Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD5 - Suites

1 Exercices du T.D.

Exercice 1 *Montrer en revenant à la définition d'une suite réelle convergente que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Solution. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\frac{1}{\varepsilon^2}) + 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$ **(Exer)**,

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$$

et ceci s'écrit encore pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| \leq \varepsilon.$$

Par définition, la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ converge vers 0, i.e., $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ■

Exercice 2 (a) *Soit $u_0 \geq 1$ un entier. Construire par récurrence la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de réels telle que*

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^\star.$$

Trouver un entier $k \geq 1$ tel que si $u_0 = k$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
(b) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par*

$$u_n = \mathrm{Ent}(\frac{1}{n})$$

$(u_n)_{n \geq 1}$ est stationnaire.

Solution. (a) Posons

$$\begin{aligned} f :&]0, +\infty[\to]0, +\infty[\\ & x \mapsto \frac{2x + 3}{x}. \end{aligned}$$

Construisons par récurrence la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

Puisque $u_0 > 0$, on peut poser $u_1 = f(u_0)$. Soit $k \geq 1$ un entier. Supposons u_k construit et satisfaisant

$$u_k = f(u_{k-1}).$$

Puisque $f(u_{k-1}) > 0$, on peut poser $u_{k+1} = f(u_k)$. Ceci termine la récurrence. Supposons qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $u_n = l$ pour tout entier $n \geq 0$. On a alors

$$l = \frac{2l+3}{l}.$$

On aboutit sans difficultés **(Exer)** à $l = 3$. Avec le choix $u_0 = 3$, on vérifie que **(Exer)** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$.
(b) Il suffit de remarquer **(Exer)** que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 0$. ■

Exercice 3 (a) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique réelle de raison -4 et de premier terme 13. Donner les six premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
(b) *Etablir que toute suite arithmétique réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_{n+2} + x_n = 2x_{n+1}.$$

Solution. (a) On a **(Exer)** $u_0 = 13$, $u_1 = 9$, $u_2 = 5$, $u_3 = 1$, $u_4 = -3$ et $u_5 = -7$.
(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle) arithmétique. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = a + x_n.$$

On observe alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} + x_n = x_{n+1} + a + x_{n+1} - a = 2x_{n+1}.$$

■

Exercice 4 *On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = \frac{2n-1}{3n+3}.$$

(a) *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (dans $\mathbb{R}$). Que peut-on en déduire ?*
(b) *Démontrer en utilisant la définition de la limite d'une suite que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.*

Solution. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3(n+1)(n+2)} > 0.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'autre part, on a évidemment **(Exer)** pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{2n-1}{3n+3} \leq \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée dans $\mathbb{R}$. D'après le cours, il existe un réel l tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{2n-1}{3n+3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{n+1}. \tag{1.1}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

En combinant (1.1) et (1.2), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{2n-1}{3n+3} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$. ■

Exercice 5 (a) *Construire la suite réelle* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}.$$

(b) *Montrer que* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante et majorée.*
(c) *En déduire que* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente et donner sa limite.*

Solution. (a) Par récurrence classique **(Exer)**.
(b) Par récurrence **(Exer)**, on montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in]0, 4[.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{12 + u_n} - u_n \\ &= \frac{12 + u_n - u_n^2}{\sqrt{12 + u_n} + u_n}. \end{aligned}$$

Puisque $u_n \in]0, 4[$, on a

$$12 + u_n - u_n^2 > 0.$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Evidemment, l'encadrement $0 < u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous dit en particulier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
(c) Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge. Notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. La continuité de $\sqrt{\cdot} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ nous dit alors que

$$l = \sqrt{12 + l}.$$

Il vient

$$l^2 - l - 12 = 0$$

d'où l'inclusion $l \in \{-3, 4\}$. Le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite à valeurs positives exclut le cas $l = -3$ et donc on a $l = 4$. ■

Exercice 6 *Construire la suite* $(u_n)_{n \geq 1}$ *de réels définie par* $u_1 = \sqrt{2}$ *et pour tout entier* $n \geq 1$ *par*

$$u_{n+1} = \sqrt{2 u_n}.$$

Montrer que :
(a) $(u_n)_{n \geq 1}$ *est croissante et majorée.*
(b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge et donner sa limite.*

Solution. Posons $f = \sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Puisque $\sqrt{2} \in [0, +\infty[$ et $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$, on peut construire **(Exer)** la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
(a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}.$$

Par récurrence, on montre que **(Exer)** $u_n \in]0, 2[$ pour tout entier $n \geq 1$. Ceci combiné à l'égalité ci-dessus nous dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée (dans $\mathbb{R}$).
(b) Le fait que $(u_n)_{n\geq 1}$ soit croissante et majorée (dans $\mathbb{R}$) nous dit qu'elle converge. Posons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Observons que l'égalité valable pour chaque entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n},$$

combinée à la continuité de $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, nous dit que $l = \sqrt{2l}$. On en déduit

$$l(l - 2) = 0,$$

i.e., $l \in \{0, 2\}$. Evidemment **(Exer)**, $l = 0$ est exclu, donc $l = 2$. ■

