

Théorie des anneaux

Exercice 1 Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Est-ce un corps ?

Exercice 2 (Anneau des entiers de Gauss) Montrer que $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison complexe. On l'appelle l'*anneau des entiers de Gauss*.

Exercice 3 L'union de deux sous-anneaux d'un anneau A est-elle un sous-anneau ?

Exercice 4 (Anneau des entiers d'Eisenstein) Montrer que $\mathbb{Z}[j] := \{a + jb : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison complexe. On l'appelle l'*anneau des entiers d'Eisenstein*.

Exercice 5 (Décimaux) On considère l'ensemble des *décimaux*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

Exercice 6 (Quaternions) Montrer que l'ensemble

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

est un corps (non commutatif) lorsqu'il est muni des lois $+$ et $\times$ de $M_2(\mathbb{C})$. Il est appelé *corps des quaternions*.

Exercice 7 Soient $(A; +, \times)$ un anneau. On dit que A est un *anneau de Boole* lorsque

$$x^2 = x \quad \text{pour tout } x \in A.$$

1. Montrer que si A est un anneau de Boole, alors pour tout $x \in A$, $x = -x$. En déduire que tout anneau de Boole est commutatif.
2. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On rappelle que la différence symétrique sur E est définie par

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{pour tout } A, B \in \mathcal{P}(E).$$

On note $\bar{X}$ le complémentaire de $X \subset E$ dans E , i.e., $\bar{X} := X \setminus E$.

(a) Montrer que pour tout $X, Y \subset E$, on a

$$X \Delta Y = (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y).$$

(b) Montrer que pour tout $X, Y \subset E$, on a

$$\overline{X \Delta Y} = (\bar{X} \cap \bar{Y}) \cup (X \cap Y).$$

(c) En déduire que pour tout $A, B, C \subset E$, $(A \Delta B) \Delta C$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois aux trois parties A, B, C ou à exactement une seule des trois parties A, B, C .

- (d) Conclure que pour tout $A, B, C \subset E$, $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
 (e) Montrer que $(\mathcal{P}(E); \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.

Exercice 8 (Anneau des polynômes à une indéterminée) Soient $(A; +, \times)$ un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble des suites de A nulles à partir d'un certain rang muni des opérations $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ définies pour tout $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ par

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{\times} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est un anneau commutatif. Traditionnellement, on note X la suite de A définie par $a_1 = 1_A$ et $a_n = 0_A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 1$ et on note $A[X]$ l'ensemble défini ci-dessus. Il est alors appelé *anneau des polynômes à une indéterminée sur A* .

Exercice 9 Pour chaque $d \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x \in d\mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ muni de sa structure naturelle produit.
2. On considère A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ (muni de sa structure naturelle d'anneau produit). Montrer que $G = \{x \in \mathbb{Z} : (x, 0) \in A\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$. En déduire que $A = A_d$ pour un certain entier d .

Exercice 10 (Inverse à gauche, à droite) Soient $(A; +, \times)$ un anneau, $a \in A$. Montrer que si a est inversible à gauche et à droite dans A , alors a est inversible.

Exercice 11 Soient A un anneau non nul et $a \in A$ un élément *nilpotent* (i.e., pour lequel il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a^n = 0_A$).

1. Montrer que $1_A - a \in A^\times$ et donner son inverse.
2. Soit $x \in A^\times$ qui commute avec a (i.e., $ax = xa$). Justifier que $x^{-1}a$ est nilpotent. En déduire que $x - a \in A^\times$ et donner son inverse.

Exercice 12 Soit $(A; +, \times)$ un anneau. Montrer que $(A^\times; \times)$ est un groupe.

Exercice 13 Soit $(A; +, \times)$ un anneau commutatif, $a, b \in A$. Montrer que $ab \in A^\times$ si et seulement $a \in A^\times$ et $b \in A^\times$.

Exercice 14 Déterminer les éléments du groupe $(\mathbb{Z}[i])^\times$ des éléments inversibles de l'anneau des entiers de Gauss et donner sa structure.

Exercice 15 Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[j] = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$ avec $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. A quel groupe "mieux connu" cet ensemble est-il isomorphe (en tant que groupe) ?

