a toujours

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p.$$

Démonstration. Si $F := \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{0\}$ l'inégalité ci-dessus est triviale. Supposons donc $F \neq \{0\}$. La famille $(v_1, \dots, v_p)$ étant génératrice de F , (b) du théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe un entier $r \in \{1, \dots, p\}$ $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p$ tels que $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ soit une base de F . Il s'ensuit $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = r \leq p$. ■

- Pour une **famille libre** $(b_1, \dots, b_p)$ de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\text{rg}(b_1, \dots, b_p) = p.$$

Démonstration. Si la famille $(b_1, \dots, b_p)$ est libre, alors elle forme une base du s.e.v. $F := \text{vect}\{b_1, \dots, b_p\}$. Ce dernier est donc en particulier de dimension p . ■

Le résultat suivant a un aspect pratique intéressant.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ de dimension $p \geq 1$. Ont lieu :

- (a) Toute famille génératrice de F possède au moins p vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de F qui possède exactement p vecteurs est une base de F .

Le résultat suivant a un aspect pratique intéressant.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ de dimension $p \geq 1$. Ont lieu :

- (a) Toute famille génératrice de F possède au moins p vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de F qui possède exactement p vecteurs est une base de F .
- (c) Toute famille libre de F possède au plus p vecteurs.
- (d) Toute famille libre de F qui possède exactement p vecteurs est une base de F .

Le résultat suivant a un aspect pratique intéressant.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ de dimension $p \geq 1$. Ont lieu :

- (a) Toute famille génératrice de F possède au moins p vecteurs.
- (b) Toute famille génératrice de F qui possède exactement p vecteurs est une base de F .
- (c) Toute famille libre de F possède au plus p vecteurs.
- (d) Toute famille libre de F qui possède exactement p vecteurs est une base de F .

Exemple d'utilisation. La famille $\beta := ((1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Puisque β a 3 éléments et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, le résultat ci-dessus nous dit qu'il suffit de montrer que β est libre **OU** génératrice.

Démonstration. (a) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille génératrice de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $p \leq q$.

Démonstration. (a) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille génératrice de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $p \leq q$.

(b) Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de F . Supposons par l'absurde que cette famille soit liée. Dans ce cas, nous savons qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}(\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_k\}).$$

Ainsi, F a une famille génératrice de cardinal $< p$ et ceci contredit (a).

Démonstration. (a) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille génératrice de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $p \leq q$.

(b) Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de F . Supposons par l'absurde que cette famille soit liée. Dans ce cas, nous savons qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}(\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_k\}).$$

Ainsi, F a une famille génératrice de cardinal $< p$ et ceci contredit (a).

(c) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille libre de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $q \leq p$.

Démonstration. (a) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille génératrice de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $p \leq q$.

(b) Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de F . Supposons par l'absurde que cette famille soit liée. Dans ce cas, nous savons qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{vect}(\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_k\}).$$

Ainsi, F a une famille génératrice de cardinal $< p$ et ceci contredit (a).

(c) Soit $(v_1, \dots, v_q)$ une famille libre de F . Puisque F admet une base de cardinal p , il suffit d'exploiter la proposition liant le cardinal d'une famille libre avec celui d'une famille génératrice pour aboutir à $q \leq p$.

(d) Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de F . Par l'absurde, supposons que cette famille ne soit pas génératrice. Dans ce cas, on a

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \subset F \quad \text{et} \quad \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\} \neq F.$$

On peut donc choisir $u \in F$ tel que $(v_1, \dots, v_p, u)$ soit une famille libre de F et ceci contredit (c). ■

Du résultat précédent nous déduisons l'importante caractérisation du rang ci-dessous :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille à p éléments de $\mathbb{K}^n$. Alors,

$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$ si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Du résultat précédent nous déduisons l'importante caractérisation du rang ci-dessous :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille à p éléments de $\mathbb{K}^n$. Alors,

$$\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_p) = p \quad \text{si et seulement si la famille } (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre.}$$

Démonstration. Notons $F = \operatorname{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Par définition, $\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim F$.

Du résultat précédent nous déduisons l'importante caractérisation du rang ci-dessous :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille à p éléments de $\mathbb{K}^n$. Alors,

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = p \quad \text{si et seulement si la famille } (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre.}$$

Démonstration. Notons $F = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Par définition, $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim F$.

$\Rightarrow$, Supposons $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$, i.e., $\dim F = p$. Alors, la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de cardinal p , génératrice du s.e.v. F qui est de dimension p . La proposition précédente nous dit alors que $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de F , en particulier libre.

Du résultat précédent nous déduisons l'importante caractérisation du rang ci-dessous :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille à p éléments de $\mathbb{K}^n$. Alors,

$$\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_p) = p \quad \text{si et seulement si la famille } (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre.}$$

Démonstration. Notons $F = \operatorname{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Par définition, $\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim F$.

$\Rightarrow$, Supposons $\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$, i.e., $\dim F = p$. Alors, la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de cardinal p , génératrice du s.e.v. F qui est de dimension p . La proposition précédente nous dit alors que $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de F , en particulier libre.

$\Leftarrow$, Si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre, alors cette famille (qui est déjà génératrice par définition de F) est une base de F . On en déduit $\dim F = p$. ■

Nous ne savons pas encore si la notion de dimension est liée à l'inclusion : lorsque deux s.e.v. vérifient $F \subset G$, a-t-on nécessairement $\dim F \leq \dim G$?

La réponse est "oui" comme le montre le résultat suivant :

Nous ne savons pas encore si la notion de dimension est liée à l'inclusion : lorsque deux s.e.v. vérifient $F \subset G$, a-t-on nécessairement $\dim F \leq \dim G$?

La réponse est "oui" comme le montre le résultat suivant :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. **On suppose** que $F \subset G$.

Alors, on a $\dim F \leq \dim G$. De plus, on a l'équivalence

$$\dim F = \dim G \Leftrightarrow F = G.$$

Nous ne savons pas encore si la notion de dimension est liée à l'inclusion : lorsque deux s.e.v. vérifient $F \subset G$, a-t-on nécessairement $\dim F \leq \dim G$?

La réponse est "oui" comme le montre le résultat suivant :

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. **On suppose** que $F \subset G$.

Alors, on a $\dim F \leq \dim G$. De plus, on a l'équivalence

$$\dim F = \dim G \Leftrightarrow F = G.$$

Remarque. Attention, l'hypothèse $F \subset G$ est essentielle. En effet, les s.e.v. $\mathbb{R}^2$
 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifient $\dim F = \dim G$ et pourtant $F \neq G$.

Démonstration. Si $F = \{0\}$, on a tout de suite $\dim F \leq \dim G$. Supposons donc $F \neq \{0\}$. Soit $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F (on a donc $m = \dim F$). Puisque $F \subset G$, cette famille est libre dans G . La proposition précédente nous dit alors que $m \leq \dim G$ ce qui est l'inégalité désirée.

Démonstration. Si $F = \{0\}$, on a tout de suite $\dim F \leq \dim G$. Supposons donc $F \neq \{0\}$. Soit $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F (on a donc $m = \dim F$). Puisque $F \subset G$, cette famille est libre dans G . La proposition précédente nous dit alors que $m \leq \dim G$ ce qui est l'inégalité désirée.

Concernant l'équivalence énoncée, notons que seule l'implication $\Rightarrow$ mérite une justification. Supposons donc que $m = \dim F = \dim G$. La famille $(f_1, \dots, f_m)$ étant de cardinal $\dim G$ et libre dans G , elle est une base de G . On conclut que

$$F = \text{vect} \{f_1, \dots, f_m\} = G.$$

La démonstration est terminée.



Existence d'un supplémentaire

En combinant le résultat précédent et le théorème de la base incomplète, nous obtenons très facilement l'existence d'un supplémentaire pour n'importe quel s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Plus précisément :

Existence d'un supplémentaire

En combinant le résultat précédent et le théorème de la base incomplète, nous obtenons très facilement l'existence d'un supplémentaire pour n'importe quel s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Plus précisément :

Proposition

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ entier. Alors, il existe un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F.$$

Existence d'un supplémentaire

En combinant le résultat précédent et le théorème de la base incomplète, nous obtenons très facilement l'existence d'un supplémentaire pour n'importe quel s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Plus précisément :

Proposition

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ entier. Alors, il existe un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F.$$

Démonstration. On peut supposer que $E \neq \mathbb{K}^n$ et $E \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Notons $m = \dim E \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une base de E . Le fait que $\mathcal{B}$ soit une famille libre de $\mathbb{K}^n$ qui n'est pas une base de $\mathbb{K}^n$ nous donne (d'après le théorème de la base incomplète) des vecteurs $b_{m+1}, \dots, b_n \in \mathbb{K}^n$ tels que $(b_1, \dots, b_m, \dots, b_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Il reste à voir que $F = \text{vect}\{b_{m+1}, \dots, b_n\}$ vérifie la propriété désirée puisque

$$E \cap F = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{K}^n = \dim(E \oplus F).$$



Il est naturel de vouloir relier la dimension d'un sous-espace vectoriel somme $F + G$ à celles des espaces vectoriels F et G . En examinant le cas particulier d'un hyperplan vectoriel $\mathcal{P} := F = G$ de $\mathbb{K}^n$ avec $n > 1$ entier, nous voyons tout de suite que

$$n - 1 = \dim(F + G) = \dim \mathcal{P} \neq \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P} = 2n - 2.$$

Il est naturel de vouloir relier la dimension d'un sous-espace vectoriel somme $F + G$ à celles des espaces vectoriels F et G . En examinant le cas particulier d'un hyperplan vectoriel $\mathcal{P} := F = G$ de $\mathbb{K}^n$ avec $n > 1$ entier, nous voyons tout de suite que

$$n - 1 = \dim(F + G) = \dim \mathcal{P} \neq \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P} = 2n - 2.$$

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Il est naturel de vouloir relier la dimension d'un sous-espace vectoriel somme $F + G$ à celles des espaces vectoriels F et G . En examinant le cas particulier d'un hyperplan vectoriel $\mathcal{P} := F = G$ de $\mathbb{K}^n$ avec $n > 1$ entier, nous voyons tout de suite que

$$n - 1 = \dim(F + G) = \dim \mathcal{P} \neq \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P} = 2n - 2.$$

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la base incomplète (développée en TD) ou du théorème du rang (voir plus loin).



Le cas du produit cartésien mérite d'être développé.

Le cas du produit cartésien mérite d'être développé.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ et G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G.$$

Le cas du produit cartésien mérite d'être développé.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ et G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, c'est immédiat. Sinon, on choisit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G et on considère la famille

$$((f_1, 0), \dots, (f_p, 0), (0, g_1), \dots, (0, g_q))$$

dont on vérifie sans peine qu'elle est une base de $F \times G$.



- Les objectifs
- Structure vectorielle et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
- Combinaisons linéaires, vect et familles génératrices
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels
- Familles libres et liées
- Bases et dimension
- Applications linéaires

Les applications respectant l'addition et la multiplication (externe) sur $\mathbb{K}^n$ jouent un rôle fondamental et seront au cœur du calcul matriciel développé au Chapitre 2.

Définition (Application linéaire)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application. On dit que f est **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{K}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Les applications respectant l'addition et la multiplication (externe) sur $\mathbb{K}^n$ jouent un rôle fondamental et seront au cœur du calcul matriciel développé au Chapitre 2.

Définition (Application linéaire)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application. On dit que f est **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{K}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, \frac{x}{2}) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Objectif : montrer que f est une application linéaire.

Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, \frac{x}{2}) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Objectif : montrer que f est une application linéaire.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On commence par écrire

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, \frac{x}{2}) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Objectif : montrer que f est une application linéaire.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On commence par écrire

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

On note $X = \lambda x_1 + \mu x_2$ et $Y = \lambda y_1 + \mu y_2$. La définition de f donne alors

$$f(X, Y) = (2X + Y, -X + 3Y, \frac{X}{2}).$$

Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, \frac{x}{2}) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Objectif : montrer que f est une application linéaire.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On commence par écrire

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

On note $X = \lambda x_1 + \mu x_2$ et $Y = \lambda y_1 + \mu y_2$. La définition de f donne alors

$$f(X, Y) = (2X + Y, -X + 3Y, \frac{X}{2}).$$

Or, on a

$$2X + Y = \lambda(2x_1 + y_1) + \mu(2x_2 + y_2), \quad -X + 3Y = \lambda(-x_1 + 3y_1) + \mu(-x_2 + 3y_2)$$

et

$$\frac{X}{2} = \lambda \frac{x_1}{2} + \mu \frac{x_2}{2}.$$

Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, \frac{x}{2}) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Objectif : montrer que f est une application linéaire.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On commence par écrire

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

On note $X = \lambda x_1 + \mu x_2$ et $Y = \lambda y_1 + \mu y_2$. La définition de f donne alors

$$f(X, Y) = (2X + Y, -X + 3Y, \frac{X}{2}).$$

Or, on a

$$2X + Y = \lambda(2x_1 + y_1) + \mu(2x_2 + y_2), \quad -X + 3Y = \lambda(-x_1 + 3y_1) + \mu(-x_2 + 3y_2)$$

et

$$\frac{X}{2} = \lambda \frac{x_1}{2} + \mu \frac{x_2}{2}.$$

Il vient alors

$$(2X + Y, -X + 3Y, \frac{X}{2}) = \lambda(2x_1 + y_1, -x_1 + 3y_1, \frac{x_1}{2}) + \mu(2x_2 + y_2, -x_2 + 3y_2, \frac{x_2}{2})$$

ce qui s'écrit encore $f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2)$. La linéarité de f est ainsi établie.

Deux définitions équivalentes

Comme dans le cadre de la définition des s.e.v., il existe plusieurs définitions alternatives pour les applications linéaires.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application. **Sont équivalentes :**

(a) f est linéaire;

(b) Pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

(c) Pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

(d) Pour toute famille $(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ de $\mathbb{K}^n$ et toute famille $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(x_k);$$

Deux définitions équivalentes

Comme dans le cadre de la définition des s.e.v., il existe plusieurs définitions alternatives pour les applications linéaires.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application. **Sont équivalentes :**

(a) f est linéaire;

(b) Pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

(c) Pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

(d) Pour toute famille $(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ de $\mathbb{K}^n$ et toute famille $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(x_k);$$

Démonstration. Les équivalences (a),(b) et (c) sont évidentes de même que l'implication (d) $\Rightarrow$ (a). L'implication (a) $\Rightarrow$ (d) découle d'une récurrence immédiate. ■

Nous allons maintenant présenter deux ensembles naturellement associés à une application linéaire : son noyau et son image.

Définition (Noyau, image)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. On appelle **noyau** de f la partie de $\mathbb{K}^n$

$$\ker(f) := \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0_{\mathbb{K}^m}\}.$$

On appelle **image** de f la partie de $\mathbb{K}^m$

$$\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in \mathbb{K}^n\} = f(\mathbb{K}^n).$$

Il convient de noter que l'on ne définit pas le concept de noyau pour une application quelconque.

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels :

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Alors :

(a) L'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, en particulier

$$f(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

(b) L'ensemble $\operatorname{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Le noyau et l'image sont des s.e.v.

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels :

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Alors :

(a) L'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, en particulier

$$f(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

(b) L'ensemble $\operatorname{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. (a) On a $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$, i.e., $0 \in \ker(f)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in \ker(f)$. Il suffit d'exploiter la linéarité de f en écrivant

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

pour conclure que $\lambda x + \mu y \in \ker(f)$.

(b) L'égalité $f(0) = 0$ montre que $0 \in \operatorname{im}(f)$. Soient $y_1, y_2 \in \operatorname{im}(f)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par définition de $\operatorname{im}(f)$, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Il s'ensuit

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in \operatorname{im}(f).$$

Ainsi, $\operatorname{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$. ■

Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

On définit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (x + y, z - x) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

On vérifie que l'application f est linéaire.

Objectif : déterminons une base du noyau de f et de son image.

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = z = -y \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -x, x) \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 1)$$

et ceci donne $\ker(f) = \mathbb{R}(1, -1, 1)$. Une base de $\ker(f)$ est donc $((1, -1, 1))$.

Déterminons l'image de f . On a

$$\operatorname{im}(f) = \{(x + y, z - x) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, -1) + y(1, 0) + z(0, 1) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Il s'ensuit

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{vect}\{(1, -1), (1, 0), (0, 1)\} = \operatorname{vect}\{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Une base de $\operatorname{im}(f)$ est donc $((1, 0), (0, 1))$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $(a_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On vérifie que l'application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

est linéaire.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $(a_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On vérifie que l'application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

est linéaire. Son **noyau** est donné par

$$\ker(f) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases} \right\}.$$

On retrouve en particulier qu'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.

Le théorème suivant donne un lien entre les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire. Avant de l'énoncer, introduisons le concept de rang.

Définition (Rang d'une application linéaire)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. On appelle **rang** de f noté $\operatorname{rg} f$ la dimension de l'image de f , i.e.,

$$\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{im} f.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat **fondamental** suivant :

Théorème du rang

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Alors, on a

$$n = \dim \mathbb{K}^n = \dim \ker(f) + \operatorname{rg}(f).$$

La démonstration

Si $\ker(f) = \mathbb{K}^n$, alors f est nulle et il n'y a rien à établir. Supposons donc que $\ker(f) \neq \mathbb{K}^n$.

Si $\ker(f) = \mathbb{K}^n$, alors f est nulle et il n'y a rien à établir. Supposons donc que $\ker(f) \neq \mathbb{K}^n$.

On suppose dans un premier temps que $\ker(f) \neq \{0\}$. Notons $p \geq 1$ sa dimension.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète en une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $y \in \operatorname{im}(f)$. Par définition de l'image, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, nous pouvons écrire $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ pour un certain $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Il vient alors

$$y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k f(e_k).$$

Ceci montre que $\mathcal{I} := (f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)$.

Si $\ker(f) = \mathbb{K}^n$, alors f est nulle et il n'y a rien à établir. Supposons donc que $\ker(f) \neq \mathbb{K}^n$.