Exercice 7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par*

$$u_n = \frac{n + (-1)^n n}{n - (-1)^n \frac{n}{2}} \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{N}.$$

*Est-ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? (***Indication :** *considérer les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$).*

Solution. Constatons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} = 4 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 0.$$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Puisque les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l, on aurait d'une part $l = 4$ et d'autre part $l = 0$. Ceci est absurde. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger. ■

Exercice 8 *Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer la somme des n premiers entiers naturels, puis la somme des n premiers entiers naturels impairs. En déduire la somme* $51 + 53 + \ldots + 99$.

Solution. Notons S_n la somme des n premiers entiers naturels, i.e.,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

Par récurrence, on montre sans difficultés **(Exer)** que

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Posons I_n la somme des n premiers entiers naturels impairs, i.e.,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

On a alors

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2S_n + n = n^2.$$

Il vient alors

$$51 + 53 + \ldots + 99 = I_{50} - I_{25} = 50^2 - 25^2 = 1875.$$

■

Avant d'introduire le prochain exercice, rappelons le concept de fonctions lipschitziennes et le théorème de point fixe de Banach.

Définition 1.1 *Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est lipschitzienne sur D lorsqu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in D$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

Un tel réel est appelé constante de Lipschitz de f sur D. Lorsque $K \in [0, 1[$, on dit que f est contractante sur D.

Théorème 1.1 (Point fixe de Banach, version réelle) *Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction contractante sur I telle que $f(I) \subset I$. Alors, f possède un unique point fixe dans I. De plus, pour tout $c \in I$, la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers cet unique point fixe.*

Exercice 9 *Soit $u_0 \geq 1$ un réel fixé. On définit la fonction*

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}). \end{aligned}$$

(a) *Construire la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels définie pour tout entier $n \geq 1$,*

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

(b) *Montrer que f est contractante sur $[1, +\infty[$.*
(c) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.*

Solution. (a) Ceci résulte de l'inclusion $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$, elle-même conséquence du fait que pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} + 1 = \frac{(x-1)^2}{2x} + 1 \geq 1.$$

En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $[1, +\infty[$.
(b) Pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{(x-1)^2}{2x} - \frac{(y-1)^2}{2y} \\ &= \frac{y(x-1)^2 - x(y-1)^2}{2xy} \\ &= \frac{1}{2xy}(x-y)(xy-1). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x, y \in [1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \frac{|xy - 1|}{xy} \\ &= \frac{1}{2} |x - y| \frac{xy - 1}{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} |x - y| . \end{aligned}$$

Donc, f est contractante sur $[1, +\infty[$.
(c) Puisque f est contractante sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ qui est un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$, le théorème du point fixe de Banach nous dit que f a un unique point fixe (dont il est aisé de s'apercevoir que c'est 1). De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cet unique point fixe. ■

Exercice 10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle géométrique de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
(a) *Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Calculer $\sum_{n=0}^{N} u_n$.*
(b) *Montrer que si $0 < q < 1$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1 - q}.$$

Solution. (a) **Cas 1 :** $q = 1$. On a alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_0$. On en déduit

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = u_0(N + 1).$$

Cas 2 : $q \neq 1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.
On a (puisque $q \neq 0$)

$$\sum_{n=0}^{0} q^n = 1 = \frac{1 - q}{1 - q}.$$

Soit $m \geq 0$ un entier. Supposons que

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

et montrons que

$$\sum_{n=0}^{m+1} q^n = \frac{1 - q^{m+2}}{1 - q}.$$

On a

$$\sum_{n=0}^{m+1} q^n = q^{m+1} + \sum_{n=0}^{m} q^n = q^{m+1} + \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{m+2}}{1 - q}.$$

Ceci termine la récurrence. Il vient alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_0 q^n = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

(b) Supposons $0 < q < 1$. Dans ce cas, nous savons que

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$

Grâce à (a), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}.$$

■

On aura besoin du théorème suivant :

Théorème 1.2 (Taylor-Lagrange) : *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^n sur $[a, b]$ (i.e., pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ est bien définie sur $[a, b]$ et continue sur $[a, b]$) et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où l'on convient que $f^{(0)} = f$.