Exercice 16 Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que 4 admet deux décompositions distinctes en produits d'irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Exercice 17 (Eléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 18 Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 19 (Diviseurs de zéro) Soient $(A; +, \times)$ un anneau, $a \in A$ avec $a \neq 0_A$. On dit que a est un *diviseur de zéro à gauche* (resp. un *diviseur de zéro à droite*) dans A lorsqu'il existe $b \in A$ avec $b \neq 0_A$ tel que $ab = 0_A$ (resp. $ba = 0_A$). Si a est un diviseur de zéro à gauche ou à droite dans A , on dit que a est un *diviseur de zéro* dans A .

1. Déterminer les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $a \in A$ est inversible à droite (resp. à gauche) dans A , alors a n'est pas un diviseur à droite (resp. à gauche) de zéro.
4. Montrer que si A est intègre, alors il n'admet aucun diviseur de zéro à gauche (resp. à droite).
5. Déterminer les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 2$.

Exercice 20 Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si $n \in \mathbb{P}$.

Exercice 21 (Réguliers à gauche, à droite) Soient $(A; +, \times)$ un anneau. On dit que $a \in A$ est *régulier à gauche* (resp. *régulier à droite*) lorsque pour tout $b, c \in A$,

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

(resp.

$$ba = ca \Rightarrow b = c).$$

On dit que $a \in A$ est *régulier* lorsqu'il est régulier à gauche et à droite.

1. Montrer que tout élément de A inversible à gauche (resp. à droite) est régulier à gauche (resp. à droite).
2. Soit $a \in A$ avec $a \neq 0_A$. Montrer que a est régulier à gauche (resp. à droite) si et seulement si a n'est pas un diviseur de zéro à gauche (resp. à droite).

Exercice 22 Soient B, C deux sous-anneaux d'un anneau $(A; +, \times)$. Montrer que si $C \subset B$, alors C est un sous-anneau de B muni des lois induites par celles de A .

Exercice 23 Montrer que $\mathbb{Q}$ n'admet pas de sous-corps autre que lui-même.

Exercice 24 Montrer qu'un sous-anneau non nul d'un anneau intègre est intègre. Donner des exemples d'anneaux intègres et non intègres. Un produit d'anneaux intègres est-il intègre? Soient A, B deux anneaux. Montrer que $A \times B$ est intègre si et seulement si l'un des deux anneaux est nul et l'autre est intègre.

Exercice 25 Montrer que tout anneau A intègre fini est un corps. **Indication :** pour $a \in A$ avec $a \neq 0_A$, on pourra considérer l'application $\tau_a : A \rightarrow A$ définie par

$$\tau_a(x) := ax \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Exercice 26 Soit $(A; +, \times)$ un anneau. Montrer que le *centre* $Z(A) := \{a \in A : \forall b \in A, ab = ba\}$ de A est un sous-anneau de A . Que dire d'un anneau égal à son centre?

Exercice 27 Déterminer le centre de $\mathbb{H}$.

Exercice 28 Donner le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/5$.

Exercice 29 Donner le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $2i$.

Exercice 30 Déterminer les idéaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 31 Soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille non vide d'idéaux à gauche (resp. à droite (resp. bilatère)) d'un anneau $(A; +, \times)$. Montrer que $\bigcap_{j \in J} I_j$ est un idéal à gauche (resp. à droite (resp. bilatère)) de A .

Exercice 32 Soit $(A; +, \times)$ un anneau. Que dire d'un idéal à gauche (resp. à droite) de A contenant un élément inversible à gauche (resp. à droite) ?

Exercice 33 Soient $(A; +, \times)$ un anneau, B un sous-anneau de A et I un idéal à gauche (resp. à droite (resp. bilatère)) de A . Montrer que l'ensemble $B \cap I$ est un idéal à gauche (resp. à droite (resp. bilatère)) de B .

Exercice 34 (Idéaux d'un produit) Soient A_1, A_2 deux anneaux. Montrer que tout idéal $\mathcal{I}$ à gauche (resp. à droite) de l'anneau produit $A_1 \times A_2$ est de la forme $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ où $\mathcal{I}_1$ un idéal à gauche (resp. à droite) de A_1 et où $\mathcal{I}_2$ est un idéal à gauche (resp. à droite) de A_2 .

Exercice 35 Montrer qu'un anneau intègre $(A; +, \times)$ possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.

Exercice 36 Soient K un corps commutatif et $n \geq 2$ un entier. On considère I un idéal bilatère non nul de $M_n(K)$.