On suppose dans un premier temps que $\ker(f) \neq \{0\}$. Notons $p \geq 1$ sa dimension.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète en une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $y \in \operatorname{im}(f)$. Par définition de l'image, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, nous pouvons écrire $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ pour un certain $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Il vient alors

$$y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k f(e_k).$$

Ceci montre que $\mathcal{I} := (f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)$. Nous allons montrer qu'elle est libre. Fixons $\mu_{p+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=p+1}^n \mu_k f(e_k) = 0.$$

Il vient tout de suite $\sum_{k=p+1}^n \mu_k e_k \in \ker(f)$ et ceci nous dit qu'il existe $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=p+1}^n \mu_k e_k = \sum_{k=1}^p v_k e_k.$$

Il s'ensuit facilement que $\mu_{p+1} = \dots = \mu_n = 0$. On conclut alors que $\mathcal{J}$ est une base de $\text{im}(f)$, en particulier

$$\dim \text{im}(f) = n - p = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker(f).$$

On suppose désormais que $\ker(f) = \{0\}$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Un raisonnement analogue à ce qui précède montre que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{im}(f)$. On en déduit que $\text{im}(f) = \mathbb{K}^n$ et l'égalité désirée en découle sans difficultés. La démonstration est terminée. ■

Applications injectives, surjective, bijectives

Avant de poursuivre notre étude, il convient de rappeler les notions suivantes :

Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition

On dit que f est **injective** lorsque pour tout $x, x' \in E$, on a l'implication

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

On dit que f est **surjective** lorsque pour chaque $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Lorsque f est injective et surjective, on dit que f est **bijective**.

Applications injectives, surjective, bijectives

Avant de poursuivre notre étude, il convient de rappeler les notions suivantes :

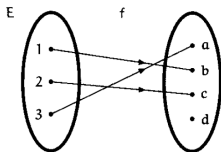
Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition

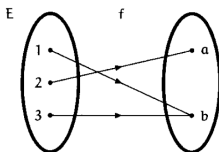
On dit que f est **injective** lorsque pour tout $x, x' \in E$, on a l'implication

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

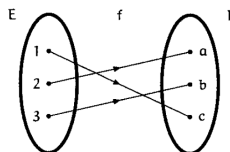
On dit que f est **surjective** lorsque pour chaque $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Lorsque f est injective et surjective, on dit que f est **bijective**.



Injective, non surjective



Non injective, surjective



Bijective

Applications injectives, surjective, bijectives

Avant de poursuivre notre étude, il convient de rappeler les notions suivantes :

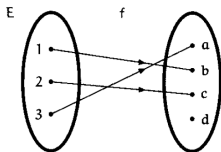
Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition

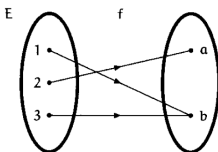
On dit que f est **injective** lorsque pour tout $x, x' \in E$, on a l'implication

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

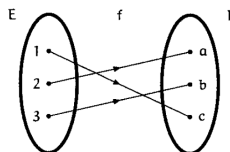
On dit que f est **surjective** lorsque pour chaque $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Lorsque f est injective et surjective, on dit que f est **bijective**.



Injective, non surjective



Non injective, surjective



Bijective

On montre facilement que f est bijective si et seulement si pour chaque $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Nous énonçons maintenant d'importantes caractérisations de l'injectivité et la surjectivité pour des applications linéaires.

Corollaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Ont lieu :

- (a) f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$ si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = n$.
- (b) f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = m$.
- (c) f est bijective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = n = m$.
- (d) Lorsque $n = m$, f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Démonstration. (a) La première équivalence découle de la définition d'injectivité et d'une application linéaire. Pour la deuxième, il suffit de combiner le théorème du rang à la première équivalence.

(b) L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\mathbb{K}^m = \operatorname{im}(f)$. Le fait que $\operatorname{im}(f)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ nous dit alors que f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = m$.

(c) – (d) Conséquences directes de (a) et (b). ■

Un premier résultat sur le nombre de solutions d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $(a_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$. On a déjà vu que l'application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

est linéaire. A cette application et au vecteur b , on peut associer le système linéaire d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Un premier résultat sur le nombre de solutions d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $(a_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$. On a déjà vu que l'application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

est linéaire. A cette application et au vecteur b , on peut associer le système linéaire d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Proposition

Ont lieu :

- (a) Si l'application f est injective, alors le système linéaire (S) a au plus une solution.
- (b) Si f est surjective, alors le système linéaire (S) admet au moins une solution.
- (c) Si f est bijective, alors le système linéaire (S) a exactement une solution.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent. ■

Nous examinons maintenant l'effet d'une application linéaire sur les familles libres.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Sont équivalentes :

- (a) f est injective ;
- (b) pour toute famille libre $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$, la famille $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est libre ;
- (c) pour toute base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$, la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre ;
- (d) il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que f soit injective. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k) = 0$. Par linéarité de f , on a

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k\right) = 0 = f(0).$$

L'injectivité de f nous dit alors que $\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k = 0$. Il reste à exploiter le caractère libre de $\mathbb{K}^n$ pour conclure que $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

(b) $\Rightarrow$ (c), Evident car toute base est une famille libre.

(c) $\Rightarrow$ (d), Evident.

(d) $\Rightarrow$ (a), Supposons qu'il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la famille $\mathcal{F} := (f(b_1), \dots, f(b_n))$ est libre. Soit $x \in \ker(f)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Il vient alors $0 = f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(b_k)$. Il suffit alors d'invoquer le caractère libre de $\mathcal{F}$ pour conclure que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, i.e., $x = 0$. ■

De la même manière, nous examinons maintenant l'effet d'une application linéaire sur les familles génératrices.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Sont équivalentes :

- (a) f est surjective ;
- (b) pour toute famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$, la famille $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$;
- (c) pour toute base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$, la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$;
- (d) il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$;
- (e) il existe une famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que f soit surjective. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Fixons $y \in \mathbb{K}^m$. Il existe (par surjectivité de f) $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. On a par linéarité de f

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k),$$

en particulier $y \in \text{vect}\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$. Ceci montre que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$ Supposons que f soit surjective. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Fixons $y \in \mathbb{K}^m$. Il existe (par surjectivité de f) $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. On a par linéarité de f

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k),$$

en particulier $y \in \text{vect}\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$. Ceci montre que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$.

$(b) \Rightarrow (c)$, Evident car toute base est une famille génératrice.

$(c) \Rightarrow (d)$, Evident.

$(d) \Rightarrow (e)$, Evident.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$ Supposons que f soit surjective. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Fixons $y \in \mathbb{K}^m$. Il existe (par surjectivité de f) $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. On a par linéarité de f

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k),$$

en particulier $y \in \text{vect}\{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$. Ceci montre que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est génératrice de $\mathbb{K}^m$.

$(b) \Rightarrow (c)$, Evident car toute base est une famille génératrice.

$(c) \Rightarrow (d)$, Evident.

$(d) \Rightarrow (e)$, Evident.

$(e) \Rightarrow (a)$, Supposons qu'il existe une famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ soit génératrice de $\mathbb{K}^m$. Soit $y \in \mathbb{K}^m$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $y = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k)$. La linéarité de f donne alors $y = f(\sum_{k=1}^p \lambda_k v_k)$ et ceci montre la surjectivité de f . ■

On continue dans la même ligne avec l'effet d'une application linéaire sur les bases.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Sont équivalentes :

- (a) f est bijective ;
- (b) pour toute base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$, la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est une base de $\mathbb{K}^m$;
- (c) il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ est une base de $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. Il suffit de combiner les deux propositions précédentes. ■

Nous montrons maintenant que deux applications linéaires qui coïncident (i.e., qui sont égales) sur une famille génératrice coïncident en fait sur tout l'espace. Autrement dit :

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications linéaires et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$f = g \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}, f(v_k) = g(v_k).$$

Nous montrons maintenant que deux applications linéaires qui coïncident (i.e., qui sont égales) sur une famille génératrice coïncident en fait sur tout l'espace. Autrement dit :

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications linéaires et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$f = g \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}, f(v_k) = g(v_k).$$

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Montrons donc $\Leftarrow$. Supposons que $f(v_k) = g(v_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Fixons $x \in E$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k$. Il vient alors

$$f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(v_k) = \sum_{k=1}^p \lambda_k g(v_k) = g(x).$$

La démonstration est terminée. ■

Définir une application linéaire par les images d'une base

Nous allons voir qu'une application linéaire est définie par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Définir une application linéaire par les images d'une base

Nous allons voir qu'une application linéaire est définie par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $(b_1, \dots, b_n)$ une **base** de $\mathbb{K}^n$ et $(c_1, \dots, c_n)$ une famille **quelconque** à n éléments de $\mathbb{K}^m$.

Alors, il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ telle que

$$f(b_i) = c_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Définir une application linéaire par les images d'une base

Nous allons voir qu'une application linéaire est définie par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $(b_1, \dots, b_n)$ une **base** de $\mathbb{K}^n$ et $(c_1, \dots, c_n)$ une famille **quelconque** à n éléments de $\mathbb{K}^m$.

Alors, il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ telle que

$$f(b_i) = c_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. Pour l'existence, il suffit d'observer que $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ vérifiant pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_n$$

est bien définie et linéaire.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linéaire satisfaisant $g(b_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Dans ce cas, on a $(f - g)(b_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et ceci entraîne (car $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$) que $f - g = 0$, i.e., $f = g$. ■

Le prochain résultat fera appel à trois types d'opérations sur les applications.

Le prochain résultat fera appel à trois types d'opérations sur les applications.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{K}^n$. On appelle **application somme** de f et g l'application $f + g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Le prochain résultat fera appel à trois types d'opérations sur les applications.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{K}^n$. On appelle **application somme** de f et g l'application $f + g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit également une application $\lambda f : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ en posant

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Le prochain résultat fera appel à trois types d'opérations sur les applications.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{K}^n$. On appelle **application somme** de f et g l'application $f + g : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit également une application $\lambda f : D \rightarrow \mathbb{K}^m$ en posant

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Enfin, pour quatre ensembles non vides E, F, G et H avec $F \subset G$ et deux applications $\varphi : E \rightarrow F$ et $\psi : G \rightarrow H$, on définit la **composée** de φ et ψ

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : E &\rightarrow F \subset G \rightarrow H \\ x &\mapsto \varphi(x) \mapsto \psi(\varphi(x)). \end{aligned}$$

La propriété de linéarité est stable par **somme**, **multiplication externe par un scalaire** et par **composition**. Cette stabilité jouera un grand rôle lorsque nous justifierons les règles du calcul matriciel.

La propriété de linéarité est stable par **somme**, **multiplication externe par un scalaire** et par **composition**. Cette stabilité jouera un grand rôle lorsque nous justifierons les règles du calcul matriciel.

Proposition

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers. Ont lieu :

(a) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ sont deux applications linéaires alors $f + g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

(b) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors l'application $\lambda f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est linéaire.

(c) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont deux applications linéaires alors $f \circ g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

La propriété de linéarité est stable par **somme**, **multiplication externe par un scalaire** et par **composition**. Cette stabilité jouera un grand rôle lorsque nous justifierons les règles du calcul matriciel.

Proposition

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers. Ont lieu :

(a) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ sont deux applications linéaires alors $f + g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

(b) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors l'application $\lambda f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est linéaire.

(c) Si $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont deux applications linéaires alors $f \circ g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

Démonstration. Il s'agit de conséquences immédiates de la définition d'une application linéaire. ■

Notation. Pour $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire, on note $f^p := f \circ f \circ \dots \circ f$.

(a) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les applications définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) := (x + y, 2x - y, 3y) \quad \text{et} \quad g(x, y) := (x, -2y, x - y).$$

On vérifie que ces applications sont linéaires. D'après (a) de la proposition précédente nous savons que l'application $f + g$ somme de f et g est linéaire.

Rappelons que (par définition) $f + g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y) = (2x + y, 2x - 3y, x - 2y).$$

(b) On garde la définition de f de (a) ci-dessus (qui est une application linéaire). Nous voyons que (b) de la proposition précédente nous dit que l'application $2f$ est linéaire.

Rappelons que (par définition) $2f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(2f)(x, y) := 2f(x, y) = (2x + 2y, 4x - 2y, 6y).$$

(c) On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x, y, z) := (x + y + z, x - 2y + 3z) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

et

$$g(x, y) = (x - y, 2y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On vérifie que ces applications sont linéaires. La proposition suivante nous dit que la composée $g \circ f$ est linéaire. Rappelons que (par définition) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ est donnée pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y, z) &= g(f(x, y, z)) \\ &= ((x + y + z) - (x - 2y + 3z), 2(x - 2y + 3z)) \\ &= (3y - 2z, 2x - 4y + 6z).\end{aligned}$$

Calcul matriciel

- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

- Savoir mettre en oeuvre les opérations usuelles sur les matrices.
- Déterminer une matrice associée à une application linéaire.
- Déterminer le rang d'une matrice.
- Résoudre des systèmes linéaires et inverser des matrices via l'algorithme de Gauss.
- Savoir appliquer les formules de changement de bases.

- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On appelle **matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$** la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On appelle **matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$** la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une matrice se dispose sous la forme d'un rectangle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On appelle **matrice de taille** $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une matrice se dispose sous la forme d'un rectangle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Pour $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$, on dit que :

- $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ est la i -ème **ligne** de la matrice A .
- $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$ est la j -ème **colonne** de la matrice A .
- $a_{i,j}$ est le **coefficient** en ligne i et en colonne j de A .

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers.

Notations. On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Lorsque $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ cet ensemble.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers.

Notations. On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Lorsque $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ cet ensemble.

- Une matrice à n ligne(s) et à n colonne(s) est appelée **matrice carrée**.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers.

Notations. On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Lorsque $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ cet ensemble.

- Une matrice à n ligne(s) et à n colonne(s) est appelée **matrice carrée**.
- Une matrice à n ligne(s) et à 1 colonne est appelée **vecteur colonne** : elle est de la

forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Tous les éléments du Chapitre 1 concernant $\mathbb{K}^n$ (règles de calculs, s.e.v., combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels engendrés, familles génératrices, libres, liées, bases, dimensions, applications linéaires) s'adaptent immédiatement au cas de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $m \times n$ étant avant tout une famille de scalaires $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, nous constatons que :

Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont **même taille et mêmes coefficients**.

Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

Pour $x \in \mathbb{K}^n$, nous pouvons écrire $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$ pour des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui sont précisément les coordonnées de x dans la base β). L'égalité

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(b_k)$$

montre alors que la donnée/connaissance de $f(b_1), \dots, f(b_n)$ **suffit à déterminer** $f(x)$ (et donc l'application f puisque x est quelconque dans $\mathbb{K}^n$).

Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

Pour $x \in \mathbb{K}^n$, nous pouvons écrire $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$ pour des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui sont précisément les coordonnées de x dans la base β). L'égalité

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(b_k)$$

montre alors que la donnée/connaissance de $f(b_1), \dots, f(b_n)$ **suffit à déterminer** $f(x)$ (et donc l'application f puisque x est quelconque dans $\mathbb{K}^n$).

D'autre part, les vecteurs $f(b_1), \dots, f(b_n)$ sont entièrement déterminés par leurs coordonnées dans la base γ . En effet,

- Il existe $a_{1,1}, \dots, a_{m,1} \in \mathbb{K}$ tels que $f(b_1) = \sum_{i=1}^m a_{i,1} c_i$.
- De même, il existe $a_{1,2}, \dots, a_{m,2} \in \mathbb{K}$ tels que $f(b_2) = \sum_{i=1}^m a_{i,2} c_i \dots$
- ...
- Il existe $a_{1,n}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$ tels que $f(b_n) = \sum_{i=1}^m a_{i,n} c_i$.

On synthétise ceci en disant que pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $a_{1,j}, \dots, a_{m,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} c_i.$$

Représentation matricielle d'une application linéaire : suite et fin

On synthétise ceci en disant que pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $a_{1,j}, \dots, a_{m,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} c_i.$$

Ainsi, nous voyons que la connaissance de f se ramène à la donnée de la matrice

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

dont la j -ème colonne (quelque soit $j \in \{1, \dots, n\}$) est précisément le vecteur colonne des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ de $\mathbb{K}^m$.

Cette matrice est appelée **matrice associée à f relativement aux bases β et γ** .

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{K}^2.$$

On **considère ici les bases canoniques** $\beta = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{K}^2$ et $\gamma = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{K}^3$.

On a

$$f(b_1) = f(1, 0) = (2, -1, 1) = 2c_1 - c_2 + c_3$$

et

$$f(b_2) = f(0, 1) = (1, 3, 0) = c_1 + 3c_2.$$

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{K}^2.$$

On **considère ici les bases canoniques** $\beta = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{K}^2$ et $\gamma = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{K}^3$.

On a

$$f(b_1) = f(1, 0) = (2, -1, 1) = 2c_1 - c_2 + c_3$$

et

$$f(b_2) = f(0, 1) = (1, 3, 0) = c_1 + 3c_2.$$

On en déduit

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

Addition et multiplication externe sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Comme dans le cas de $\mathbb{K}^p$ avec $p \geq 1$, on peut définir sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ (avec $m, n \geq 1$ entiers) une **addition (interne)** et une **multiplication (externe)** comme suit :

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemples

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Exemples

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- La somme $A+B$ est bien définie puisque A et B sont de même taille et on a

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Exemples

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- La somme $A + B$ est bien définie puisque A et B sont de même taille et on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

- Les expressions

$$??A + C?? \quad \text{et} \quad ??B + C??$$

ne sont pas définies.

Exemples

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- La somme $A+B$ est bien définie puisque A et B sont de même taille et on a

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

- Les expressions

$$??A+C?? \quad \text{et} \quad ??B+C??$$

ne sont pas définies.

- Le produit externe ne requiert aucune condition de compatibilité :

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -7 \\ -2 & -5 & -8 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi un tel choix d'addition et de multiplication externe ?

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a vu que les applications $f + g$ et λf définies pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$ par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

sont des applications linéaires.

Pourquoi un tel choix d'addition et de multiplication externe ?

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a vu que les applications $f + g$ et λf définies pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$ par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

sont des applications linéaires.

Question. On fixe deux bases β et γ de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$. Comment peut-on alors exprimer

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f + g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\gamma, \beta}(\lambda f) ?$$

Pourquoi un tel choix d'addition et de multiplication externe ?

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a vu que les applications $f + g$ et λf définies pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$ par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

sont des applications linéaires.

Question. On fixe deux bases β et γ de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$. Comment peut-on alors exprimer

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f + g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\gamma, \beta}(\lambda f) ?$$

Réponse. Il n'est pas difficile de voir que la définition de l'addition interne et du produit externe sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ entraînent les égalités suivantes :

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f + g) = \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) + \text{Mat}_{\gamma, \beta}(g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\gamma, \beta}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f).$$

A l'aide de l'**addition** et de la **multiplication externe** sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$, nous pouvons sans difficultés adapter de nombreuses notions du Chapitre 1 en remplaçant $\mathbb{K}^n$ par $M_{m,n}(\mathbb{K})$. C'est notamment le cas pour :

- Les sous-espace vectoriels;
- Les combinaisons linéaires;
- Les sous-espaces vectoriels engendrés par une famille et les familles génératrices;
- Les familles libres et liées;
- Les bases et dimensions.

Considérons deux entiers $m, n \geq 1$.