Exercice 11 1) *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) *On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$,*

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}.$$

(a) *Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.*
(b) *En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$.*

Solution. 1) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On a évidemment

$$\frac{1}{1!} = \frac{1}{2^0}.$$

Fixons $k \geq 1$ un entier. Supposons $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ et montrons que $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$. On a **(Exer)**

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k!)(k+1)} \leq \frac{1}{(k+1)2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^k}$$

et ceci termine la récurrence.
2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment croissante **(Exer)**. On a de plus pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On en déduit pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, il vient

$$u_n \leq 2 + u_0 = 3.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également majorée. D'après le cours, elle converge dans $\mathbb{R}$.
3) Par récurrence, on montre tout de suite que **(Exer)** pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Posons $f = \exp$ où

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

D'après Taylor-Lagrange, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $c_n \in]0,1[$ tel que

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n).$$

Il vient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{c_n}.$$

Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} e^{c_n} = 0$. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

■

En vue du prochain exercice, on aura besoin de la définition ainsi que du résultat ci-dessous :

Définition 1.2 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0.$$

Théorème 1.3 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel l et de plus ce réel satisfait*

$$a_n \leq l \leq b_n \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 12 *Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier $n \geq 1$,*

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \textit{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
(c) Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Que peut-on en conclure ?

Solution. (a) Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n sont bien définis et $u_n, v_n \in]0, +\infty[$. Evidemment, u_0 et v_0 sont bien définis et $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Supposons u_k, v_k bien définis et $u_k, v_k \in]0, +\infty[$. On a tout de suite $u_k + v_k > 0$ ce qui permet de définir

$$u_{k+1} = \frac{2u_k v_k}{u_k + v_k}.$$

On peut également poser

$$v_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + v_k).$$

Enfin, il est immédiat que **(Exer)** $u_{k+1}, v_{k+1} \in]0, +\infty[$. Ceci termine la récurrence.
(b) Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq 0$$

et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geq 0.$$

En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Observons également que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leq 0,$$

ce qui nous dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0,$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. On en déduit qu'il existe deux réels l et l' tels que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = l'.$$

Il vient alors $l' = \frac{1}{2}(l + l')$, i.e., $l = l'$. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.
(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n.$$

On en déduit $l^2 = u_0 v_0 = ab$ puis $l = \sqrt{ab}$. ■

Exercice 13 *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Vérifier que $A^2 = A + I$.*
(b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$A^{n+2} = A^{n+1} + A^n.$$

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$V_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^n V_0 = V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(d) *Montrer que pour tout $n \geq 1$ entier, on a*

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

Solution. (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A + I.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n.A^2 = A^{n+2}$$

et

$$A^n(A+I) = A^{n+1} + A.$$

Via (a), il vient

$$A^{n+2} = A^{n+1} + A.$$

(c) Par récurrence, montrons que $A^n V_0 = V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifie tout de suite que **(Exer)**

$$A^0 V_0 = I_2 V_0 = V_0.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k V_0 = V_k$. Montrons que $A^{k+1} V_0 = V_{k+1}$. On a

$$\begin{aligned} A^{k+1} V_0 &= A(A^k V_0) \\ &= A V_k \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix} \\ &= V_{k+1}. \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence.
(d) Par récurrence, montrons que

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

pour tout entier $n \geq 1$. On vérifie que **(Exer)**

$$A = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}.$$

Fixons $k \geq 1$ un entier. Supposons que

$$A^k = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k+1} \\ F_{k-1} + F_k & F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_{k+2} \end{pmatrix}.$$

Ceci termine la récurrence. ■

2 Corrigé du TCE 3

Dans cette section, on adopte la convention $0^0 = 1$.

Définition 2.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Le couple (a, b) est appelé raison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ arithmético-géométrique de raison $(a, b) \in \mathbb{C}$, il est aisé de constater que si $a = 0$ (resp., $b = 0$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique (resp. géométrique). La remarque précédente conduit à s'intéresser au cas $(a, b) \neq (1, 0)$.

Proposition 1 *Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ arithmético-géométrique de raison (a, b). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right).$$

Preuve. Par définition d'une suite arithmético-géométrique, on a

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $a \neq 1$, on peut considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{b}{1-a} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Sans difficultés, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$av_n + b = \frac{b}{1-a} = v_{n+1}.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = a(u_n - v_n)$$

ce qui nous dit en particulier que $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - v_0$. Par récurrence (et en gardant à l'esprit la convention $0^0 = 1$) on montre que

$$u_n - v_n = a^n(u_0 - v_0) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En revenant à la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on aboutit alors au fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right).$$

■

Dans la suite, on considère $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ fixés. **On suppose construite la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L'objectif du développement ci-dessous est d'obtenir (à travers la Proposition 1) une formule en fonction de n pour u_n.

- Supposons que $c = 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{a}{d}u_n + \frac{b}{d}.$$

Ceci nous dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de raison $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$.

Dans la suite, on suppose donc que $c \neq 0$.