1. Montrer qu'il existe $M = (m_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} \in I$ telle que $m_{1,1} \neq 0$.
2. Soit $(p, q) \in \{1, \dots, n\}$. Effectuer le produit matriciel $E_{p,1} M E_{1,q}$. En déduire que $I_n \in I$.
3. Conclure.

Exercice 37 Soient A un anneau et S une partie non vide de A . On appelle *annulateur* de S la partie

$$\text{Ann}(S) := \{x \in A : \forall y \in S, xy = 0_A\}.$$

Montrer que $\text{Ann}(S)$ est un idéal à gauche de A .

Exercice 38

- (a) Le produit d'anneaux principaux est-il principal ?
- (b) Un sous-anneau non nul d'un anneau principal est-il principal ?
- (c) Décrire les idéaux de l'anneau produit $A_1 \times A_2$ où A_1 et A_2 sont deux anneaux principaux.

Exercice 39 Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau principal.

Exercice 40 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est un idéal non principal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 41 (Une caractérisation des anneaux noethériens) Soit A un anneau commutatif. Montrer que A est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.

Exercice 42 (Un exemple d'anneau non-noethérien) Montrer que $A := C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas noethérien.

Exercice 43 (Radical d'un idéal) Soient $(A; +, \times)$ un anneau commutatif et I un idéal de A . On appelle *radical* de I l'ensemble

$$\sqrt{I} := \{a \in A : \exists n \geq 1, a^n \in I\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A . En déduire que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A .

Exercice 44 Soit $m \geq 2$ un entier de décomposition en facteurs premiers $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\sqrt{m\mathbb{Z}}$. En déduire les idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.

Exercice 45 (Somme d'idéaux) Soit A un anneau. On considère I et J deux idéaux de A de même nature.

1. Montrer que $I + J := \{i + j : (i, j) \in I \times J\}$ est un idéal de même nature que I et J .
2. L'ensemble $I \cup J$ est-il un idéal de A ?
3. Montrer que si I et J sont des idéaux à gauche, alors

$$I + J = (I \cup J)_g.$$

Procéder de même pour le cas à droite. Que dire dans le cas où I et J sont des idéaux bilatères?

Exercice 46 (Produit d'idéaux) Soit A un anneau. On considère I et J deux idéaux de A bilatères.

1. L'ensemble $\mathcal{P} = \{ij : i \in I, j \in J\}$ est-il un idéal de A ?
2. Montrer que l'ensemble

$$IJ := \left\{ \sum_{k=1}^m i_k j_k : m \geq 1, \forall 1 \leq k \leq m, (i_k, j_k) \in I \times J \right\}$$

est l'idéal bilatère engendré par $\mathcal{P}$, i.e., $(\mathcal{P})_b = IJ$.

3. Montrer que

$$IJ \subset I \cap J.$$

Cette inclusion est-elle une égalité en général?

4. Montrer que si $I + J = A$, alors $IJ = I \cap J$.
5. Montrer que

$$(I + J)K = IK + JK.$$

Exercice 47 Soient A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A . On rappelle que le radical d'un idéal de A est un idéal de A .

1. Que dire de $\sqrt{\sqrt{I}}$?
2. Montrer que

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

3. Montrer que

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

Exercice 48 Un anneau commutatif peut-il être isomorphe à un anneau non commutatif? Même question en remplaçant "commutatif" par "intègre".

Exercice 49 Soient A, B, C trois anneaux avec A et B isomorphes et B et C isomorphes. A t-on que A et C sont isomorphes?

Exercice 50 Soient A, B deux anneaux non nuls et $\varphi : A \rightarrow B$ un isomorphisme d'anneaux. Montrer que si $a \in A$ est irréductible dans A , alors $\varphi(a)$ est irréductible dans B .

Exercice 51 Soient A un anneau et T un ensemble non vide. On suppose $\mathcal{F}(T, A)$ muni de sa structure naturelle d'anneau induite par celle de A . Montrer que l'application $\text{ev}_t : \mathcal{F}(T, A) \rightarrow A$ définie par

$$\text{ev}_t(f) := f(t) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{F}(T, A)$$

est un morphisme d'anneaux.