Définition

Pour chaque $p \in \{1, \dots, m\}$ et chaque $q \in \{1, \dots, n\}$, on appelle (p, q) -ème **matrice élémentaire** de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ notée $E_{p,q}$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en p -ème ligne et en q -ème colonne qui vaut 1.

Considérons deux entiers $m, n \geq 1$.

Définition

Pour chaque $p \in \{1, \dots, m\}$ et chaque $q \in \{1, \dots, n\}$, on appelle (p, q) -ème **matrice élémentaire** de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ notée $E_{p,q}$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en p -ème ligne et en q -ème colonne qui vaut 1.

Exemple. (a) Avec $m = 2$ et $n = 3$, on a $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Avec $m = 2$ et $n = 2$, on a $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

On vérifie sans difficultés :

Proposition

La famille $(E_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n}$ est libre et génératrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, i.e., est une base de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- **Produit matriciel**
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

Une introduction au produit matrice-colonne

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ et notons

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Une introduction au produit matrice-colonne

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ et notons

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in \mathbb{K}^n$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans β , i.e., $x = \sum_{k=1}^n x_k b_k$. Puisque les coordonnées de $f(b_k)$ dans γ sont données par la k -ème colonne de A , on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(b_k) = \sum_{k=1}^n x_k (a_{1,k} c_1 + \dots + a_{m,k} c_m).$$

Une introduction au produit matrice-colonne

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Fixons $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ et $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ des bases respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ et notons

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in \mathbb{K}^n$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans β , i.e., $x = \sum_{k=1}^n x_k b_k$. Puisque les coordonnées de $f(b_k)$ dans γ sont données par la k -ème colonne de A , on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(b_k) = \sum_{k=1}^n x_k (a_{1,k} c_1 + \dots + a_{m,k} c_m).$$

Les coordonnées de $f(x)$ dans la base γ sont alors données par le vecteur (écrit en colonne)

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}.$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Multiplication d'une matrice par un vecteur colonne

Définition

Soient $m, n \geq 1$. Le **produit d'une matrice** $A = (a_{l,k})_{1 \leq l \leq m, 1 \leq k \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec

un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un élément de $M_{m,1}(\mathbb{K})$ noté AX

et défini par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

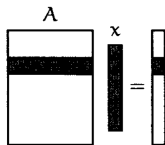


Figure 4: Schéma "Ligne $\times$ Colonne"

Exemple. Avec $m = 3$ et $n = 4$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+9+4 \\ 0+4+3+20 \\ 3-2+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Avec $m = 3$ et $n = 4$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+9+4 \\ 0+4+3+20 \\ 3-2+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Attention à la relation de compatibilité entre la taille de la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et le vecteur colonne $X \in M_n(\mathbb{K})$. L'expression suivante n'est pas définie :

$$?? \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ??$$

Exemple. Avec $m = 3$ et $n = 4$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+9+4 \\ 0+4+3+20 \\ 3-2+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Attention à la relation de compatibilité entre la taille de la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et le vecteur colonne $X \in M_n(\mathbb{K})$. L'expression suivante n'est pas définie :

$$?? \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ??$$

On pourra retenir que les **seules tailles compatibles** dans le produit matrice-vecteur colonne sont de la forme

$$\begin{array}{ccc} \textcolor{red}{(m, n)} & \textcolor{red}{(n, 1)} & \rightsquigarrow \textcolor{red}{(m, 1)} \\ \text{Taille de la matrice } A & \text{Taille du vecteur colonne } X & \text{Vecteur colonne } AX \end{array}$$

On a le résultat évident suivant :

Proposition

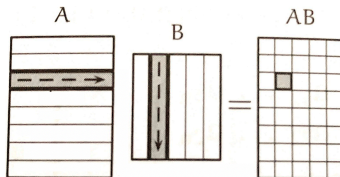
Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$. Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k C_k.$$

En particulier, le produit matrice colonne $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des colonnes de A .

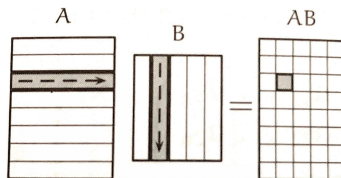
Introduction au produit matriciel

On voudrait donner un sens au produit de deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $m' \times n'$. Pour cela, on peut s'inspirer du produit matrice-vecteur colonne :



Introduction au produit matriciel

On voudrait donner un sens au produit de deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $m' \times n'$. Pour cela, on peut s'inspirer du produit matrice-vecteur colonne :

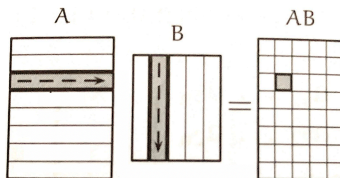


Ceci conduit à supposer que le nombre d'éléments de chaque ligne de A soit égal au nombre d'éléments de chaque colonne de B . Autrement dit :

$$n := \text{NBR. COLONNES. de } A = \text{NBR. LIGNES. de } B =: m'$$

Introduction au produit matriciel

On voudrait donner un sens au produit de deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $m' \times n'$. Pour cela, on peut s'inspirer du produit matrice-vecteur colonne :



Ceci conduit à supposer que le nombre d'éléments de chaque ligne de A soit égal au nombre d'éléments de chaque colonne de B . Autrement dit :

$$n := \text{NBR. COLONNES. de } A = \text{NBR. LIGNES. de } B =: m'$$

Sous cette condition de compatibilité $n = m'$, on peut considérer le produit matrice/vecteur colonne

$$(a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$$

L'étude précédente nous amène à définir le produit matriciel comme suit :

Définition

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers. Le produit de $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et de $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ de coefficient en ligne i et colonne j

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemple. Avec $m = 2 = n$ et $p = 3$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+16 & 6+18 & 7+20 \\ 15+32 & 18+36 & 21+40 \end{pmatrix}$$

Exemple. Avec $m = 2 = n$ et $p = 3$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+16 & 6+18 & 7+20 \\ 15+32 & 18+36 & 21+40 \end{pmatrix}$$

Attention à la relation de compatibilité entre la taille de la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et la matrice $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. L'expression suivante n'est pas définie :

$$?? \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix} = ??$$

Exemple. Avec $m = 2 = n$ et $p = 3$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+16 & 6+18 & 7+20 \\ 15+32 & 18+36 & 21+40 \end{pmatrix}$$

Attention à la relation de compatibilité entre la taille de la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et la matrice $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. L'expression suivante n'est pas définie :

$$?? \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix} = ??$$

On pourra retenir que les **seules tailles compatibles** dans le produit matriciel sont de la forme

$$\begin{array}{ccc} \textcolor{red}{(m, n)} & \textcolor{red}{(n, p)} & \rightsquigarrow \textcolor{red}{(m, p)} \\ \text{Taille de la matrice } A & \text{Taille de la matrice } B & \text{Taille de la matrice } AB \end{array}$$

- Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

Avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ on voit que

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

- Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

Avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ on voit que

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

- Etant données deux matrices A et B , il se peut que le produit matriciel AB (resp. BA) soit bien défini mais pas BA (resp. AB).

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ on voit que

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \end{pmatrix}.$$

mais que BA n'est pas bien définie !

- **Contrairement au calcul dans $\mathbb{K}$, le produit de deux matrices non nulles peut être égal à la matrice nulle.** ⁴.

On a par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⁴Pour les futurs mathématiciens : on parle de diviseur de zéro dans un anneau (voir cours Algèbre L2-L3) et on dit que $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas un anneau intègre.

- Soient trois matrices A, B et C telles que les produit matriciels AB et AC aient un sens. Alors, l'égalité $AB = AC$ **n'entraîne pas en général** que $B = C$.

- Soient trois matrices A, B et C telles que les produit matriciels AB et AC aient un sens. Alors, l'égalité $AB = AC$ **n'entraîne pas en général** que $B = C$.

En effet, avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,

on voit que

$$B \neq C$$

et

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

La multiplication matricielle est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition et même bilinéaire. Plus précisément :

Proposition

Soient $m, n, p, q \geq 1$ des entiers. Ont lieu :

(a) Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

La multiplication matricielle est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition et même bilinéaire. Plus précisément :

Proposition

Soient $m, n, p, q \geq 1$ des entiers. Ont lieu :

(a) Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

(b) Pour tout $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B.$$

La multiplication matricielle est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition et même bilinéaire. Plus précisément :

Proposition

Soient $m, n, p, q \geq 1$ des entiers. Ont lieu :

(a) Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

(b) Pour tout $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B.$$

(c) Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout $B, B' \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, tout $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,

$$A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'.$$

Démonstration. Exercice.



Pour un entier $n \geq 1$, on appelle **matrice identité d'ordre n** notée I_n , la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls, i.e.,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour un entier $n \geq 1$, on appelle **matrice identité d'ordre n** notée I_n , la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls, i.e.,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité joue le rôle d'élément neutre dans la multiplication matricielle. Plus précisément :

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Alors, on a pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$AI_n = I_m A = A.$$

Démonstration. Evident. ■

Pourquoi un tel choix de multiplication ?

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On a vu que $f \circ g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

Pourquoi un tel choix de multiplication ?

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On a vu que $f \circ g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

Question. On fixe deux bases γ et δ de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^p$. Comment peut-on exprimer

$$\text{Mat}_{\gamma, \delta}(f \circ g) ?$$

Pourquoi un tel choix de multiplication ?

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ et $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On a vu que $f \circ g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire.

Question. On fixe deux bases γ et δ de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^p$. Comment peut-on exprimer

$$\text{Mat}_{\gamma, \delta}(f \circ g) ?$$

Réponse. On introduit une base β de $\mathbb{K}^n$ et on montre que la définition du produit matriciel donne

$$\text{Mat}_{\gamma, \delta}(f \circ g) = \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) \text{Mat}_{\beta, \delta}(g).$$

Nous allons établir cette égalité dans le transparent suivant.

On note $m_{ij}^{(f \circ g)}$ (resp. $m_{ij}^{(f)}$ (resp. $m_{ij}^{(g)}$)) le coefficient en place (i, j) de $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f \circ g)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(g)$)). On note également $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ et $\delta = (d_1, \dots, d_p)$.

On note $m_{ij}^{(f \circ g)}$ (resp. $m_{ij}^{(f)}$ (resp. $m_{ij}^{(g)}$)) le coefficient en place (i, j) de $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f \circ g)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(g)$)). On note également $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ et $\delta = (d_1, \dots, d_p)$. Fixons $k \in \{1, \dots, p\}$. On a pour tout $k' \in \{1, \dots, n\}$

$$g(d_k) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} b_r \quad \text{et} \quad f(b_{k'}) = \sum_{s=1}^m m_{sk'}^{(f)} c_s.$$

On note $m_{ij}^{(f \circ g)}$ (resp. $m_{ij}^{(f)}$ (resp. $m_{ij}^{(g)}$)) le coefficient en place (i, j) de $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f \circ g)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(g)$). On note également $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ et $\delta = (d_1, \dots, d_p)$. Fixons $k \in \{1, \dots, p\}$. On a pour tout $k' \in \{1, \dots, n\}$

$$g(d_k) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} b_r \quad \text{et} \quad f(b_{k'}) = \sum_{s=1}^m m_{sk'}^{(f)} c_s.$$

Grâce à la linéarité de f , on peut écrire

$$f(g(d_k)) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} f(b_r) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} \left(\sum_{s=1}^m m_{sr}^{(f)} c_s \right) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} c_s \right).$$

On note $m_{ij}^{(f \circ g)}$ (resp. $m_{ij}^{(f)}$ (resp. $m_{ij}^{(g)}$)) le coefficient en place (i, j) de $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f \circ g)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(g)$). On note également $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ et $\delta = (d_1, \dots, d_p)$. Fixons $k \in \{1, \dots, p\}$. On a pour tout $k' \in \{1, \dots, n\}$

$$g(d_k) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} b_r \quad \text{et} \quad f(b_{k'}) = \sum_{s=1}^m m_{sk'}^{(f)} c_s.$$

Grâce à la linéarité de f , on peut écrire

$$f(g(d_k)) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} f(b_r) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} \left(\sum_{s=1}^m m_{sr}^{(f)} c_s \right) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} c_s \right).$$

En permutant les deux sommes,

$$f(g(d_k)) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} c_s \right) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} \right) c_s = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{sr}^{(f)} m_{rk}^{(g)} \right) c_s.$$

On note $m_{ij}^{(f \circ g)}$ (resp. $m_{ij}^{(f)}$ (resp. $m_{ij}^{(g)}$)) le coefficient en place (i, j) de $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f \circ g)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\gamma, \beta}(g)$). On note également $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_m)$ et $\delta = (d_1, \dots, d_p)$. Fixons $k \in \{1, \dots, p\}$. On a pour tout $k' \in \{1, \dots, n\}$

$$g(d_k) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} b_r \quad \text{et} \quad f(b_{k'}) = \sum_{s=1}^m m_{sk'}^{(f)} c_s.$$

Grâce à la linéarité de f , on peut écrire

$$f(g(d_k)) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} f(b_r) = \sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} \left(\sum_{s=1}^m m_{sr}^{(f)} c_s \right) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} c_s \right).$$

En permutant les deux sommes,

$$f(g(d_k)) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} c_s \right) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{rk}^{(g)} m_{sr}^{(f)} \right) c_s = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^n m_{sr}^{(f)} m_{rk}^{(g)} \right) c_s.$$

Par ailleurs, on a

$$(f \circ g)(d_k) = \sum_{s=1}^m m_{sk}^{(f \circ g)} c_s.$$

On aboutit alors (puisque γ est une base de $\mathbb{K}^m$) au fait que pour tout $s \in \{1, \dots, m\}$

$$m_{sk}^{(f \circ g)} = \sum_{r=1}^n m_{sr}^{(f)} m_{rk}^{(g)}.$$

Ceci justifie l'égalité attendue

$$\text{Mat}_{\gamma, \delta}(f \circ g) = \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) \text{Mat}_{\beta, \delta}(g).$$

Application linéaire associée à une matrice

Ici, $m, n \geq 1$ désigne deux entiers. On a vu qu'une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ induit (via le choix de bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$) une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Application linéaire associée à une matrice

Ici, $m, n \geq 1$ désigne deux entiers. On a vu qu'une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ induit (via le choix de bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$) une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Question. Est-ce que la donnée d'une matrice induit naturellement une application linéaire ?

Application linéaire associée à une matrice

Ici, $m, n \geq 1$ désigne deux entiers. On a vu qu'une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ induit (via le choix de bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$) une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Question. Est-ce que la donnée d'une matrice induit naturellement une application linéaire ?

Réponse. Oui. Pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, l'application $\hat{A} : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m,1}(\mathbb{K})$ définie par

$$\hat{A}(X) := AX \quad \text{pour tout } X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

est **linéaire** d'après la Slide 146, autrement dit :

$$\hat{A}(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda \hat{A}(X) + \mu \hat{A}(Y),$$

pour tout $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Si l'on veut se ramener à une application linéaire entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, il suffit de considérer $\tilde{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie par

$$\tilde{A}(x_1, \dots, x_n) := \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Notons $\beta_n = (e_1, \dots, e_n)$ $\beta_m = (f_1, \dots, f_m)$ et les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, notons $a_{i,j}$ le coefficient de A en ligne i et colonne j . En remarquant que pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\tilde{A}e_k = C_k^T = a_{1k}f_1 + \dots + a_{mk}f_m$$

nous voyons que $\text{Mat}_{\beta_m, \beta_n}(\tilde{A}) = A$, autrement dit A n'est autre que la représentation matricielle de A pour les bases canoniques β_n et β_m !

La matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

induit naturellement une **application linéaire** $\hat{A} : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}.$$

Elle induit également l'application linéaire $\tilde{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\tilde{A}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

Puissance d'une matrice carrée

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Etant donnée une matrice A de taille $m \times n$, il est clair que le produit matriciel $A \times A$ a un sens si et seulement si $m = n$ (i.e., A est carrée).

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 := I_n$ et

$$A^{p+1} := A \times A^p \quad \text{pour tout entier } p \geq 0.$$

En d'autres mots, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $A^0 := I_n$ et pour tout entier $p \geq 1$

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p\text{-facteurs}}.$$

Puissance d'une matrice carrée

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Etant donnée une matrice A de taille $m \times n$, il est clair que le produit matriciel $A \times A$ a un sens si et seulement si $m = n$ (i.e., A est carrée).

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 := I_n$ et

$$A^{p+1} := A \times A^p \quad \text{pour tout entier } p \geq 0.$$

En d'autres mots, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $A^0 := I_n$ et pour tout entier $p \geq 1$

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p\text{-facteurs}}.$$

Notons que l'associativité du produit matriciel nous assure pour $p \in \mathbb{N}$ de l'égalité

$$A^p = A^q A^r \quad \text{pour tout } q, r \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad q + r = p.$$

On dit parfois que la matrice A commute avec n'importe laquelle de ses puissances.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons déterminer une formule permettant de calculer la puissance p -ème de A pour $p \geq 1$ entier.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons déterminer une formule permettant de calculer la puissance p -ème de A pour $p \geq 1$ entier.

Il n'est pas difficile de voir que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons déterminer une formule permettant de calculer la puissance p -ème de A pour $p \geq 1$ entier.

Il n'est pas difficile de voir que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on montre alors que

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \quad \text{pour tout entier } p \geq 1.$$

Observons que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$ entier),

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2,$$

et

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Observons que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$ entier),

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2,$$

et

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Etant donné $p \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$C_p^k := \binom{p}{k} := \frac{p!}{(p-k)!k!} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, p\}.$$

Observons que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$ entier),

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2,$$

et

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Etant donné $p \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$C_p^k := \binom{p}{k} := \frac{p!}{(p-k)!k!} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, p\}.$$

Proposition (Formule du binôme)

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent (i.e., si $AB = BA$), alors on a

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Observons que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$ entier),

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2,$$

et

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Etant donné $p \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$C_p^k := \binom{p}{k} := \frac{p!}{(p-k)!k!} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, p\}.$$

Proposition (Formule du binôme)

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent (i.e., si $AB = BA$), alors on a

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Supposons que A et B commutent. Procédons par récurrence. La propriété souhaitée a lieu pour l'exposant 0 puisque $(A+B)^0 = I_n$ et $A^0 = B^0 = I_n$. Fixons $p \in \mathbb{N}$ et supposons que $(A+B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k}$. Le fait que A et B commutent donne

$$(A+B)^{p+1} = (A+B)(A+B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^{k+1} B^{p-k} + \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p+1-k}.$$

On a alors

$$(A+B)^{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} C_p^{k-1} A^k B^{p+1-k} + \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p+1-k},$$

d'où l'on tire

$$(A+B)^{p+1} = \sum_{k=1}^p (C_p^{k-1} + C_p^k) A^k B^{p+1-k} + A^{p+1} + B^{p+1}.$$

En combinant ceci et l'égalité $C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$ valide pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on aboutit sans difficultés à

$$(A+B)^{p+1} = \sum_{k=1}^p C_{p+1}^k A^k B^{p+1-k} + A^{p+1} + B^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k A^k B^{p+1-k}.$$

La récurrence est terminée.