- Supposons que $ad - bc = 0$. Si $a = 0$, alors nécessairement $b = 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne à partir du rang 1. Supposons donc $a \neq 0$. On a $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ ce qui permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{a(u_n + \frac{b}{a})}{c(u_n + \frac{d}{c})} = \frac{a(u_n + \frac{d}{c})}{c(u_n + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c}.$$

En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Dans la suite, on suppose donc $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

- Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, on a

$$\frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ tel que

$$f(z_0) = \frac{a}{c}.$$

On a alors

$$az_0 + b = \frac{a}{c}(cz_0 + d)$$

ce qui donne $ad - bc = 0$ et ceci contredit l'hypothèse $ad - bc \neq 0$.

Dans la suite, on considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}.$$

- Montrons que f est bijective. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Puisque $\omega \neq \frac{a}{c}$, on peut poser $Z = \frac{\omega d - b}{a - \omega c}$. Notons que si $Z = -\frac{d}{c}$, alors $ad - bc = 0$ et ceci contredit l'hypothèse $ad - bc \neq 0$. Il reste à remarquer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$,

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow z = Z$$

pour conclure que f est bijective.

- Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ un point fixe de f. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \alpha$. Par l'absurde, supposons que $u_0 \neq \alpha$. Par injectivité de f^N, on doit avoir $f^N(u_0) \neq f^N(\alpha) = \alpha$ et ceci est contradictoire. Donc, on a $u_0 = \alpha$ et ceci entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha.$$

On conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

Dans la suite, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas un point fixe de f.

- Montrons que l'ensemble des points fixes de f est égal à

$$\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} : cz^2 + (d-a)z - b = 0\right\}.$$

Rappelons que l'ensemble des points fixes de f est par définition

$$\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} : f(z) = z\right\}.$$

Il suffit alors d'observer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, on a

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Dans la suite, on note Δ le discriminant associé à $P = cX^2 + (d-a)X - b \in \mathbb{C}[X]$, i.e.,

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc).$$

- Supposons que $\Delta = 0$. Le complexe $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ est racine double de P. Il reste à voir que si $\alpha = -\frac{d}{c}$ on a $a = -d$ ce qui entraîne que (en gardant à l'esprit $\Delta = 0$) $ad - bc = 0$, égalité contradictoire avec notre hypothèse. L'ensemble des points fixes de f est donc dans ce cas réduit à $\left\{\frac{a-d}{2c}\right\}$. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_n - \alpha} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Il vient

$$v_{n_0+1} = \frac{1}{u_{n_0+1} - \alpha} = \frac{1}{f(u_{n_0}) - f(\alpha)} = \frac{c\alpha + d}{ad - bc}(cu_{n_0} + d)v_{n_0}.$$

Or, on a $u_{n_0} = \frac{1}{v_{n_0}} + \alpha$ par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En exploitant cette égalité, on obtient $(cu_{n_0} + d)v_{n_0} = (c\alpha + d)v_{n_0} + c$. On en déduit

$$v_{n_0+1} = \frac{(c\alpha + d)^2}{ad - bc}v_{n_0} + \frac{c(c\alpha + d)}{ad - bc}.$$

Grâce aux égalités $c\alpha + d = \frac{a+d}{2}$ et $ad - bc = \frac{(a+d)^2}{4}$, on aboutit à

$$v_{n_0+1} = v_{n_0} + \frac{2c}{a+d}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \alpha$, ce qui précède permet d'écrire

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{u_n - \alpha} + \frac{2c}{a+d} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(\frac{1}{u_n-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\frac{2c}{a+d}$.
• Supposons que $\Delta \neq 0$. Soient α, β les deux racines distinctes complexes de P. Montrons que $\alpha, \beta \notin \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Par l'absurde, supposons que $\alpha = -\frac{d}{c}$. Notons δ une racine carrée de Δ. On peut alors écrire

$$\alpha = \frac{a-d+\delta}{2c}.$$

Puisque $\alpha = -\frac{d}{c}$, on a

$$a+d+\delta = 0.$$

Via l'égalité $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$, on a (en vertu de ce qui précède)

$$\Delta = (-\delta)^2 - 4(ad-bc).$$

Ceci entraîne (car $\delta^2 = \Delta$) $ad - bc = 0$. Ceci contredit notre hypothèse et donc $\alpha \neq -\frac{d}{c}$. De manière similaire, $\beta \neq -\frac{d}{c}$. L'ensemble des points fixes de f est donc dans ce cas égal à $\{\alpha, \beta\}$. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n_0+1} = \frac{f(u_{n_0})-\alpha}{f(u_{n_0})-\beta} = \frac{f(u_{n_0})-f(\alpha)}{f(u_{n_0})-f(\beta)} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} v_{n_0}.$$

La suite $(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 14 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ qui converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, i.e., montrer qu'il existe un entier N tel que la suite $(u_n)_{n\geq N}$ soit constante.*

Exercice 15 *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. On définit pour chaque entier $n \geq 1$,*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel l, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce même réel l.