Exercice 52 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
3. Conclure que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 53 Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer les équivalences :
 - (i) $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ ou f est la conjugaison.
 - (ii) f est continu.
 - (iii) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
 - (iv) $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 54 Montrer qu'il n'y a aucun morphisme d'anneaux de X dans Y pour les anneaux suivants (munis de leurs lois usuelles) :

1. $X = \mathbb{C}$ et $Y = \mathbb{R}$;
2. $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{Q}$;
3. $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec $n \geq 2$ entier) et $Y = \mathbb{Z}$.

Exercice 55 Soit A un anneau tel que $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.

- (a) Donner un exemple d'un tel anneau.
- (b) Quels sont les éléments nilpotents d'un tel anneau ?
- (c) Montrer que $6A = \{0_A\}$.
- (d) Montrer que $2A$ et $3A$ sont des idéaux bilatères de A .
- (e) Montrer que $2A$ et $3A$ sont étrangers et que $2A \cap 3A = \{0_A\}$.
- (f) Soient X un anneau (pas nécessairement commutatif) et I, J deux idéaux bilatères de X avec $I + J = X$. Montrer que $X/(I_1 \cap I_2)$ est isomorphe à l'anneau $X/I_1 \times X/I_2$.
- (g) Montrer que A est isomorphe à $A/2A \times A/3A$.
- (h) Soit B un anneau avec $2B = \{0\}$ tel que $x^3 = x$ pour tout $x \in B$. Montrer que B est commutatif.
- (i) Soit C un anneau avec $3B = \{0\}$ tel que $x^3 = x$ pour tout $x \in C$. Montrer que C est commutatif.
- (j) Conclure que A est commutatif.

Exercice 56

1. Existe-t-il un anneau de caractéristique 20 ? un corps de caractéristique 20 ?
2. Existe-t-il un anneau fini de caractéristique nulle ?
3. Peut-on trouver un corps K de caractéristique 11 et un sous-corps K' de caractéristique 0 ?
4. Soient A_1, A_2 deux anneaux. Déterminer la caractéristique de $A_1 \times A_2$.

Exercice 57 Soit A un anneau. A quel anneau A/A est-il isomorphe ? Même question pour $A/\{0_A\}$.

Exercice 58 A quel anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ est-il isomorphe ?

Exercice 59 Soit I_1 (resp. I_2) un idéal bilatère d'un anneau A_1 (resp. A_2). On a vu dans un exercice précédent que $I_1 \times I_2$ est un idéal bilatère de $A_1 \times A_2$ muni de sa structure naturelle d'anneau produit. Montrer que l'anneau $(A_1 \times A_2)/(I_1 \times I_2)$ est isomorphe à $(A_1/I_1) \times (A_2/I_2)$.

Exercice 60 Soient I un idéal d'un anneau $(A; +, \times)$. On rappelle que le *radical* d'un idéal I de A est l'idéal de A défini par

$$\sqrt{I} := \{x \in A : \exists n \geq 1, x^n \in I\}.$$

Montrer que $\sqrt{I} = I$ si et seulement si l'anneau quotient A/I n'a pas d'élément nilpotent non trivial (i.e., n'a pas d'élément nilpotent différent de $0_{A/I}$). En déduire les entiers $k \geq 2$ tels que $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ n'a pas d'élément nilpotent non trivial.

Exercice 61 Soit I un idéal d'un anneau A commutatif noethérien. Montrer que l'anneau quotient A/I est noethérien.

Exercice 62 Soient A un anneau commutatif noetherien, $f : A \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux surjectif.

1. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\ker f^n = \ker f^{n_0} \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

2. Montrer que $\ker f^{n_0} \cap \text{im } f^{n_0} = \{0\}$.
3. En déduire que $\ker f^{n_0} = \{0\}$.
4. Conclure que f est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 63 Soient A un anneau commutatif noetherien et I un idéal de A . On suppose que A/I est isomorphe à A . Montrer que la projection canonique $\pi : A \rightarrow A/I$ est injective et conclure que $I = \{0\}$.

Exercice 64 Un anneau noethérien peut-il être isomorphe à un anneau non noethérien ?

Exercice 65 Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est noethérien.

Exercice 66 Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 2$ entier ?

Exercice 67 Soient $n \geq 2$ un entier, $A = M_n(\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note I l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{Z})$ à coefficients pairs. Montrer que I est un idéal bilatère de A et que l'anneau quotient A/I est isomorphe à un anneau de matrices à déterminer.

Exercice 68 Soient M_1, M_2 deux idéaux maximaux distincts d'un anneau A . Montrer l'égalité $M_1 + M_2 = A$.