On s'intéresse au calcul des puissances successives de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au calcul des puissances successives de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En introduisant $N := A - I_4$, il vient d'une part

$$N^k = 0 \quad \text{pour tout } k \geq 4$$

et d'autre part (car I_4 commute avec N)

$$(N + I_4)^p = A^p = \sum_{k=0}^p C_p^k N^k I_4^{p-k} = \sum_{k=0}^{\textcolor{red}{3}} C_p^k N^k I_4^{p-k} = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2 - p + 1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p - 2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice N de l'exemple précédent est non nulle et satisfait $N^4 = 0$. Nous allons donner à un nom à ce type de matrices.

La matrice N de l'exemple précédent est non nulle et satisfait $N^4 = 0$. Nous allons donner à un nom à ce type de matrices.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $A^N = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

La matrice N de l'exemple précédent est non nulle et satisfait $N^4 = 0$. Nous allons donner à un nom à ce type de matrices.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $A^N = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

Exemples/Exercices.

- La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente car $A^2 = 0$.

- Le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.
- La somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

Nous poursuivons notre étude avec diverses opérations élémentaires sur les matrices. La transposition est l'une d'entre elles : elle permute les rôles des lignes et des colonnes.

Définition (Matrice transposée)

Soit $m, n \geq 1$ deux entiers, $A = (a_{lk})_{1 \leq l \leq m, 1 \leq k \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A notée $A^T = (b_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par

$$b_{k,l} = a_{l,k} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors on a $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition

Soit $m, n \geq 1$ deux entiers, $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Ont lieu :

(a) La transposition est involutive, i.e.,

$$(A^T)^T = A.$$

(b) La transposition est linéaire, i.e.,

$$(\lambda A + \mu A')^T = \lambda A^T + \mu A'^T.$$

(c) La transposition intervertit l'ordre des facteurs dans un produit, i.e.,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Démonstration. Exercice. ■

Nous verrons dans la suite deux importantes propriétés supplémentaires de la transposée concernant les notions de rang et d'inverse.

La transposition est au centre de la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) est noté $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$).

La transposition est au centre de la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) est noté $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$).

Exemples. (a) Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement symétrique et antisymétrique.

La transposition est au centre de la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) est noté $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$).

Exemples. (a) Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement symétrique et antisymétrique.

(b) Pour $n \geq 1$ et $C \in M_n(\mathbb{K})$, les matrices CC^T et $C^T C$ sont symétriques.

La transposition est au centre de la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) est noté $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$).

Exemples. (a) Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement symétrique et antisymétrique.

(b) Pour $n \geq 1$ et $C \in M_n(\mathbb{K})$, les matrices CC^T et $C^T C$ sont symétriques.



Le résultat suivant nous dit en particulier que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition

Soit $n \geq 2$ un entier. La partie $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (resp. $\frac{n(n-1)}{2}$). De plus, on a l'égalité

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

Démonstration. Il est clair que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. Par ailleurs, seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique, i.e., $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. Enfin, on observe que $M \in M_n(\mathbb{K})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique puisque

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T).$$

On conclut que $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$. ■

On introduit à présent une quantité fondamentale associée à une matrice carrée :

Définition (Trace)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **trace** de $A = (a_{l,k})_{1 \leq l,k \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\operatorname{tr}(A) := \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{j,j}.$$

On introduit à présent une quantité fondamentale associée à une matrice carrée :

Définition (Trace)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **trace** de $A = (a_{l,k})_{1 \leq l,k \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\operatorname{tr}(A) := \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{j,j}.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6.$

Trace d'une matrice carrée

On introduit à présent une quantité fondamentale associée à une matrice carrée :

Définition (Trace)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **trace** de $A = (a_{l,k})_{1 \leq l,k \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\operatorname{tr}(A) := \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{j,j}.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6.$

Attention, la trace n'est définie que pour des matrices carrées. Ainsi, l'expression suivante n'a pas de sens :

$$?? \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = ??$$

Les premières propriétés de la trace sont données dans la proposition suivante :

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

(a) $\text{tr}(I_n) = n$;

(b) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;

(c) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$;

(d) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$;

(e) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration. Seule (e) mérite une justification. L'égalité de (e) est une conséquence du fait que pour toute famille (double) $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{i,j}.$$



- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivot de Gauss et ses applications
- Changement de base

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on note en général x^{-1} l'unique élément de $\mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$. Ceci conduit naturellement à la définition suivante :

Définition (Inverse)

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** dans $M_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, on dit que B est un **inverse** de A dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe (général) linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on note en général x^{-1} l'unique élément de $\mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$. Ceci conduit naturellement à la définition suivante :

Définition (Inverse)

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** dans $M_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, on dit que B est un **inverse** de A dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe (général) linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

En fait, nous allons montrer qu'une matrice inversible n'admet qu'un seul inverse.

Inverse d'une matrice

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on note en général x^{-1} l'unique élément de $\mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$. Ceci conduit naturellement à la définition suivante :

Définition (Inverse)

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** dans $M_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, on dit que B est un **inverse** de A dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe (général) linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

En fait, nous allons montrer qu'une matrice inversible n'admet qu'un seul inverse.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, alors elle admet un unique inverse dans $M_n(\mathbb{K})$, noté A^{-1} .

Inverse d'une matrice

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on note en général x^{-1} l'unique élément de $\mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$. Ceci conduit naturellement à la définition suivante :

Définition (Inverse)

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** dans $M_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, on dit que B est un **inverse** de A dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe (général) linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

En fait, nous allons montrer qu'une matrice inversible n'admet qu'un seul inverse.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, alors elle admet un unique inverse dans $M_n(\mathbb{K})$, noté A^{-1} .

Preuve. Supposons que A soit inversible dans $M_n(\mathbb{K})$. Soient $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{K})$ deux inverses de A dans $M_n(\mathbb{K})$, i.e., $AB_i = B_iA = I_n$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. Il vient alors $AB_1 - AB_2 = A(B_1 - B_2) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ et

$$B_1[A(B_1 - B_2)] = (B_1A)(B_1 - B_2) = B_1 - B_2 = 0_{M_n(\mathbb{K})}.$$

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible dans $M_2(\mathbb{K})$.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible dans $M_2(\mathbb{K})$.
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible dans $M_2(\mathbb{K})$.
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$.
- Plus généralement, pour $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(M) := ad - bc \neq 0$. Si tel est le cas, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$



Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$



ATTENTION : ce résultat n'est pas valable pour l'addition. En effet, la somme de deux matrices inversibles n'est en général **PAS** une matrice inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0_{M_n(\mathbb{K})}.$$

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$



ATTENTION : ce résultat n'est pas valable pour l'addition. En effet, la somme de deux matrices inversibles n'est en général **PAS** une matrice inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0_{M_n(\mathbb{K})}.$$

Puissance de l'inverse. Soit $n \geq 1$ un entier. Pour $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on note $A^{-p} := (A^{-1})^p$ pour tout entier $p \geq 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On sait donner un sens au rang R_L de la famille des vecteurs lignes de A , i.e.,

$$R_L := \dim \text{vect} \{ (1, 2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, 9, 10) \}.$$

Une même remarque vaut pour le rang R_C de la famille des vecteurs colonnes de A ,

$$R_C := \dim \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On sait donner un sens au rang R_L de la famille des vecteurs lignes de A , i.e.,

$$R_L := \dim \text{vect} \{ (1, 2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, 9, 10) \}.$$

Une même remarque vaut pour le rang R_C de la famille des vecteurs colonnes de A ,

$$R_C := \dim \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

A priori, ces deux entiers n'ont aucune raison d'être égaux puisque R_L correspond à la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^5$ et R_C à la dimension d'un sous-espace vectoriel de $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On sait donner un sens au rang R_L de la famille des vecteurs lignes de A , i.e.,

$$R_L := \dim \text{vect} \{ (1, 2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, 9, 10) \}.$$

Une même remarque vaut pour le rang R_C de la famille des vecteurs colonnes de A ,

$$R_C := \dim \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

A priori, ces deux entiers n'ont aucune raison d'être égaux puisque R_L correspond à la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^5$ et R_C à la dimension d'un sous-espace vectoriel de $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

Nous allons en fait voir que R_L et R_C sont égaux et ceci quelque soit la matrice considérée.

Théorème

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Alors, le rang de la famille des vecteurs lignes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$) est **égal** au rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $M_{m,1}(\mathbb{K})$). De plus, en notant $\text{rg } A$ cet entier, on a

$$\text{rg } A \leq \min\{m, n\}.$$

L'entier $\text{rg } A$ donné par le théorème précédent est appelé **rang de la matrice A** .

Théorème

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Alors, le rang de la famille des vecteurs lignes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$) est **égal** au rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $M_{m,1}(\mathbb{K})$). De plus, en notant $\text{rg } A$ cet entier, on a

$$\text{rg } A \leq \min\{m, n\}.$$

L'entier $\text{rg } A$ donné par le théorème précédent est appelé **rang de la matrice A** .

Corollaire

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Démonstration. Notons $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .
On pose $l := \text{rg}\{L_1, \dots, L_m\}$ qui correspond par définition à

$$l = \dim V \quad \text{avec } V := \text{vect}\{L_1, \dots, L_m\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Démonstration. Notons $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . On pose $l := \text{rg}\{L_1, \dots, L_m\}$ qui correspond par définition à

$$l = \dim V \quad \text{avec } V := \text{vect}\{L_1, \dots, L_m\} \subset \mathbb{K}^n.$$

On va montrer que le rang de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est inférieur à l . Si $A = 0_{M_{m,n}(\mathbb{K})}$, il n'y a rien à établir. Supposons donc que A ne soit pas nulle, en particulier on a que $V \neq \{0\}$. Ceci permet de considérer une base $(b_1, \dots, b_l)$ de V .

Démonstration. Notons $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . On pose $l := \text{rg}\{L_1, \dots, L_m\}$ qui correspond par définition à

$$l = \dim V \quad \text{avec } V := \text{vect}\{L_1, \dots, L_m\} \subset \mathbb{K}^n.$$

On va montrer que le rang de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est inférieur à l . Si $A = 0_{M_{m,n}(\mathbb{K})}$, il n'y a rien à établir. Supposons donc que A ne soit pas nulle, en particulier on a que $V \neq \{0\}$. Ceci permet de considérer une base $(b_1, \dots, b_l)$ de V . Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,l} \in \mathbb{K}$ et $\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n} \in \mathbb{K}$ tels que

$$L_i = \lambda_{i,1}b_1 + \dots + \lambda_{i,l}b_l \quad \text{et} \quad b_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n}).$$

Démonstration. Notons $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . On pose $l := \text{rg} \{L_1, \dots, L_m\}$ qui correspond par définition à

$$l = \dim V \quad \text{avec } V := \text{vect} \{L_1, \dots, L_m\} \subset \mathbb{K}^n.$$

On va montrer que le rang de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est inférieur à l . Si $A = 0_{M_{m,n}(\mathbb{K})}$, il n'y a rien à établir. Supposons donc que A ne soit pas nulle, en particulier on a que $V \neq \{0\}$. Ceci permet de considérer une base $(b_1, \dots, b_l)$ de V . Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,l} \in \mathbb{K}$ et $\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n} \in \mathbb{K}$ tels que

$$L_i = \lambda_{i,1}b_1 + \dots + \lambda_{i,l}b_l \quad \text{et} \quad b_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n}).$$

On montre sans difficultés que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$C_j = \beta_{1,j} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m,1} \end{pmatrix}}_{=\Phi_1} + \beta_{2,j} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m,2} \end{pmatrix}}_{=\Phi_2} + \dots + \beta_{l,j} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{1,l} \\ \lambda_{2,l} \\ \vdots \\ \lambda_{m,l} \end{pmatrix}}_{=\Phi_l}$$

Cette dernière égalité montre que

$$\text{vect}\{C_1, \dots, C_n\} \subset \text{vect}\{\Phi_1, \dots, \Phi_l\}.$$

On conclut alors que

$$\text{rg}\{C_1, \dots, C_n\} \leq l,$$

i.e., le rang de la famille des vecteurs colonnes de A est majoré par le rang des vecteurs lignes de A . De la même manière, on montre l'inégalité renversée, ce qui permet d'aboutir à l'égalité attendue. ■

ERREUR CLASSIQUE. "Le rang correspond au nombre de lignes et/ou de colonnes non nulles".

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \dim \operatorname{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

Un autre exemple est donné par :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} I_n = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Deux notions de rang ?

A ce stade, nous disposons d'une notion de rang pour les applications linéaires et d'une notion de rang pour les matrices. Le résultat suivant dit que le rang d'une application linéaire est celui de n'importe laquelle de ses matrices associées.

Deux notions de rang ?

A ce stade, nous disposons d'une notion de rang pour les applications linéaires et d'une notion de rang pour les matrices. Le résultat suivant dit que le rang d'une application linéaire est celui de n'importe laquelle de ses matrices associées.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire, β une base de $\mathbb{K}^n$ et γ une base de $\mathbb{K}^m$. On a

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)).$$

Deux notions de rang ?

A ce stade, nous disposons d'une notion de rang pour les applications linéaires et d'une notion de rang pour les matrices. Le résultat suivant dit que le rang d'une application linéaire est celui de n'importe laquelle de ses matrices associées.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire, β une base de $\mathbb{K}^n$ et γ une base de $\mathbb{K}^m$. On a

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)).$$

Démonstration. Notons $M = (m_{p,q})_{1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n} = \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f)$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Notons également $\beta := (b_1, \dots, b_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \dim \text{im}(f) \\ &= \dim \text{vect} \{f(b_1), \dots, f(b_n)\} \\ &= \dim \text{vect} \{Me_1^T, \dots, Me_n^T\} \\ &= \dim \text{vect} \{C_1, \dots, C_n\} = \text{rg}(M). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + 3y, x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{K}^2.$$

On **considère ici les bases canoniques** β de $\mathbb{K}^2$ et γ de $\mathbb{K}^3$. On a déjà vu (au début du chapitre) que

$$\text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de cette matrice est évidemment 2 puisque les vecteurs colonnes de celle-ci forment une famille libre. On en déduit par la proposition précédente que l'application linéaire f est de rang 2.

On peut définir la notion de noyau pour les matrices en s'inspirant de ce qui a été fait pour les applications linéaires.

Définition (Noyau d'une matrice)

On appelle **noyau** de $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers l'ensemble

$$\ker(A) := \left\{ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0 \right\}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Théorème du rang (pour les matrices)

On peut maintenant développer un théorème du rang propre aux matrices.

Théorème du rang (version matricielle)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$\dim \ker(A) + \operatorname{rg}(A) = n.$$

Démonstration. On introduit $\hat{A} : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m,1}(\mathbb{K})$ l'application linéaire naturellement associée à A dont on rappelle qu'elle est définie par

$$\hat{A}x := Ax \quad \text{pour tout } x \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

On a évidemment $\ker(\hat{A}) = \ker(A)$ et

$$\operatorname{im}(\hat{A}) = \{Ax : x \in M_{n,1}(\mathbb{K})\} = \operatorname{vect}\{e_1^T, \dots, e_n^T\} = \operatorname{vect}\{C_1, \dots, C_n\},$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . On en déduit $\operatorname{rg}(A) = \dim \hat{A}$. Il reste à appliquer le théorème du rang pour conclure. ■

Nous pouvons caractériser l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire à travers la donnée du rang de n'importe laquelle de ses représentations matricielles.

Corollaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire, β une base de $\mathbb{K}^n$ et γ une base de $\mathbb{K}^m$. Pour $M := \text{Mat}_{\gamma, \beta}(f) \in M_{m, n}(\mathbb{K})$, on a les équivalences :

- (a) f est injective si et seulement si $\ker(M) = \{0\}$ si et seulement si $\text{rg}(M) = n$.
- (b) f est surjective si et seulement si $\text{rg}(M) = m$.
- (c) f est bijective si et seulement si $\text{rg}(M) = n = m$.

Démonstration. Il suffit de combiner les résultats des transparents [178](#), [175](#) et [107](#) pour établir les trois équivalences souhaitées. ■

Nombre de solutions d'un système linéaire - Point de vue matriciel

Nous allons (re)voir que la notion de rang est liée à l'existence de solutions pour les systèmes linéaires.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$. On considère le système linéaire d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A ce système linéaire, nous pouvons associer (comme nous l'avons déjà vu) l'application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Remarquons que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ notées respectivement β_n et β_m n'est nulle autre que

$$A := \text{Mat}_{\beta_m, \beta_n}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Le résultat sur le nombre de solutions d'un système linéaire ([Transparent 108](#)) ainsi que le Transparent 179 donne immédiatement la :

Proposition

Ont lieu :

Si $\text{rg}(A) = n$, alors le système linéaire (S) a au plus une solution.

Si $\text{rg}(A) = m$, alors le système linéaire (S) admet au moins une solution.

Si $\text{rg}(A) = m = n$, alors le système linéaire (S) a exactement une solution.

Dans l'étude du rang intervient régulièrement la notion de sous-matrices.

Définition (Sous-matrice)

Soit A une matrice. On appelle **sous-matrice** (on dit encore **matrice extraite**) de A toute matrice obtenue par une suppression d'une ou plusieurs lignes et/ou colonnes de la matrice A .

Dans l'étude du rang intervient régulièrement la notion de sous-matrices.

Définition (Sous-matrice)

Soit A une matrice. On appelle **sous-matrice** (on dit encore **matrice extraite**) de A toute matrice obtenue par une suppression d'une ou plusieurs lignes et/ou colonnes de la matrice A .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ possède les sous-matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \dots$$

On a l'important résultat suivant :

Proposition

Soit A une matrice de rang r . On a lieu :

- (a) Pour toute sous-matrice B de A , on a $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$.
- (b) La matrice A possède une sous-matrice inversible de taille $r \times r$.
- (c) Aucune sous-matrice carrée de taille plus grande strictement que r n'est inversible.

Exemple. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 1 & 2 & * & * \\ 3 & 4 & * & * \end{pmatrix}$$

est de rang supérieur ou égal à 2.

Démonstration. On suppose que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ pour deux entiers $m, n \geq 1$.

Démonstration. On suppose que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ pour deux entiers $m, n \geq 1$.

(a) Soit B une sous-matrice de A . On peut supposer $p := \text{rg}(B) \geq 1$. Il existe alors p lignes de B qui forment une famille libre. En complétant ces lignes par les composantes supprimées de A , on obtient p lignes de A qui forment encore une famille libre de $\mathbb{K}^n$. On en déduit que $p \leq \text{rg}(A)$.

Démonstration. On suppose que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ pour deux entiers $m, n \geq 1$.

(a) Soit B une sous-matrice de A . On peut supposer $p := \text{rg}(B) \geq 1$. Il existe alors p lignes de B qui forment une famille libre. En complétant ces lignes par les composantes supprimées de A , on obtient p lignes de A qui forment encore une famille libre de $\mathbb{K}^n$. On en déduit que $p \leq \text{rg}(A)$.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A . On peut supposer $F \neq \{0\}$. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe r lignes de A qui forment une base de F . On note $B \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A ainsi obtenue qui satisfait $\text{rg}(B) = r$. Si $n = r$, c'est terminé. Supposons $n > r$. On note G le sous-espace vectoriel de $M_{r,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de B . Puisque G est de dimension $r < n$, le théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe r colonnes de A qui forment une base de G . La sous-matrice C de B est carrée de taille r et vérifie $\text{rg}(C) = r$.

Démonstration. On suppose que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ pour deux entiers $m, n \geq 1$.

(a) Soit B une sous-matrice de A . On peut supposer $p := \text{rg}(B) \geq 1$. Il existe alors p lignes de B qui forment une famille libre. En complétant ces lignes par les composantes supprimées de A , on obtient p lignes de A qui forment encore une famille libre de $\mathbb{K}^n$. On en déduit que $p \leq \text{rg}(A)$.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A . On peut supposer $F \neq \{0\}$. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe r lignes de A qui forment une base de F . On note $B \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A ainsi obtenue qui satisfait $\text{rg}(B) = r$. Si $n = r$, c'est terminé. Supposons $n > r$. On note G le sous-espace vectoriel de $M_{r,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de B . Puisque G est de dimension $r < n$, le théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe r colonnes de A qui forment une base de G . La sous-matrice C de B est carrée de taille r et vérifie $\text{rg}(C) = r$.

(c) Conséquence directe de (b). ■

Proposition

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)).$$

Proposition

Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)).$$

Démonstration. De la définition du produit matriciel AB , on tire tout de suite que les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A , d'où la majoration

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A).$$

De même, les lignes du produit matriciel AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B , en particulier

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B).$$

Le résultat voulu est démontré. ■

On donne ici plusieurs caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Sont équivalentes :

- (a) A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$;
- (b) Il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$;
- (c) Il existe $C \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$;
- (d) Les colonnes de A forment une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$;
- (e) Les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$;
- (f) $\text{rg } A = n$;
- (g) $\ker(A) = \{0\}$.

Démonstration. Les assertions (d) , (e) et (f) sont équivalentes puisque le rang de A correspond à la fois à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A et à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A . Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que (f) et (g) sont équivalentes.

Démonstration. Les assertions (d), (e) et (f) sont équivalentes puisque le rang de A correspond à la fois à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A et à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A . Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que (f) et (g) sont équivalentes.

(d) $\Rightarrow$ (b) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Pour chaque $l \in \{1, \dots, n\}$, il existe $(\beta_{k,l})_{1 \leq k \leq n}$ une famille de $\mathbb{K}$ telle que $e_l = \sum_{k=1}^n \beta_{k,l} C_k$. La matrice $B := (\beta_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$ satisfait alors $I_n = AB$.

(e) $\Rightarrow$ (c) est analogue à (d) $\Rightarrow$ (b).

Démonstration. Les assertions (d), (e) et (f) sont équivalentes puisque le rang de A correspond à la fois à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A et à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A . Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que (f) et (g) sont équivalentes.

(d) $\Rightarrow$ (b) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Pour chaque $l \in \{1, \dots, n\}$, il existe $(\beta_{k,l})_{1 \leq k \leq n}$ une famille de $\mathbb{K}$ telle que $e_l = \sum_{k=1}^n \beta_{k,l} C_k$. La matrice $B := (\beta_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$ satisfait alors $I_n = AB$.

(e) $\Rightarrow$ (c) est analogue à (d) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (d) On sait déjà que $\text{rg } A \leq n$. D'autre part, nous avons $\text{rg}(AB) = n \leq \text{rg } A$.

(c) $\Rightarrow$ (e) est analogue à (b) $\Rightarrow$ (d).

Démonstration. Les assertions (d), (e) et (f) sont équivalentes puisque le rang de A correspond à la fois à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A et à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A . Par ailleurs, le théorème du rang nous dit que (f) et (g) sont équivalentes.

(d) $\Rightarrow$ (b) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Pour chaque $l \in \{1, \dots, n\}$, il existe $(\beta_{k,l})_{1 \leq k \leq n}$ une famille de $\mathbb{K}$ telle que $e_l = \sum_{k=1}^n \beta_{k,l} C_k$. La matrice $B := (\beta_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$ satisfait alors $I_n = AB$.

(e) $\Rightarrow$ (c) est analogue à (d) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (d) On sait déjà que $\text{rg } A \leq n$. D'autre part, nous avons $\text{rg}(AB) = n \leq \text{rg } A$.

(c) $\Rightarrow$ (e) est analogue à (b) $\Rightarrow$ (d).

(a) $\Rightarrow$ (b) est triviale. Il reste à établir (b) $\Rightarrow$ (a) pour conclure. Puisque (b) est équivalente à (a), on peut supposer qu'il existe $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = CA.$$

Il suffit alors d'écrire

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C.$$



Ainsi, pour montrer l'inversibilité de $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$), on peut utiliser la propriété (b) (resp. (c)) qui demande seulement l'existence d'un inverse à droite (resp. à gauche) de A , i.e., l'existence de $B \in M_n(\mathbb{K})$ (resp. de $C \in M_n(\mathbb{K})$) telle que

$$AB = I_n \quad (\text{resp. } CA = I_n).$$

Dans ce cas, on a nécessairement $B = A^{-1}$ (resp. $C = A^{-1}$) puisque la première (resp. la deuxième) égalité ci-dessus donne

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_nB = B.$$

Nous allons maintenant étudier l'inversibilité d'une classe importante de matrices.

Définition

Soit $A = (a_{pq})_{1 \leq p, q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$. On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque

$$a_{pq} = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq q < p \leq n.$$

Nous allons maintenant étudier l'inversibilité d'une classe importante de matrices.

Définition

Soit $A = (a_{pq})_{1 \leq p, q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$. On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque

$$a_{pq} = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq q < p \leq n.$$

Autrement dit, une matrice triangulaire supérieure est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

où les $*$ désignent des scalaires quelconques.

De même, on définit le concept de matrices **triangulaires inférieures**.

Proposition

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Soient $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$ une matrice triangulaire. Quitte à considérer la transposée, on peut sans pertes de généralités supposer que A est triangulaire supérieure.

Proposition

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Soient $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$ une matrice triangulaire. Quitte à considérer la transposée, on peut sans pertes de généralités supposer que A est triangulaire supérieure.

$\Rightarrow$, Supposons que A soit inversible. Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{pp} = 0$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A . On a évidemment

$$L_p, \dots, L_n \in \text{vect} \{e_{p+1}, \dots, e_n\},$$

d'où l'inclusion

$$\text{vect} \{L_p, \dots, L_n\} \subset \text{vect} \{e_{p+1}, \dots, e_n\}.$$

Puisque $\text{vect} \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ est de dimension $n - p$, le sous-espace vectoriel $\text{vect} \{L_p, \dots, L_n\}$ engendré par $n - p + 1$ éléments est au plus de dimension $n - p$. Ceci nous assure que la famille $(L_p, \dots, L_n)$ est liée et donne la contradiction voulue.

$\Leftarrow$, Supposons que les éléments diagonaux sont tous non nuls. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = 0.$$

Puisque A est triangulaire supérieure, il vient

$$\lambda_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + \lambda_2(0, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + \lambda_n(0, \dots, 0, a_{nn}) = (0, \dots, 0).$$

On en déduit $\lambda_1 a_{11} = 0$ puis (en gardant à l'esprit que $a_{11} \neq 0$) $\lambda_1 = 0$. L'égalité ci-dessus entraîne alors que $\lambda_2 a_{22} = 0$ et de même $a_{22} = 0$. De proche en proche, on obtient $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$. Ainsi, la famille des lignes $(L_1, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ et ceci nous assure de l'inversibilité de A .

De la proposition précédente, on déduit :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^T \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Si tel est le cas, alors on a

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

De la proposition précédente, on déduit :

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^T \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Si tel est le cas, alors on a

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Démonstration. Pour obtenir l'équivalence voulue, il suffit d'exploiter le fait qu'une matrice carrée B de taille n satisfait $\text{rg}(B) = \text{rg}(B^T)$ et qu'elle est inversible si et seulement si $\text{rg}(B) = n$. L'égalité souhaitée découle du fait que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n.$$



- Les objectifs
- Matrices et représentation matricielle d'une application linéaire
- Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Produit matriciel
- Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence
- Inversibilité et rang
- Pivots de Gauss et ses applications
- Changement de base

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

Nous allons présenter la méthode du *pivot de Gauss* (appelée aussi **élimination de Gauss**). Elle permet :

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

Nous allons présenter la méthode du *pivot de Gauss* (appelée aussi **élimination de Gauss**). Elle permet :

- De trouver le rang d'une matrice (et donc d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$);

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

Nous allons présenter la méthode du *pivot de Gauss* (appelée aussi **élimination de Gauss**). Elle permet :

- De trouver le rang d'une matrice (et donc d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$);
- Déterminer une base d'un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$;

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

Nous allons présenter la méthode du *pivot de Gauss* (appelée aussi **élimination de Gauss**). Elle permet :

- De trouver le rang d'une matrice (et donc d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$);
- Déterminer une base d'un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$;
- Résoudre les systèmes linéaires;

A ce stade, nous n'avons pas encore de moyen pratique d'inverser une matrice ou de déterminer son rang.

Nous allons présenter la méthode du *pivot de Gauss* (appelée aussi **élimination de Gauss**). Elle permet :

- De trouver le rang d'une matrice (et donc d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$);
- Déterminer une base d'un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$;
- Résoudre les systèmes linéaires;
- Calculer l'inverse d'une matrice.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers. On note $L_1, \dots, L_m$ ses lignes.

Nous allons faire appel à 3 types d'opérations élémentaires sur les lignes. On fixe $p, q \in \{1, \dots, m\}$.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers. On note $L_1, \dots, L_m$ ses lignes.

Nous allons faire appel à 3 types d'opérations élémentaires sur les lignes. On fixe $p, q \in \{1, \dots, m\}$.

- Echange de deux lignes : L_p devient L_q et L_q devient L_p .
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul λ : L_p devient λL_p .
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : L_p devient $L_p + \lambda L_q$ avec $q \neq p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les lignes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les lignes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $L_p \leftrightarrow L_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème ligne de A .

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les lignes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $L_p \leftrightarrow L_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème ligne de A .
- $L_p \leftarrow \lambda L_p$ pour exprimer que la p -ème ligne de B est obtenue comme la p -ème ligne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les lignes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $L_p \leftrightarrow L_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème ligne de A .
- $L_p \leftarrow \lambda L_p$ pour exprimer que la p -ème ligne de B est obtenue comme la p -ème ligne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- $L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q$ pour synthétiser le fait que la p -ème ligne de B est obtenue comme la p -ème ligne de A additionnée de la q -ème ligne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les lignes de la matrice B obtenue sont encore notées $L_1, \dots, L_m$... ceci constitue un abus de notation aussi pratique qu'inévitable !

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note L_1 et L_2 les lignes de A .

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note L_1 et L_2 les lignes de A .

- L'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les lignes de B sont alors notées L_1 et L_2 comme les lignes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note L_1 et L_2 les lignes de A .

- L'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les lignes de B sont alors notées L_1 et L_2 comme les lignes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

- L'opération élémentaire $L_1 \leftarrow 3L_1$ sur B donne une nouvelle matrice

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les lignes sont encore notées L_1 et L_2 comme les lignes de B et de A .

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note L_1 et L_2 les lignes de A .

- L'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les lignes de B sont alors notées L_1 et L_2 comme les lignes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

- L'opération élémentaire $L_1 \leftarrow 3L_1$ sur B donne une nouvelle matrice

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les lignes sont encore notées L_1 et L_2 comme les lignes de B et de A .

- L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ sur C donne

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 19 & 26 \end{pmatrix}.$$

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

Nous allons faire appel à 3 types d'opérations élémentaires sur les colonnes.

On fixe $p, q \in \{1, \dots, m\}$.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

Nous allons faire appel à 3 types d'opérations élémentaires sur les colonnes.

On fixe $p, q \in \{1, \dots, m\}$.

- Echange de deux colonnes : C_p devient C_q et C_q devient C_p .
- Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul λ : C_p devient λC_p .
- Addition à une colonne d'un multiple d'une autre colonne : C_p devient $C_p + \lambda C_q$ avec $q \neq p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les colonnes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les colonnes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $C_p \leftrightarrow C_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème colonne de A .

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les colonnes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $C_p \leftrightarrow C_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème colonne de A .
- $C_p \leftarrow \lambda C_p$ pour exprimer que la p -ème colonne de B est obtenue comme la p -ème colonne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

On garde les notations du transparent précédent.

Les opérations élémentaires sur les colonnes permettent à partir de A de construire une nouvelle matrice B . Pour spécifier les opérations réalisées dans le passage de A vers B , il est **d'usage de noter** :

- $C_p \leftrightarrow C_q$ pour signifier que la matrice B est déduite de A par un échange entre la p -ème et la q -ème colonne de A .
- $C_p \leftarrow \lambda C_p$ pour exprimer que la p -ème colonne de B est obtenue comme la p -ème colonne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- $C_p \leftarrow C_p + \lambda C_q$ pour synthétiser le fait que la p -ème colonne de B est obtenue comme la p -ème colonne de A additionnée de la q -ème colonne de A multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme dans le cas des opérations élémentaires sur les lignes, les colonnes de la matrice B obtenue sont encore notées (par abus de notations) $C_1, \dots, C_n$.

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note C_1 et C_2 les colonnes de A .

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note C_1 et C_2 les colonnes de A .

- L'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les colonnes de B sont alors notées C_1 et C_2 comme les colonnes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note C_1 et C_2 les colonnes de A .

- L'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les colonnes de B sont alors notées C_1 et C_2 comme les colonnes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

- L'opération élémentaire $C_1 \leftarrow 3C_1$ sur B donne une nouvelle matrice

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont encore notées C_1 et C_2 comme les lignes de B et de A .

Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note C_1 et C_2 les colonnes de A .

- L'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_2$ sur A donne une nouvelle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sans aucune mention explicite du contraire, les colonnes de B sont alors notées C_1 et C_2 comme les colonnes de A (ce qui est l'abus de notation exprimé précédemment).

- L'opération élémentaire $C_1 \leftarrow 3C_1$ sur B donne une nouvelle matrice

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont encore notées C_1 et C_2 comme les lignes de B et de A .

- L'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ sur C donne

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 12 & 27 \end{pmatrix}.$$

On énonce à présent un résultat garantissant la stabilité du rang sous l'action d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(a) Les opérations élémentaires sur les lignes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A .

On énonce à présent un résultat garantissant la stabilité du rang sous l'action d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

- (a) Les opérations élémentaires sur les lignes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A .
- (b) Les opérations élémentaires sur les colonnes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes.

On énonce à présent un résultat garantissant la stabilité du rang sous l'action d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

- (a) Les opérations élémentaires sur les lignes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A .
- (b) Les opérations élémentaires sur les colonnes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes.
- (c) Aucune opération élémentaire sur les lignes et/ou les colonnes de A **ne change** le rang de la matrice A .

On énonce à présent un résultat garantissant la stabilité du rang sous l'action d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Proposition

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

- (a) Les opérations élémentaires sur les lignes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A .
- (b) Les opérations élémentaires sur les colonnes de A **ne changent pas** le sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes.
- (c) Aucune opération élémentaire sur les lignes et/ou les colonnes de A **ne change** le rang de la matrice A .

Démonstration. Les assertions (a) et (b) sont immédiates.

L'assertion (c) est une conséquence directe de (a), (b) et du fait que le rang de la matrice vaut la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A elle même égale à la dimension du sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A . ■

Afin de développer convenablement l'algorithme de Gauss, nous aurons besoin de la définition d'une matrice échelonnée. Celle-ci fait appel à notion de largeur.

Définition (Largeur d'une ligne)

Soient $n \geq 1$ un entier, $L = (a_1, \dots, a_n) \in M_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ une ligne non nulle et k le plus entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$. On appelle **largeur** de L l'entier

$$l(L) := n - k + 1.$$

On appelle **pivot** de L le 1er élément non nul de L : $a_k = a_{n-l(L)+1}$.

Lorsque $L = 0_{\mathbb{K}^n}$ (i.e., L est nulle), on convient de poser $l(L) = 0$.

Afin de développer convenablement l'algorithme de Gauss, nous aurons besoin de la définition d'une matrice échelonnée. Celle-ci fait appel à notion de largeur.

Définition (Largeur d'une ligne)

Soient $n \geq 1$ un entier, $L = (a_1, \dots, a_n) \in M_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ une ligne non nulle et k le plus entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$. On appelle **largeur** de L l'entier

$$l(L) := n - k + 1.$$

On appelle **pivot** de L le 1er élément non nul de L : $a_k = a_{n-l(L)+1}$.

Lorsque $L = 0_{\mathbb{K}^n}$ (i.e., L est nulle), on convient de poser $l(L) = 0$.

Exemple. Soit $L = (0, 1, 2, 3, 4, 5) \in \mathbb{K}^6$. On note $a_1, \dots, a_6$ ses coefficients. Puisque

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = a_{6-5+1} \neq 0$$

on a $l(L) = 6 - 2 + 1 = 5$ tandis que le pivot de L correspond est $a_2 = 1$.

La notion de largeur d'une ligne permet de formaliser simplement une classe particulière de matrices.

Définition (Echelonnée en lignes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée en lignes** si elle est nulle ou s'il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$l(L_1) > \dots > l(L_k) > 0 \quad \text{et} \quad L_p = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{pour tout } p \in \{k+1, \dots, m\}.$$

La notion de largeur d'une ligne permet de formaliser simplement une classe particulière de matrices.

Définition (Echelonnée en lignes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée en lignes** si elle est nulle ou s'il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$l(L_1) > \dots > l(L_k) > 0 \quad \text{et} \quad L_p = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{pour tout } p \in \{k+1, \dots, m\}.$$

Exemples. • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes.