Exercice 69 Soient (E, d) un espace métrique compact et $A = C(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. On munit l'anneau A de la norme $\|\cdot\|_\infty : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)| \quad \text{pour tout } f \in A.$$

Déterminer $A^\times$ et montrer que tout idéal maximal de A est fermé dans A relativement à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 70 Soit A un anneau commutatif non réduit à zéro qui n'est pas un corps. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La somme de deux non-inversibles de A est non-inversible.
- (b) Les non-inversibles de A forment un idéal de A distinct de A .
- (c) L'anneau A possède un idéal maximal unique.

- Exercice 71** 1. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux surjectif entre deux anneaux A et B . Montrer que si J est un idéal maximal de B , alors $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A .
2. On considère l'injection canonique f de $A := \mathbb{Z}[X]$ dans $B := \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'idéal $J := X\mathbb{R}[X]$ est maximal. Que pensez-vous de l'idéal $f^{-1}(J)$?

Exercice 72 Soit $A = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure naturelle d'anneau.

1. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de A .
2. Tous les idéaux de A sont-ils maximaux ? premiers ?
3. Montrer que I_x n'est pas un idéal principal.

Exercice 73 Soit I un idéal d'un anneau commutatif A . Déterminer les idéaux maximaux de A/I .

Exercice 74 Soit I un idéal d'un anneau commutatif A . Déterminer les idéaux premiers de A/I .

Exercice 75 (Idéal de Jacobson) Soit $(A; +, \times)$ un anneau commutatif non nul. On définit l'ensemble (qui est évidemment un idéal de A)

$$\text{Jac}(A) = \bigcap_{I \in \mathcal{M}(A)} I,$$

où $\mathcal{M}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de A (qui est un ensemble non vide d'après le théorème de Krull). Montrer que

$$\text{Jac}(A) = \{x \in A : \forall y \in A, 1 + xy \in A^\times\}.$$

Exercice 76 Soit $(A; +, \times)$ un anneau tel que

$$a^2 = a \quad \text{pour tout } a \in A.$$

Justifier que $a = -a$ pour tout $a \in A$. En déduire que $(A; +, \times)$ est commutatif. Montrer que l'anneau est un corps lorsqu'il est de plus supposé intègre. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 77 Soit $(A; +, \times)$ un anneau commutatif fini non nul. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 78 Montrer que 2 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 79 Vérifier que 89 est un nombre premier de $\mathbb{Z}$. L'idéal (89) est-il premier dans $\mathbb{Z}[i]$? On pourra écrire 89 comme somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 80 Soient A, B deux anneaux commutatifs, $f : A \rightarrow B$ un isomorphisme d'anneaux et a premier dans A . L'élément $f(a)$ est-il premier dans B ?

Exercice 81 (Irréductible n'entraîne pas premier) Montrer que $1 + i\sqrt{5}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Est-il premier dans ce même anneau ?

Exercice 82 Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Exercice 83 Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ est isomorphe (en tant qu'anneaux) à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Retrouver ainsi que $1 + 3i$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 84 Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est euclidien.

Exercice 85 Montrer que tout corps commutatif est euclidien.

Exercice 86 (Idéaux premiers d'un anneau euclidien) Soient A un anneau euclidien et I un idéal premier non nul de A .

1. Justifie que $I = (p)$ pour $p \in A$ non nul et non inversible.
2. Montrer que p est premier.
3. Montrer que I est maximal.
4. Conclure que A/I est euclidien.

Exercice 87 Soit A un anneau euclidien de sthame associé ν . Pour tout idéal I de A , on note π_I la surjection canonique de A dans A/I . **L'objectif de l'exercice** est d'établir l'existence de $x \in A \setminus A^\times$ tel que l'application $J : A^\times \cup \{0_A\} \rightarrow A/(x)$ définie par

$$J(a) = \pi_{(x)}(a) \quad \text{pour tout } a \in A^\times \cup \{0_A\}$$

soit surjective.

1. On suppose ici que $A = A^\times \cup \{0_A\}$. Montrer que $x = 0_A$ convient.
2. On suppose maintenant que $A \setminus (A^\times \cup \{0_A\}) \neq \emptyset$. Justifier que l'ensemble

$$\{\nu(a) : a \in A \setminus (A^\times \cup \{0_A\})\}$$

admet un plus petit élément que l'on notera m .