Matrice échelonnée en lignes

La notion de largeur d'une ligne permet de formaliser simplement une classe particulière de matrices.

Définition (Echelonnée en lignes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée en lignes** si elle est nulle ou s'il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$l(L_1) > \dots > l(L_k) > 0 \quad \text{et} \quad L_p = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{pour tout } p \in \{k+1, \dots, m\}.$$

Exemples. • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes.

• Une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \circledast & * & * &$

Matrice échelonnée en lignes

La notion de largeur d'une ligne permet de formaliser simplement une classe particulière de matrices.

Définition (Echelonnée en lignes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée en lignes** si elle est nulle ou s'il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$l(L_1) > \dots > l(L_k) > 0 \quad \text{et} \quad L_p = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{pour tout } p \in \{k+1, \dots, m\}.$$

Exemples. • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes.

• Une matrice de la forme $\begin{pmatrix$

L'un des intérêts fondamentaux des matrices échelonnées réside dans le résultat suivant :

Proposition

Une matrice échelonnée en lignes a son rang égal à son nombre de lignes non-nulles.

Démonstration. Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. On peut supposer (sans pertes de généralités) que toutes les lignes de M sont non nulles. On note L_k la k -ème ligne de M pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $p_k \neq 0$ son pivot. Nous allons voir que la famille $\mathcal{L} := (L_1, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^m$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $S := \sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = 0_{\mathbb{K}^m}$. Le fait que M soit échelonnée en lignes nous donne $\lambda_1 p_1 = 0$

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

But. Nous allons présenter l'algorithme de Gauss sur les lignes. Celui-ci permet de construire une suite finie de matrices $A_0, \dots, A_k$ avec $A_0 := A$ et A_k échelonnée et telle que chaque A_i se déduit de A_{i-1} (avec $i \in \{1, \dots, k\}$) par des opérations élémentaires sur les lignes.

Etape 1. Puisque A est non nulle, elle admet au moins une colonne non nulle. Notons k le plus petit entier tel que C_k soit non nulle. Quitte à permuter les lignes, on se ramène au cas où $a_{k,k} \neq 0$. On multiplie alors la 1ère ligne par $1/a_{k,k}$.

1ère étape : installation du pivot

Etape 1. Puisque A est non nulle, elle admet au moins une colonne non nulle. Notons k le plus petit entier tel que C_k soit non nulle. Quitte à permuter les lignes, on se ramène au cas où $a_{k,k} \neq 0$. On multiplie alors la 1ère ligne par $1/a_{k,k}$.

Vocabulaire. Le nouveau coefficient obtenu en ligne k et en colonne k vaut donc 1 et est appelé le **1er pivot de l'élimination de Gauss**.

1ère étape : installation du pivot

Etape 1. Puisque A est non nulle, elle admet au moins une colonne non nulle. Notons k le plus petit entier tel que C_k soit non nulle. Quitte à permuter les lignes, on se ramène au cas où $a_{k,k} \neq 0$. On multiplie alors la 1ère ligne par $1/a_{k,k}$.

Vocabulaire. Le nouveau coefficient obtenu en ligne k et en colonne k vaut donc 1 et est appelé le **1er pivot de l'élimination de Gauss**.

A titre d'exemple, lorsque $k = 1$ et $a_{1,1} \neq 0$, la matrice A devient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons ici la notation traditionnelle $*$ pour désigner un élément de $\mathbb{K}$ quelconque.

En appliquant successivement les opérations

$L_{k+1} \leftarrow L_{k+1} - a_{(k+1),k} L_k, \dots, L_m \leftarrow L_m - a_{m,k} L_k$, nous faisons apparaître des zéros sous le pivot situé en place (k, k) .

En appliquant successivement les opérations

$L_{k+1} \leftarrow L_{k+1} - a_{(k+1),k} L_k, \dots, L_m \leftarrow L_m - a_{m,k} L_k$, nous faisons apparaître des zéros sous le pivot situé en place (k, k) .

A titre d'exemple, toujours avec $k = 1$ et $a_{1,1} \neq 0$, cette étape permet d'aboutir à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ à $(m-1)$ lignes et à $(n-1)$ colonnes.

On applique à la sous-matrice A' de A les deux étapes que nous venons de décrire :

- Installation d'un pivot.
- Nettoyage sous le pivot.

On applique à la sous-matrice A' de A les deux étapes que nous venons de décrire :

- Installation d'un pivot.
- Nettoyage sous le pivot.

L'algorithme s'arrête lorsque le bloc obtenu est nul ou vide : dans les deux cas, on ne trouve plus de pivot. **La dernière matrice obtenue est une matrice échelonnée.**

Exemple - Installation du 1er pivot

Nous allons appliquer l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

- La 1ère colonne étant non nulle, on procède à un échange de lignes : $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

On reproduit la dernière matrice du transparent précédent :

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

● On applique successivement : $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$A''_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

On reproduit la dernière matrice du transparent précédent :

$$A_1'' = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes sur la sous-matrice S_1 de A_1'' obtenue en supprimant la 1ère ligne et la 1ère colonne.

● **La première colonne de S_1 étant nulle, on passe directement à la colonne suivante. Le 1er élément de la deuxième colonne de S_1 étant 1, il n'y a rien à faire.**

$$A_2 = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

On reproduit la dernière matrice du transparent précédent :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

- On applique successivement : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

On reproduit la dernière matrice du transparent précédent :

$$A'_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

On applique l'algorithme de Gauss (sur les lignes) sur la sous-matrice S_2 de A'_2 obtenue en supprimant les 2 premières lignes et les 3 premières colonnes.

- **Le 1er élément de la deuxième colonne de S_2 étant 1, il n'y a rien à faire.**

$$A_3 = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

On reproduit la dernière matrice du transparent précédent :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

● On applique $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$:

$$A'_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de Gauss sur les lignes s'arrête avec l'obtention de

$$A'_3 = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les coefficients rouges désignent les **pivots** de chaque ligne.

L'algorithme de Gauss sur les lignes s'arrête avec l'obtention de

$$A'_3 = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les coefficients rouges désignent les **pivots** de chaque ligne.

On a d'une part

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} A'_1 = \operatorname{rg} A''_1 = \dots = \operatorname{rg} A'_3$$

et d'autre part on a le fait que la matrice $A'_3 \in M_{4,6}(\mathbb{R})$ est **échelonnée en lignes avec exactement trois lignes non-nulles**. On peut conclure que

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'_3 = 3.$$

On peut continuer à "nettoyer au-dessus de chaque pivot".

On peut continuer à "nettoyer au-dessus de chaque pivot". Avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ appliquée à A'_3 , on obtient une matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut continuer à "nettoyer au-dessus de chaque pivot". Avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ appliquée à A'_3 , on obtient une matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ appliquée à B_1 , on obtient une matrice B_2

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut continuer à "nettoyer au-dessus de chaque pivot". Avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ appliquée à A'_3 , on obtient une matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ appliquée à B_1 , on obtient une matrice B_2

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en arrive naturellement à la définition suivante :

Définition (Matrice échelonnée réduite)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On dit que A est **échelonnée réduite** lorsque:

- (i) A est échelonnée,
- (ii) les pivots (dans les lignes non nulles) sont égaux à 1,
- (iii) dans une colonne qui contient un pivot, il n'y a pas d'élément non nul distinct du pivot.

On en arrive naturellement à la définition suivante :

Définition (Matrice échelonnée réduite)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On dit que A est **échelonnée réduite** lorsque:

- (i) A est échelonnée,
- (ii) les pivots (dans les lignes non nulles) sont égaux à 1,
- (iii) dans une colonne qui contient un pivot, il n'y a pas d'élément non nul distinct du pivot.

Exemple. La matrice de l'exemple précédent

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

est échelonnée réduite.

On peut poursuivre avec des opérations élémentaires sur les colonnes...

Dans l'exemple précédent, nous sommes arrivés via des opérations sur les lignes à une forme échelonnée réduite

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut poursuivre avec des opérations élémentaires sur les colonnes...

Dans l'exemple précédent, nous sommes arrivés via des opérations sur les lignes à une forme échelonnée réduite

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $C_1, \dots, C_6$ les colonnes de la matrice précédente. On commence par exploiter la colonne du **dernier pivot** (en rouge ci-dessus) obtenu par l'élimination. Via $C_6 \leftarrow C_6 + 2C_4$ et $C_5 \leftarrow C_5 + 2C_4$ on obtient

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{-5} & \textcolor{blue}{-8} \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} \end{pmatrix}.$$

On va maintenant exploiter l'avant-dernier pivot (en rouge dans la matrice ci-dessus) obtenu dans l'élimination. Via $C_6 \leftarrow C_6 - 6C_3$ puis $C_5 \leftarrow C_5 - C_3$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va maintenant exploiter l'**avant-dernier pivot** (en rouge dans la matrice ci-dessus) obtenu dans l'élimination. Via $C_6 \leftarrow C_6 - 6C_3$ puis $C_5 \leftarrow C_5 - C_3$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à utiliser le **premier pivot** (en rouge dans la matrice précédente) et à effectuer $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$, $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_1$, $C_6 \leftarrow C_6 + 8C_1$ pour arriver à

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va maintenant exploiter l'**avant-dernier pivot** (en rouge dans la matrice ci-dessus) obtenu dans l'élimination. Via $C_6 \leftarrow C_6 - 6C_3$ puis $C_5 \leftarrow C_5 - C_3$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & -3 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à utiliser le **premier pivot** (en rouge dans la matrice précédente) et à effectuer $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$, $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_1$, $C_6 \leftarrow C_6 + 8C_1$ pour arriver à

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.</$$

En effectuant sur la matrice

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les opérations élémentaires $C_2 \leftrightarrow C_3$ et $C_3 \leftrightarrow C_4$, on aboutit à

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noter la structure de D_4 constituée d'une sous-matrice identité et que de zéros.

En appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -8 & 24 & -4 & 16 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

on a obtenu une matrice **échelonnée** dont les **pivots** sont marqués en rouge

$$A'_3 = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -8 & 24 & -4 & 16 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

on a obtenu une matrice **échelonnée** dont les **pivots** sont marqués en rouge

$$A'_3 = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Des opérations élémentaires sur les lignes permettent

Enfin, des opérations élémentaires sur les colonnes transforment B_4 en

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(D_4) = 3.$$

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ non nulle.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ non nulle.

- Il existe une suite finie d'opérations sur les lignes de A transformant A en une matrice échelonnée réduite.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ non nulle.

- Il existe une suite finie d'opérations sur les lignes de A transformant A en une matrice échelonnée réduite.
- Si $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une suite finie d'opérations sur les lignes et les colonnes de A et un entier $r \geq 0$ transformant A en la matrice

$$J_r := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec r correspondant au nombre de 1. On convient que J_0 est la matrice nulle.

Le dernier point du transparent précédent s'écrit encore sous la forme suivante :

Théorème

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{$

Le dernier point du transparent précédent s'écrit encore sous la forme suivante :

Théorème

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. Une matrice $M \in M_{m,n$

Multiplication matricielle et opérations sur les lignes/colonnes

Soient $n \geq 1$ un entier, $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $l \neq k$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$

On garde les notations du transparent précédent. Les trois matrices présentées Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors :

Exemples - Echanges de lignes ou colonnes

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 &$

Exemples - Echanges de lignes ou colonnes

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7$

Exemples - Multiplication par un scalaire non nul sur une ligne ou une colonne

On continue à travailler ici avec la matrice A précédente. La matrice A

Exemples - Multiplication par un scalaire non nul sur une ligne ou une colonne

On continue à travailler ici avec la matrice A

Exemples - Multiplication par un scalaire non nul sur une ligne ou une colonne

On conserve la matrice A des deux transparents précédents. Cette matrice devient sous l'action de l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$ la matrice

$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après le transparent précédent, cette opération élémentaire

s'obtient en multipliant A à gauche par $U_{1,2}[3] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ 4 &$$

Pour éviter l'introduction d'une suite finie de matrices dans l'application de l'algorithme de Gauss, nous introduisons la notion d'équivalence entre deux matrices :

Définition (Matrices équivalentes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On dit que $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes et on écrit $A \sim B$ lorsque $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Exemple. Avec les notations de l'exemple précédent, on a donc

$$A \sim A_1 \sim \dots A'_3 \sim B_1 \dots \sim B_4 \sim D_1 \dots D_4.$$

On a vu qu'une matrice est de rang r si et seulement

Notre objectif dans la suite est de comprendre comment l'algorithme de Gauss sur les lignes permet la résolution de systèmes linéaires.

Notre objectif dans la suite est de comprendre comment l'algorithme de Gauss sur les lignes permet la résolution de systèmes linéaires.

Au Chapitre 1, on a introduit les systèmes linéaires comme les ensembles de la forme

$$S := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \right\}$$

pour $m, n \geq 1$ deux entiers et pour deux familles $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Notre objectif dans la suite est de comprendre comment l'algorithme de Gauss sur les lignes permet la résolution de systèmes linéaires.

Au Chapitre 1, on a introduit les systèmes linéaires comme les ensembles de la forme

$$S := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \right\}$$

pour $m, n \geq 1$ deux entiers et pour deux familles $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Remarquons que nous pouvons considérer $M_{n,1}(\mathbb{K$

Notre objectif dans la suite est de comprendre comment l'algorithme de Gauss sur les lignes permet la résolution de systèmes linéaires.

Au Chapitre 1, on a introduit les systèmes linéaires comme les ensembles de la forme

$$S := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \right\}$$

pour $m, n \geq 1$ deux entiers et pour deux familles $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et (b_k)

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On considère deux familles $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ de $\mathbb{K}$. Remarquons que pour chaque $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\$$

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers. On considère deux familles $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ de $\mathbb{K}$. Remarquons que pour chaque $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=A$$

Avec les notations précédentes, on a

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \right\} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = b\}.$$

Avec les notations précédentes, on a

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \right\} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = b\}.$$

Définition

On appelle **matrice augmentée** associée au système linéaire ci-dessus notée $(A|b)$ la matrice donnée par

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la résolution du système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e., à déterminer explicitement l'ensemble $S := \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = b\}$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la résolution du système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e., à déterminer explicitement l'ensemble $S := \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = b\}$.

- **Etape 1.** On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice augmentée $(A|b)$ associée au système linéaire S de sorte d'obtenir une matrice augmentée $(\hat{A}|\hat{b})$.

Méthode générale de résolution d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la résolution du système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e., à déterminer explicitement l'ensemble $S := \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = b\}$.

- **Etape 1.** On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice augmentée $(A|b)$ associée au système linéaire S de sorte d'obtenir une matrice augmentée $(\hat{A}|\hat{b})$.
- **Etape 2.** Le système linéaire $S'</$

Cas 1 : Aucune ligne $\widehat{L}_1, \dots, \widehat{L}_m$ n'est nulle. Le système linéaire admet alors une unique solution ou une infinité de solution.

Cas 2 : Au moins l'une des lignes est nulle. Auquel cas, en notant k le plus petit entier tel que $\widehat{L}_k$ est nulle, on a (du fait que $\widehat{A}$ soit échelonnée) $\widehat{L}_k = \dots = \widehat{L}_m = 0$, i.e.,

$$0 = \$$

Il s'agit ici de comprendre les raisons qui garantissent l'équivalence du système linéaire initial S avec le système linéaire échelonné S' (i.e., l'étape 2). Il y en a essentiellement deux :

Il s'agit ici de comprendre les raisons qui garantissent l'équivalence du système linéaire initial S avec le système linéaire échelonné S' (i.e., l'étape 2). Il y en a essentiellement deux :

- Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Observons que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $A' \in GL_n(\mathbb{K})$,

Il s'agit ici de comprendre les raisons qui garantissent l'équivalence du système linéaire initial S avec le système linéaire échelonné S' (i.e., l'étape 2). Il y en a essentiellement deux :

- Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Observons que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $A' \in GL_n(\mathbb{K})$,

Multiplication matricielle et opérations sur les lignes/colonnes

Soient $n \geq 1$ un entier, $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $l \neq k$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On considère les matrices carrées de taille n et inversibles, appelées **matrices relatives aux opérations élémentaires** :

$$U_{\ell k} = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & \ell \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \rightarrow \\$$

On garde les notations du transparent précédent. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors :

- La matrice issue de l'opération $L_k \leftrightarrow L_l$ (resp. $C_k \leftrightarrow C_l$) sur A correspond au produit matriciel $U_{l,k}A$ (resp. $AU_{l,k}$).
- La matrice résultant de l'opération $L_l \leftarrow \lambda L_l$ (resp. $C_l \leftarrow \lambda C_l$) sur A correspond au produit matriciel $U_l[\lambda]A$

Nous venons de voir que toute matrice M de rang r s'écrit $M = QJ_rP$ avec Q et P des produits de matrices relatives aux opérations élémentaires.

Lorsque M est inversible, J_r n'est nulle autre que l'identité et nous obtenons alors l'intéressant résultat ci-dessous :

⁵En théorie des groupes, vous verrez que ce résultat signifie que $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par des matrices élémentaires.

Nous venons de voir que toute matrice M de rang r s'écrit $M = QJ_rP$ avec Q et P des produits de matrices relatives aux opérations élémentaires.

Lorsque M est inversible, J_r n'est nulle autre que l'identité et nous obtenons alors l'intéressant résultat ci-dessous :

Corollaire

Toute matrice inversible s'éc

On s'intéresse à l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ satisfaisant

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 + 7x_5 = 10. \end{cases}$$

Un premier exemple

On s'intéresse à l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ satisfaisant

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 + 7x_5 = 10. \end{cases}$$

Nous introduisons la matrice augmentée associée à ce système linéaire

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nous introduisons la matrice augmentée associée à ce système linéaire

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 &$$

Nous savons alors que le système étudié est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 =$$

On isole alors les inconnues qui correspondent aux pivots : pour tout $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$, on a l'équivalence

$$\begin{cases} x_1 -$$

Un premier exemple : suite

On isole alors les inconnues qui correspondent aux pivots : pour tout $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$, on a l'équivalence

Un deuxième exemple : suite et fin

L'ensemble S s'écrit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -8 + 3x_2 + 5x_5 \\ x_2 \\ 6 - x_5 \\ -$$

Un premier exemple

Nous allons résoudre le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x + 2y + z =$$

Appliquons l'algorithme de Gauss sur les lignes. On note L_1 , L_2 et L_3 les lignes de la matrice augmentée B .

Appliquons l'algorithme de Gauss sur les lignes. On note L_1, L_2 et L_3 les lignes de la matrice augmentée B .

Appliquons l'algorithme de Gauss sur les lignes. On note L_1, L_2 et L_3 les lignes de la matrice augmentée B .

- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, il vient

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 &$$

Appliquons l'algorithme de Gauss sur les lignes. On note L_1, L_2 et L_3 les lignes de la matrice augmentée B .

- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, il vient

$$B \sim \begin{pmatrix}$$

On cherche maintenant à faire apparaître des 0 au dessus de chaque pivot, i.e., à obtenir la forme échelonnée réduite de B .

On applique successivement $L_2 \leftarrow L_2 - (5/8)L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et enfin $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ pour aboutir à

$$B \sim \begin$$

Solution générale d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. On a vu que l'ensemble

$$S_0 = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}$$

(qui correspond à un système linéaire homogène) est un sous-espace vectoriel de M_{n

Solution générale d'un système linéaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. On a vu que l'ensemble

$$S_0 = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}$$

Supposons que $S \neq \emptyset$.

Soit $X_0 \in S$, i.e., $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $AX_0 = b$. Etant donné $X \in S_0$, on a $AX = 0$ puis $A(X + X_0) = AX + AX_0 = b</$

Nous allons voir qu'inverser une matrice est étroitement lié à la résolution de systèmes linéaires.

Nous allons voir qu'inverser une matrice est étroitement lié à la résolution de systèmes linéaires.

Soient $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. **On s'intéresse au calcul explicite de l'inverse A^{-1} de <**

Inverser une matrice en pratique

Nous allons voir qu'inverser une matrice est étroitement lié à la résolution de systèmes linéaires.

Soient $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. **On s'intéresse au calcul explicite de l'inverse A^{-1} de A (lorsqu'il existe !).**

Remarquons que si A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, d'inverse $A^{-1} = (b_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$, alors on a pour chaque $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n. \end{cases}$$

Supposons A inversible. Ce qui précède nous dit que pour déterminer de manière pratique A^{-1} , on peut fixer $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et résoudre le système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$(\mathcal{L}_{(y_1, \dots, y_n)}) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n. \end{array} \right.$$

Inverser une matrice en pratique : suite

Supposons A inversible. Ce qui précède nous dit que pour déterminer de manière pratique A^{-1} , on peut fixer $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et résoudre le système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$(\mathcal{L}_{(y_1, \dots, y_n)}) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n. \end{array} \right.$$

Par inversibilité de A , ce dernier système a une unique solution. De plus, cette

solution s'écrit
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n \end{array} \right. \quad \text{pour une certaine famille } (b_{p,q})_{1 \leq p, q \leq n}$$

d'éléments $\mathbb{K}$. Cette famille constitue la famille des coefficients de A^{-1} , i.e.,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Reprenons l'écriture du transparent précédent (toujours en supposant A inversible)

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n. \end{cases}$$

Remarquons qu'avec le choix de $(y_1, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$, nous obtenons $b_{11}, \dots, b_{n1}$ qui sont les coefficients de la première colonne de A^{-1} .

De même, avec le choix de $(y_1, \dots, y_n) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, nous obtenons les coefficients de la deuxième colonne de A^{-1} .

Avec le choix de $(y_1, \dots, y_n) = e_k$ où e_k est le k -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, nous obtenons les coefficients de la k -ième colonne.

Ainsi, déterminer A^{-1} revient à résoudre les n -systèmes linéaires $\mathcal{S}_{e_1}, \dots, \mathcal{S}_{e_n}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Et réciproquement ?

Réciproquement, si pour chaque $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $\mathcal{S}_{(y_1, \dots, y_n)}$ d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ présenté dans le transparent précédent a une unique solution, alors A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

Et réciproquement ?

Réciproquement, si pour chaque $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $\mathcal{S}_{(y_1, \dots, y_n)}$ d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ présenté dans le transparent précédent a une unique solution, alors A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

En effet, notons $(b_{11}, \dots, b_{n1})$ l'unique solution du système linéaire $\mathcal{S}_{(1, 0, \dots, 0)}$. On a

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en particulier } a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1.$$

Et réciproquement ?

Réciproquement, si pour chaque $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $\mathcal{S}_{(y_1, \dots, y_n)}$ d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ présenté dans le transparent précédent a une unique solution, alors A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

En effet, notons $(b_{11}, \dots, b_{n1})$ l'unique solution du système linéaire $\mathcal{S}_{(1, 0, \dots, 0)}$. On a

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en particulier } a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1.$$

On procède de même avec les autres vecteurs de la base canonique

$$(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \text{ pour obtenir des vecteurs } \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{II}$$

reste alors à voir que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Pour inverser A , on a vu qu'il fallait résoudre les systèmes linéaires $AX = e_1^T$, $AX = e_2^T, \dots, AX = e_n^T$ avec $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Ces systèmes linéaires peuvent être résolus à travers les matrices augmentées $(A|e_1^T), (A|e_2^T), \dots, (A|e_n^T)$ et l'algorithme de Gauss sur les lignes. Plutôt que de mener n fois les mêmes opérations élémentaires sur les lignes/colonnes de A , nous introduisons la matrice augmentée de n -colonnes

$$(A|e_1^T | \dots | e_n^T) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous savons donner

N

Soient $n \geq 1$ un entier

Matrice de passage

Soient

Matrice de passage

Déterminants

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

- Savoir définir le déterminant d'une matrice en taille quelconque et connaître les propriétés de la fonction déterminant : multilinéarité, transposée, produit, inverse,...
- Maîtriser le développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne.
- Savoir appliquer les formules de Cramer.
- Déterminer une comatrice.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On a vu au Chapitre 2 que la quantité $ad - bc$ permettait de caractériser l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Rappelons en effet que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Si tel est le cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On a vu au Chapitre 2 que la quantité $ad - bc$ permettait de caractériser l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Rappelons en effet que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Si tel est le cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse naturellement à de possibles extensions de ce résultat en taille > 2 . Ceci va nous demander d'introduire l'un des outils les plus fondamentaux de toute l'algèbre : le **groupe symétrique**.

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

Soit $n \geq 1$ un entier. Par souci de concision, on note $E_n := \{1, \dots, n\}$.

Définition

On appelle **permutation** de E_n toute fonction $f : E_n \rightarrow E_n$ bijective, i.e., telle que pour chaque $l \in E_n$, il existe un et un seul $k \in E_n$ tel que $f(k) = l$. L'ensemble des permutations de E_n est appelé **groupe symétrique d'ordre n** et est noté $\mathfrak{S}_n$.

Soit $n \geq 1$ un entier. Par souci de concision, on note $E_n := \{1, \dots, n\}$.

Définition

On appelle **permutation** de E_n toute fonction $f : E_n \rightarrow E_n$ bijective, i.e., telle que pour chaque $l \in E_n$, il existe un et un seul $k \in E_n$ tel que $f(k) = l$. L'ensemble des permutations de E_n est appelé **groupe symétrique d'ordre n** et est noté $\mathfrak{S}_n$.

Exemple. La fonction $f : E_5 \rightarrow E_5$ définie par

$$f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 4 \quad \text{et} \quad f(5) = 3.$$

est une permutation de E_5 .

Soit $n \geq 1$ un entier. Par souci de concision, on note $E_n := \{1, \dots, n\}$.

Définition

On appelle **permutation** de E_n toute fonction $f : E_n \rightarrow E_n$ bijective, i.e., telle que pour chaque $l \in E_n$, il existe un et un seul $k \in E_n$ tel que $f(k) = l$. L'ensemble des permutations de E_n est appelé **groupe symétrique d'ordre n** et est noté $\mathfrak{S}_n$.

Exemple. La fonction $f : E_5 \rightarrow E_5$ définie par

$$f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 4 \quad \text{et} \quad f(5) = 3.$$

est une permutation de E_5 .

Remarque. On peut montrer (mais cela ne sera pas utile dans la suite) qu'une fonction $f : E_n \rightarrow E_n$ est une permutation si et seulement si elle est injective (resp. surjective). ■

Soit $n \geq 1$ est un entier.

⁶On utilise traditionnellement des lettres de l'alphabet grec pour noter les permutations

Soit $n \geq 1$ est un entier.

- Signalons qu'un dénombrement élémentaire montre (POURQUOI?) qu'il y a exactement $n! := 1 \times 2 \times \dots \times n$ permutations de E_n .

⁶On utilise traditionnellement des lettres de l'alphabet grec pour noter les permutations

Nombres et notation matricielle des permutations de $\{1, \dots, n\}$

Soit $n \geq 1$ est un entier.

- Signalons qu'un dénombrement élémentaire montre (**POURQUOI?**) qu'il y a exactement $n! := 1 \times 2 \times \dots \times n$ permutations de E_n .
- Considérons une permutation $\sigma : E_n \rightarrow E_n$ ⁶. Le caractère fini de l'ensemble E_n et la lourdeur des écritures $\sigma(1) = \dots$, $\sigma(2) = \dots$ conduisent à noter σ de manière matricielle comme suit

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple. La permutation $\sigma : E_3 \rightarrow E_3$ définie par

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3 \quad \text{et} \quad \sigma(3) = 1$$

est notée

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

⁶On utilise traditionnellement des lettres de l'alphabet grec pour noter les permutations

Soit $n \geq 1$ un entier. Etant données deux permutations σ, τ de $E_n = \{1, \dots, n\}$, on vérifie sans peine que la composition $\sigma \circ \tau$ est encore une permutation de E_n .

La notation matricielle introduite dans le transparent précédent est très commode pour déterminer l'expression de la composée $\sigma \circ \tau$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \tau(k) = k' & \dots & n \\ & & & \sigma(k') & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(k) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ & & & \sigma(k') & & \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition (Inversion)

Soient $n \geq 1$ un entier et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** de σ tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions de σ est noté $I(\sigma)$.

Exemple. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ possède exactement 5 inversions.

Définition (Inversion)

Soient $n \geq 1$ un entier et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** de σ tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions de σ est noté $I(\sigma)$.

Exemple. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ possède exactement 5 inversions.

Définition (Signature)

Soient $n \geq 1$ un entier et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **signature** de σ l'entier $(-1)^{I(\sigma)}$.

Exemple. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est de signature 1 car elle possède exactement 4 inversions.

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

Nous pouvons maintenant introduire la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $(a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} = A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de la matrice A l'élément de $\mathbb{K}$

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Nous pouvons maintenant introduire la définition suivante :

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $(a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} = A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de la matrice A l'élément de $\mathbb{K}$

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarques.

- On note parfois $|A|$ en lieu et place de $\det(A)$: cette notation rentrant en conflit avec la valeur absolue/le module, nous veillerons à ne pas l'utiliser.
- Cette expression du déterminant fait intervenir $n!$ produits de n termes ce qui la rend en pratique inutilisable même pour de "petites" valeurs de n .

Nous commençons notre étude des déterminants avec l'invariance par transposition :

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Nous commençons notre étude des déterminants avec l'invariance par transposition :

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Démonstration. C'est évident en exploitant le fait que la signature d'une permutation est égale à celle de son inverse. ■

Nous commençons notre étude des déterminants avec l'invariance par transposition :

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Démonstration. C'est évident en exploitant le fait que la signature d'une permutation est égale à celle de son inverse. ■

Conséquence. Nous pouvons nous contenter de développer les propriétés du déterminant sur les lignes ou sur les colonnes.

- Soient $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ est constitué de deux permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit tout de suite que $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$.

- Soient $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ est constitué de deux permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit tout de suite que $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$.

La définition du déterminant donne alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon(\sigma_1) a_{\sigma_1(1),1} a_{\sigma_1(2),2} + \varepsilon(\sigma_2) a_{\sigma_2(1),1} a_{\sigma_2(2),2} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}. \end{aligned}$$

Considérons deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle *parallélogramme* engendré par u et v l'ensemble

$$\mathcal{P} := \{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} : \alpha, \beta \in [0, 1]\}.$$

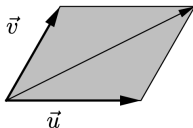


Figure 5: Parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Des considérations géométriques élémentaires montrent que l'aire $\mathcal{A}$ de ce parallélogramme $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{A} = |x_1 y_2 - y_1 x_2| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

- Soient $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ contient six permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont de signature 1 et

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui sont de signature -1 .

- Soient $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ contient six permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont de signature 1 et

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui sont de signature -1 .

Par définition, on a

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} \\ & - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}. \end{aligned}$$

Considérons trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ et de $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$.
On appelle *parallélépipède* engendré par u , v et w l'ensemble

$$\mathcal{P} := \{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} : \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}.$$

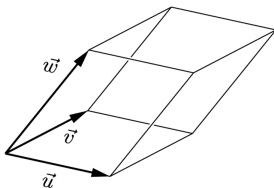


Figure 6: Parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Des considérations géométriques élémentaires montrent que le volume $\mathcal{V}$ de ce parallélépipède $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{V} = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

Fonction déterminant sur l'espace des colonnes

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .
Commençons par signaler qu'il est souvent commode de noter

$$\det(C_1 | \dots | C_n) := \det(A).$$

Etant donné un entier $k \in \{1, \dots, n\}$, la notation précédente nous permet de considérer la fonction $d_{A,k} : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$d_{A,k}(X) := d(C_1 | \dots | C_{k-1} | X | C_{k+1} | \dots | C_n) \quad \text{pour tout } X \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Fonction déterminant sur l'espace des colonnes

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .
Commençons par signaler qu'il est souvent commode de noter

$$\det(C_1 | \dots | C_n) := \det(A).$$

Etant donné un entier $k \in \{1, \dots, n\}$, la notation précédente nous permet de considérer la fonction $d_{A,k} : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$d_{A,k}(X) := d(C_1 | \dots | C_{k-1} | X | C_{k+1} | \dots | C_n) \quad \text{pour tout } X \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, on a pour tout $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$,

$$d_{A,2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 7 \\ 2 & x_2 & 8 \\ 3 & x_3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est multilinéaire alterné

La proposition suivante garantit la linéarité de $d_{A,k}$ à k fixé.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier. Ont lieu :

(i) Pour tout $C, C' \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et

$$\begin{aligned} & \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | \lambda C + \mu C' | C_{k+1} | \dots | C_n) \\ &= \lambda \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C | C_{k+1} | \dots | C_n) + \mu \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C' | C_{k+1} | \dots | C_n). \end{aligned}$$

(ii) Soient $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = 0$$

dès lors que $C_k = C_l$ pour deux entiers $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq l$.

Le déterminant est multilinéaire alterné

La proposition suivante garantit la linéarité de $d_{A,k}$ à k fixé.

Proposition

Soient $n \geq 1$ un entier. On a :

(i) Pour tout $C, C' \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et

$$\begin{aligned} & \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | \lambda C + \mu C' | C_{k+1} | \dots | C_n) \\ &= \lambda \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C | C_{k+1} | \dots | C_n) + \mu \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C' | C_{k+1} | \dots | C_n). \end{aligned}$$

(ii) Soient $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = 0$$

dès lors que $C_k = C_l$ pour deux entiers $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq l$.

On résume souvent ces deux propriétés en disant que le déterminant est **multilinéaire alterné en les colonnes**. Notons que (i) peut s'écrire :

(i') Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $d_{A,k} : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire, i.e., pour tout $C, C' \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et

$$d_{A,k}(\lambda C + \mu C') = \lambda d_{A,k}(C) + \mu d_{A,k}(C').$$

Démonstration. (i) C'est immédiat en revenant à la définition du déterminant.

(ii) Soient $k, l \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $C_k = C_l$. On note τ l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui permute k et l et fixe tous les autres. Observons que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma \circ \tau(1),1} \dots a_{\sigma \circ \tau(n),n} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma).$$

Il suffit alors d'écrire

$$\begin{aligned} \det(C_1 | \dots | C_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} -\varepsilon(\sigma \circ \tau) a_{\sigma \circ \tau(1),1} \dots a_{\sigma \circ \tau(n),n} \\ &= -\det(C_1 | \dots | C_n) \end{aligned}$$

pour obtenir l'égalité souhaitée. ■

- Le point (ii) de la proposition précédente est clair : il exprime qu'une matrice qui a (au moins) deux colonnes identiques a un déterminant nul.

Exemple. Sans aucun calcul, on a tout de suite

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Notez au passage que la matrice ci-dessus n'est pas inversible (elle est de rang 2).

- Le point (ii) de la proposition précédente est clair : il exprime qu'une matrice qui a (au moins) deux colonnes identiques a un déterminant nul.

Exemple. Sans aucun calcul, on a tout de suite

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Notez au passage que la matrice ci-dessus n'est pas inversible (elle est de rang 2).

- Le point (i) est source de confusions. Le déterminant **N'EST PAS** linéaire. Ceci s'observe dès la taille avec 2 avec par exemple :

$$0 = \det(I_2 + (-I_2)) \neq \det(I_2) + \det(-I_2) = 2$$

ou encore

$$\det(3I_2) = 9 \neq 3\det(I_2) = 3.$$

Le point (i) n'exprime donc pas une propriété de linéarité du déterminant. Elle exprime en fait une linéarité par rapport à une colonne fixée : c'est l'objet du transparent suivant.

La propriété (i) nous assure que la fonction $\varphi : M_{3,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K}).$$

est linéaire. Ce n'est pas surprenant : un calcul élémentaire montre en effet que

$$\varphi((x, y, z)^T) = 2x - y - z \quad \text{pour tout } x, y, z \in \mathbb{K}.$$

La propriété (i) nous assure que la fonction $\varphi : M_{3,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{K}).$$

est linéaire. Ce n'est pas surprenant : un calcul élémentaire montre en effet que

$$\varphi((x, y, z)^T) = 2x - y - z \quad \text{pour tout } x, y, z \in \mathbb{K}.$$

La linéarité de φ permet d'écrire par exemple

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \varphi \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\varphi \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit par

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient $n \geq 1$, $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(i) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\det(C_{\sigma(1)} | \dots | C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1 | \dots | C_n).$$

(ii) Si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée, alors

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = 0.$$

(iii) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, pour toute famille $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq n, l \neq k}$ de $\mathbb{K}$, on a

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C_k + \sum_{l \neq k} \lambda_l C_l | C_{k+1} | \dots | C_n).$$

Proposition

Soient $n \geq 1$, $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(i) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\det(C_{\sigma(1)} | \dots | C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1 | \dots | C_n).$$

(ii) Si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée, alors

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = 0.$$

(iii) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, pour toute famille $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq n, l \neq k}$ de $\mathbb{K}$, on a

$$\det(C_1 | \dots | C_n) = \det(C_1 | \dots | C_{k-1} | C_k + \sum_{l \neq k} \lambda_l C_l | C_{k+1} | \dots | C_n).$$

La propriété (iii) peut s'écrire comme (iii') :

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et pour toute famille $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq n, l \neq k}$ de $\mathbb{K}$, on a

$$d_{A,k}(C_k + \sum_{l \neq k} \lambda_l C_l) = d_{A,k}(C_k).$$

Démonstration. Les points (ii) et (iii) découlent de (i) et du caractère multilinéaire du déterminant.

(i) On procède en deux temps ici. On montre tout d'abord (grâce à la proposition précédente) le résultat pour les transpositions (i.e., pour les éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui échangent deux éléments et qui fixent les autres). Le cas général s'obtient en remarquant que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est le produit de transpositions. ■

- Le point (i) est clair : il exprime le fait que le déterminant est invariant au signe près par permutations des colonnes.

- Le point (i) est clair : il exprime le fait que le déterminant est invariant au signe près par permutations des colonnes.
- La propriété (ii) est également claire : une matrice possédant une colonne combinaison linéaire des autres a un déterminant nul.

- Le point (i) est clair : il exprime le fait que le déterminant est invariant au signe près par permutations des colonnes.
- La propriété (ii) est également claire : une matrice possédant une colonne combinaison linéaire des autres a un déterminant nul.
- L'égalité donnée par (iii) se traduit par le fait que le déterminant d'une matrice est inchangé lorsque l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Le point (iii) évoqué ci-dessus est **fondamental en pratique**. Essentiellement, il s'agit de faire apparaître un "grand nombre de zéros" dans le déterminant que l'on cherche à calculer. Cette approche est souvent combinée avec le développement selon une ligne ou une colonne (voir plus loin).

Le point (iii) évoqué ci-dessus est **fondamental en pratique**. Essentiellement, il s'agit de faire apparaître un "grand nombre de zéros" dans le déterminant que l'on cherche à calculer. Cette approche est souvent combinée avec le développement selon une ligne ou une colonne (voir plus loin).

A ce stade, nous pouvons voir que le point (iii) permet de faire apparaître (le cas échéant) des relations de liaison sur les lignes ou les colonnes. On peut alors conclure avec (ii). A titre d'exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = 0.$$

Une application de (ii) : équation cartésienne d'un hyperplan

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_{n-1})$ une **famille libre** de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $H := \text{vect} \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Nous allons voir que le déterminant permet d'obtenir une équation cartésienne de H , i.e., $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}.$$

Une application de (ii) : équation cartésienne d'un hyperplan

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_{n-1})$ une **famille libre** de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $H := \text{vect} \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Nous allons voir que le déterminant permet d'obtenir une équation cartésienne de H , i.e., $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}.$$

Notons pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $(v_{1,k}, \dots, v_{n,k})$ les coordonnées de v_k dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et posons $V = (v_{p,q})_{1 \leq p, q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

Une application de (ii) : équation cartésienne d'un hyperplan

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_{n-1})$ une **famille libre** de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $H := \text{vect} \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Nous allons voir que le déterminant permet d'obtenir une équation cartésienne de H , i.e., $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}.$$

Notons pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $(v_{1,k}, \dots, v_{n,k})$ les coordonnées de v_k dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et posons $V = (v_{p,q})_{1 \leq p, q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. Il suffit alors d'observer pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \in H \Leftrightarrow \det(x^T | v_1^T | \dots | v_n^T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & v_{1,1} & \dots & v_{1,n} \\ x_2 & v_{2,1} & \dots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & v_{n,1} & \dots & v_{n,n} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k (-1)^{k+1} \det(V(k, 1)) = 0$$

et de poser pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k := (-1)^{k+1} \det(V(k, 1))$ pour conclure.

Un exemple

Déterminons un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-1, 3, 2)$.

Un exemple

Déterminons un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-1, 3, 2)$.

On commence par constater que (u, v) est une **famille libre**.

Un exemple

Déterminons un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-1, 3, 2)$.

On commence par constater que (u, v) est une **famille libre**.

On écrit dans un second temps, les équivalences valides pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) \in \text{vect}\{u, v\} \Leftrightarrow ((x, y, z), u, v) \text{ est une famille liée.}$$

$$\Leftrightarrow ((x, y, z), u, v) \text{ est de rang } < 3.$$

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} < 3$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 7z = 0.$$

Un exemple

Déterminons un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-1, 3, 2)$.

On commence par constater que (u, v) est une **famille libre**.

On écrit dans un second temps, les équivalences valides pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) \in \text{vect}\{u, v\} \Leftrightarrow ((x, y, z), u, v) \text{ est une famille liée.}$$

$$\Leftrightarrow ((x, y, z), u, v) \text{ est de rang } < 3.$$

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} < 3$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 7z = 0.$$

On conclut que l'hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + 7z = 0\}$$

convient.

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- **Produit et inverse**
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

Le déterminant est compatible avec le produit matriciel au sens suivant :

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Cas 1 : $\text{rg}(B) < n$. Dans ce cas, on a $\det(B) = 0$. D'autre part, nous savons que les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B . Il s'ensuit que les lignes de AB sont liées, en particulier $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$.

Cas 1 : $\text{rg}(B) < n$. Dans ce cas, on a $\det(B) = 0$. D'autre part, nous savons que les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B . Il s'ensuit que les lignes de AB sont liées, en particulier $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$.

Cas 2 : $\text{rg}(B) = n$. Dans ce cas, nous savons que B est inversible et qu'elle s'écrit comme un produit (fini) de matrices (relatives aux opérations) élémentaires. Sans pertes de généralités, nous pouvons directement supposer que B est une matrice élémentaire.

Cas 1 : $\text{rg}(B) < n$. Dans ce cas, on a $\det(B) = 0$. D'autre part, nous savons que les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B . Il s'ensuit que les lignes de AB sont liées, en particulier $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$.

Cas 2 : $\text{rg}(B) = n$. Dans ce cas, nous savons que B est inversible et qu'elle s'écrit comme un produit (fini) de matrices (relatives aux opérations) élémentaires. Sans pertes de généralités, nous pouvons directement supposer que B est une matrice élémentaire.

- (i) Si $B = U_{lk}$ pour un certain couple d'entiers distincts (l, k) , alors AU_{lk} s'obtient en échangeant deux colonnes de A . Il vient alors $\det(AB) = -\det(A)$.
- (ii) Si $B = U_l[\lambda]$ pour un certain entier l et un scalaire λ , alors $AU_l[\lambda]$ s'obtient en multipliant une colonne de A par λ . Il s'ensuit $\det(AB) = \lambda \det(A)$.
- (iii) Si $B = U_{lk}[\mu]$ pour un couple d'entiers distincts (l, k) et un scalaire μ , alors $AU_{lk}[\mu]$ s'obtient en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre. On conclut alors que $\det(AB) = \det(A)$.

Dans les trois sous-cas ci-dessus, nous avons bien la relation voulue, à savoir $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Ceci termine la démonstration. ■

Nous allons déduire du théorème précédent une nouvelle caractérisation des matrices inversibles.

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(a) La matrice A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si son déterminant est non nul, i.e.,

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

(b) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Nous allons déduire du théorème précédent une nouvelle caractérisation des matrices inversibles.

Corollaire

Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(a) La matrice A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si son déterminant est non nul, i.e.,

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

(b) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Démonstration. (a) $\Rightarrow$, Supposons que A soit inversible. On a alors $\det(I_n) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$, en particulier $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$, Supposons que $\det(A) \neq 0$. Si A n'est pas inversible, alors la famille des colonnes de A notée $(C_1, \dots, C_n)$ est liée et ceci entraîne $\det(C_1 | \dots | C_n) = \det(A) = 0$.

(b) La formule voulue a été obtenue dans la preuve de l'implication $\Rightarrow$ ci-dessus. ■

- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

Nous allons maintenant présenter un moyen pratique permettant de calculer un déterminant.

Nous allons maintenant présenter un moyen pratique permettant de calculer un déterminant.

Soit $n \geq 2$ un entier. Etant donnés $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $A(i, j) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Nous allons maintenant présenter un moyen pratique permettant de calculer un déterminant.

Soit $n \geq 2$ un entier. Etant donnés $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $A(i, j) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

Théorème

Soient $n \geq 2$ entier et $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = A \in M_n(\mathbb{K})$. Ont lieu :

(i) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a la formule dite de **développement suivant la j -ième colonne**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i, j)).$$

(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a la formule dite de **développement suivant la i -ième ligne**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i, j)).$$

Il est clair que (ii) se déduit de (i) par transposition. Observons également (quitte à permuter les colonnes de A) qu'il suffit d'établir l'égalité voulue pour $j = 1$. Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $\mathfrak{S}_n(i) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(1) = i\}$. Commençons par noter que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n(i)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n(i)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Fixons pour un moment $i \in \{1, \dots, n\}$ et introduisons la matrice

$$A''_{i1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On a sans difficultés

$$\det A''_{i1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n(i)} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

D'autre part, on a $\det A''_{i1} = (-1)^{i-1} \det A'_{i1}$ avec

$$A'_{i1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

En notant $A'_{i1} = (a'_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$, il vient

$$\det A'_{i1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n(i)} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(2),2} \dots a'_{\sigma(n),n}.$$

Maintenant, remarquons que tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n(1)$ induit une permutation τ de $\{1, \dots, n-1\}$ de même signature. Ceci permet d'écrire

$$\det A'_{i1} = \det A(i, 1),$$

avec $A(i, 1)$ la sous-matrice de A obtenue par suppression de la 1ère ligne et de la 1ère colonne. On aboutit alors à

$$\det A''_{i1} = (-1)^{i-1} \det A_{i1}.$$

Il reste à revenir à (4) pour conclure que

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i1} \det A(i, 1).$$



Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la **1ère ligne** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la **1ère ligne** :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le déterminant de A est égal à

$$(-1)^{1+1} \times \mathbf{1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times \mathbf{2} \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \times \mathbf{3} \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la **1ère ligne** :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le déterminant de A est égal à

$$(-1)^{1+1} \times \mathbf{1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times \mathbf{2} \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \times \mathbf{3} \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observer que le déterminant précédent (qui par définition est une somme de 6 termes !) est la somme de trois termes chacun étant le produit des termes suivants :

- Le coefficient $a_{1,k}$.
- l'exposant $1+k$ dans $(-1)^{1+k}$ qui n'est nul autre que la position du coefficient $\mathbf{a_{1,k}}$ dans la matrice.
- La sous-matrice $A(1, k)$ obtenue en supprimant la 1ère ligne et la k -ème colonne.

Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la 3ème colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la 3ème colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le déterminant de A est égal à

$$(-1)^{1+3} \times 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \times 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \times 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Nous allons calculer le déterminant de la matrice suivante via un développement selon la **3ème colonne** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & \mathbf{6} \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le déterminant de A est égal à

$$(-1)^{1+3} \times \mathbf{3} \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \times \mathbf{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \times \mathbf{9} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observer que le déterminant précédent (qui par définition est une somme de 6 termes !) est la somme de trois termes chacun étant le produit des termes suivants :

- Le coefficient $a_{l,3}$.
- l'exposant $l+3$ dans $(-1)^{l+3}$ qui n'est nul autre que la position du coefficient $\mathbf{a_{l,3}}$ dans la matrice.
- La sous-matrice $A(l,3)$ obtenue en supprimant la l -ème ligne et la 3-ème colonne.

Le titre est explicite : il est intéressant de développer selon une ligne ou une colonne possédant des zéros !

Considérons la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

En développant suivant la 2^{ème} colonne, nous obtenons :

$$\det(B) = (-1)^{1+2} \times 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 + 0 = -2(28 - 30) = 4.$$

Un déterminant fondamental : le cas des matrices triangulaires

Compte-tenu des propriétés du déterminant, on s'intéresse naturellement au déterminant d'une matrice triangulaire.

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit des coefficients diagonaux

En d'autres termes, pour tout entier $n \geq 2$ et tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on a

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & * & * & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_n \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n a_k,$$

où les $*$ désignent comme de coutume des scalaires quelconques.

Soient $n \geq 2$, $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On note

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$ avec $\sigma_0 \neq \text{Id}$. Par l'absurde, supposons que $\sigma_0(k) \geq k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $\sigma_0 \neq \text{Id}$, il existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_0(l) \neq l$. Par hypothèse, on a donc $\sigma_0(l) > l$ puis

$$\{\sigma_0(l), \dots, \sigma_0(n)\} \subset \{l+1, \dots, n\}.$$

Cette dernière inclusion est absurde car elle entraîne en particulier $n - l + 1 \leq n - (l+1) + 1 = n - l$. Il s'ensuit qu'il existe $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_0(k_0) < k_0$. Il reste à remarquer que le caractère triangulaire supérieur de A donne $a_{k_0 \sigma_0(k_0)} = 0$ puis

$$a_{1\sigma_0(1)} \dots a_{n\sigma_0(n)} = 0.$$

On conclut que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \dots a_{nn}.$$

Un grand nombre de calculs de déterminants font appel au résultat suivant.

Proposition (Déterminant de Vandermonde)

Soit $n \geq 2$ un entier. Pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k).$$

Démonstration. Par récurrence (voir TD).



- Les objectifs
- Groupe symétrique
- Définition et interprétation géométrique
- Multilinéarité
- Produit et inverse
- Développement par rapport à une ligne et/ou à une colonne
- Règles de Cramer et comatrices

La résolution d'un système linéaire de taille $n \times n$ peut se ramener à un calcul de n déterminants de taille $n - 1$. Soulignons ici que les formules ci-dessous **ne sont intéressantes en pratique que pour $n = 2, 3$** .

Formules de Cramer

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, le vecteur

$$X_C := \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(b|C_2| \dots |C_n) \\ \vdots \\ \det(C_1| \dots |C_{n-1}|b) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

est l'unique solution du système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. ■

La résolution d'un système linéaire de taille $n \times n$ peut se ramener à un calcul de n déterminants de taille $n - 1$. Soulignons ici que les formules ci-dessous **ne sont intéressantes en pratique que pour $n = 2, 3$** .

Formules de Cramer

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, le vecteur

$$X_C := \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(b|C_2| \dots |C_n) \\ \vdots \\ \det(C_1| \dots |C_{n-1}|b) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

est l'unique solution du système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. ■

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution provient du caractère inversible de A . Notons cette solution $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. En observant que

$$b = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$$

on a tout de suite l'expression voulue, à savoir

$$\det(b|C_2| \dots |C_n) = x_1 \det(A), \dots, \det(C_1| \dots |C_{n-1}|b) = x_n \det(A).$$

Un exemple

Etant donnés $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = b_2, \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Un exemple

Etant donnés $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = b_2, \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nous pouvons appliquer les formules de Cramer puisque

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Un exemple

Etant donnés $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = b_2, \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nous pouvons appliquer les formules de Cramer puisque

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

L'unique solution du système linéaire ci-dessus est donnée par

$$\frac{1}{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \left(\det \begin{pmatrix} b_1 & 2 \\ b_2 & 3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 3 & b_1 \\ 4 & b_2 \end{pmatrix} \right) = (3b_1 - 2b_2, 3b_2 - 4b_1).$$

Pour terminer, nous allons voir que l'inverse d'une matrice peut s'obtenir à travers divers calculs de déterminants.

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$ entier et pour un couple (i, j) de $\{1, \dots, n\}$, on note $A(i, j)$ la sous-matrice de A obtenue par suppression de la i -ème ligne et de la j -ème colonne.

Définition (Comatrice)

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A , notée $\text{com}(A)$, la matrice de taille $n \times n$ dont le coefficient en ligne i et en colonne j est donné par $(-1)^{i+j} \det(A(i, j))$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par définition de la comatrice, on a

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par définition de la comatrice, on a

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Notons que si $\det(A) \neq 0$, on a

$$\frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Pour $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq 3} \in M_3(\mathbb{K})$, on a

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Deux relations fondamentales vérifiées par la comatrice

On a le résultat suivant pour toute matrice (pas nécessairement inversible !) :

Théorème

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. On note $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$. Nous allons établir que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Deux relations fondamentales vérifiées par la comatrice

On a le résultat suivant pour toute matrice (pas nécessairement inversible !) :

Théorème

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. On note $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$. Nous allons établir que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Soit $(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ fixé. Notons L_p la p -ième ligne de A et C_q la q -ème colonne de $B := \operatorname{com}(A)^T$. Par définition de A et de B , on a

$$L_p C_q = \sum_{k=1}^n a_{pk} (-1)^{q+k} \det A(q, k).$$

Deux relations fondamentales vérifiées par la comatrice

On a le résultat suivant pour toute matrice (pas nécessairement inversible !) :

Théorème

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. On note $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$. Nous allons établir que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Soit $(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ fixé. Notons L_p la p -ième ligne de A et C_q la q -ème colonne de $B := \operatorname{com}(A)^T$. Par définition de A et de B , on a

$$L_p C_q = \sum_{k=1}^n a_{pk} (-1)^{q+k} \det A(q, k).$$

Si $p = q$, la formule du développement du déterminant nous donne $L_p C_p = \det(A)$.

Deux relations fondamentales vérifiées par la comatrice

On a le résultat suivant pour toute matrice (pas nécessairement inversible !) :

Théorème

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. On note $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$. Nous allons établir que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Soit $(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ fixé. Notons L_p la p -ième ligne de A et C_q la q -ème colonne de $B := \operatorname{com}(A)^T$. Par définition de A et de B , on a

$$L_p C_q = \sum_{k=1}^n a_{pk} (-1)^{q+k} \det A(q, k).$$

Si $p = q$, la formule du développement du déterminant nous donne $L_p C_p = \det(A)$. Si $p \neq q$, on considère la matrice A' obtenue à partir de A en remplaçant sa q -ème ligne par L_p . On a $\det(A') = 0$ puisque A' a deux lignes égales. D'autre part, le développement de $\det(A')$ par rapport à q -ème ligne nous donne immédiatement $L_p C_q$. La formule désirée est établie.

Deux relations fondamentales vérifiées par la comatrice

On a le résultat suivant pour toute matrice (pas nécessairement inversible !) :

Théorème

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. On note $A = (a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n}$. Nous allons établir que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Soit $(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ fixé. Notons L_p la p -ième ligne de A et C_q la q -ème colonne de $B := \operatorname{com}(A)^T$. Par définition de A et de B , on a

$$L_p C_q = \sum_{k=1}^n a_{pk} (-1)^{q+k} \det A(q, k).$$

Si $p = q$, la formule du développement du déterminant nous donne $L_p C_p = \det(A)$. Si $p \neq q$, on considère la matrice A' obtenue à partir de A en remplaçant sa q -ème ligne par L_p . On a $\det(A') = 0$ puisque A' a deux lignes égales. D'autre part, le développement de $\det(A')$ par rapport à q -ème ligne nous donne immédiatement $L_p C_q$. La formule désirée est établie. L'égalité $\operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n$ s'obtient de manière analogue.

Il découle de ce qui précède :

Corollaire

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T.$$

Comme pour les formules de Cramer, cette formule n'est intéressante que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.