3. Soit $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0_A\})$ tel que $\nu(x) = m$. Soit $y \in A/(x)$.
 - (i) Justifier qu'il existe $a \in A$ tel que $\bar{a} = y$.
 - (ii) En utilisant le fait que A est euclidien, montrer qu'il existe $r \in A^\times \cup \{0_A\}$ tel que $\bar{a} = \bar{r}$.
 - (iii) Conclure.

Exercice 88 L'objectif de l'exercice est d'établir que pour $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha] := \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas euclidien. Nous allons procéder par l'absurde en supposant que $A := \mathbb{Z}[\alpha]$ soit euclidien. Pour tout idéal I de A , on note π_I la surjection canonique de A dans A/I . D'après l'exercice précédent, nous savons qu'il existe $x \in A \setminus A^\times$ tel que l'application $J : A^\times \cup \{0_A\} \rightarrow A/(x)$ définie par

$$J(a) = \pi_{(x)}(a) \quad \text{pour tout } a \in A^\times \cup \{0_A\}$$

est surjective.

1. Montrer qu'un anneau B qui contient 2 éléments est de caractéristique 2. En déduire par le 1er théorème d'isomorphisme que B est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Même question en remplaçant 2 par 3.
2. Montrer que dans $A/(x)$, on a $\overline{0_A} \neq \overline{1_A}$ et que tout élément non nul de $A/(x)$ est inversible, i.e., $A/(x)$ est un corps.
3. Montrer que $A/(x)$ à 2 ou 3 éléments.
4. En déduire qu'il existe un morphisme d'anneaux φ de A dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un entier $p \in \{2, 3\}$.
5. Soit $p \in \{2, 3\}$. On note $\bar{k}$ la classe d'un entier $k \in \{0, 1, \dots, p\}$. Montrer que $X^2 - \bar{1}X + 5.\bar{1}$ n'a pas de racines de dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
6. Observer que α est racine de $X^2 - X + 5$. Conclure à une contradiction à l'aide de $\varphi(\alpha)$.

Exercice 89 (L'existence d'un p.g.c.d. n'entraîne pas celle d'un p.p.c.m.) Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{a + ib\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- (a) Montrer que $A^\times = \{-1, 1\}$.
- (b) Montrer que les seuls diviseurs commun à $a := 2$ et à $b := 1 + i\sqrt{5}$ sont les inversibles de A . En déduire que 1 est un diviseur commun à a et à b .

- (c) Par l'absurde, supposons qu'il existe un p.p.c.m. m de a et b . Justifier que m et $2(1 + i\sqrt{5})$ sont associés. Montrer que $m \mid 6$, $b \mid 3$. Conclure à une contradiction.

Exercice 90 Soient A un anneau commutatif intègre, $a, b \in A \setminus \{0_A\}$. On suppose que a et b ont un p.g.c.d. noté $d \in A$, i.e. $d \in \text{P.G.C.D.}(a, b) \neq \emptyset$.

1. On suppose que $b \mid a$. Montrer que $\text{P.G.C.D.}(a, b) = bA^\times$.
2. On suppose qu'il existe $q \in A$ et $r \in A \setminus \{0_A\}$ tels que $a = bq + r$. Montrer que $\text{P.G.C.D.}(a, b) = \text{P.G.C.D.}(b, r)$.
3. Etendre l'algorithme d'Euclide au cadre des anneaux euclidiens.

Exercice 91 Déterminer l'ensemble des P.G.C.D. de $5 + 14i$ et $5 + i$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 92 Soient A, B deux anneaux isomorphes. On suppose que A est euclidien. Que dire de B ?

Exercice 93 On considère l'anneau commutatif intègre $A := \{a + ib\sqrt{11} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que le groupe de ses éléments inversibles est réduit à $\{-1, 1\}$.
2. Montrer que 2 est irréductible dans A .
3. Montrer que 2 n'est pas premier dans A .
4. L'anneau A est-il euclidien? principal? factoriel? de Bézout? à p.g.c.d.?

Exercice 94 Soient A, B deux anneaux commutatifs intègres, $f : A \rightarrow B$ un isomorphisme d'anneaux et $(a, b) \in A^2$. Montrer que pour tout $d \in A$, on a l'équivalence

$$d \in \text{P.G.C.D.}(a, b) \Leftrightarrow f(d) \in \text{P.G.C.D.}(f(a), f(b)).$$