TD1 - Intégrales généralisées

Exercice 1 *Montrer que les intégrales généralisées* $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ *et* $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$ *sont divergentes. Que peut-on dire de l'intégrale généralisée* $\int_2^{+\infty} (\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) dx$ *?*

Solution. Les fonctions $f, g : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{pour tout } x \in [2, +\infty[$$

sont localement (Riemann) intégrables sur $[2, +\infty[$ **(Exer)** de même que $f - g$. D'autre part, pour chaque $X \in [2, +\infty[$, observons que

$$\int_2^X \frac{dx}{x+1} = [\ln |x+1|]_2^X = \ln(X+1) - \ln(3), \tag{0.1}$$

et

$$\int_2^X \frac{dx}{x-1} = [\ln |x-1|]_2^X = \ln(X-1). \tag{0.2}$$

Un passage à la limite dans (0.1) et (0.2) donne tout de suite

$$\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{dx}{x+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{dx}{x-1} = +\infty.$$

En particulier, les intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$ divergent. Une nouvelle utilisation des relations (0.1) et (0.2) assure que pour chaque $X \in [2, +\infty[$,

$$\int_2^X \big(f(x) - g(x)\big) dx = \int_2^X \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big) dx = \ln\Big(\frac{X+1}{X-1}\Big) - \ln(3). \tag{0.3}$$

En combinant (0.3) avec $\lim_{X \to +\infty} \ln(\frac{X+1}{X-1}) = 0$ **(Exer)** on aboutit à

$$\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big) dx = -\ln(3).$$

En conséquence, l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} (\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) dx$ converge. ■

Exercice 2 *Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :*
(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$;
(b) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$;
(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} dx$;
(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

Solution. (a) Il suffit d'observer **(Exer)** que

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{5/2}}$$

et de noter que les fonctions impliquées dans cet équivalent sont positives et localement (Riemann) intégrables sur $[1, +\infty[$ **(Exer)** pour conclure que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$. Or, cette dernière converge car elle est l'intégrale généralisée en $+\infty$ d'une fonction de Riemann de paramètre

$\alpha = \frac{5}{2} > 1$. On conclut alors que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ converge.

(b) Choisissons un réel $c \in]-1, 0[$ et rappelons que l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ converge **si et seulement si** les deux intégrales généralisées $\int_{-1}^{c} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ et $\int_{c}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ convergent. En exploitant **(Exer)**

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

et en notant que les fonctions qui interviennent dans l'équivalent ci-dessus sont positives et localement (Riemann) intégrables sur $[-\frac{1}{2}, 0[$ **(Exer)**, on arrive au fait que les intégrales généralisées $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ et $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ sont de même nature. Il reste alors à voir que cette dernière diverge car elle est l'intégrale généralisée en 0 d'une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$. En conclusion, l'intégrale généralisée $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ diverge de même que $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$.

(c) Commençons par observer avec $I = [e-1, +\infty[$ que les fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \text{pour tout } x \in I$$

sont localement (Riemann) intégrables sur I **(Exer)**. De plus, il n'est pas difficile d'établir **(Exer)** que

$$0 < f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

En combinant les inégalités ci-dessus et la divergence de $\int_{e-1}^{+\infty} f(x)dx$ (car intégrale généralisée en $+\infty$ associée à une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = 1$) on peut exploiter un théorème de comparaison pour aboutir à la divergence de $\int_{e-1}^{+\infty} g(x)dx$. En particulier, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}dx$ diverge.

(d) Introduisons les fonctions $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{pour tout } x \in [1, +\infty[$$

et notons qu'elles sont positives et localement (Riemann) intégrables sur $[1, +\infty[$ **(Exer)**. Puisque pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leq \sqrt{x}$, on a

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

D'autre part, notons que $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge (car il s'agit d'une intégrale généralisée en $+\infty$ associée à une fonction de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$). Ceci associé à l'encadrement ci-dessus permet alors de conclure que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ est une intégrale généralisée convergente. ■

Exercice 3 *Etudier la convergence des intégrales généralisées dépendantes d'un paramètre suivantes :*
(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *;*

(*b*) $\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$ *avec* $a \in]0,+\infty[$ *;*
(*c*) $\int_0^{+\infty} e^{-tu}\sin(u)du$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *;*
(*d*) $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution. (*a*) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon \in]0,1[$.
Etudions la convergence de $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$. Observons d'une part **(Exer)** que

$$\frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$$

et d'autre part que les fonctions intervenant dans l'équivalent ci-dessus sont positives et localement (Riemann) intégrables sur $]0,\varepsilon]$ **(Exer)**. Ainsi, $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ est de même nature que $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha}$ qui est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
Maintenant, étudions la convergence de $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$. En vertu de l'équivalent **(Exer)**

$$\frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-x)^\beta}$$

et du fait que les fonctions constituant cet équivalent sont positives et localement (Riemann) intégrables sur $[\varepsilon,1[$ **(Exer)**, les intégrales généralisées $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ et $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(1-x)^\beta}$ sont de même nature. Notons que pour tout réel $\varepsilon' \in]\varepsilon,1[$ **(Exer)**,

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{dx}{(1-x)^\beta} = \int_{1-\varepsilon'}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^\beta}$$

ce qui entraîne que $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(1-x)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$ **(Exer)**. En conclusion, l'intégrale généralisée $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$.

(*b*) Soit $a \in]0,+\infty[$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln(a)}$. Si $a = 1$, il est clair **(Exer)** que $\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$ diverge. Supposons donc $a \neq 1$ et observons par un changement de variables approprié **(Exer)** que pour tout $X \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^X \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx = \frac{1}{\ln(a)}\int_a^{a^X} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\ln(a)}\big(\mathrm{Arctan}(a^X) - \mathrm{Arctan}(a)\big).$$

D'autre part, notons que $\lim\limits_{X\to+\infty} a^X = +\infty$ si $a > 1$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} a^X = 0$ si $a < 1$ **(Exer)**. Dans les deux cas, $\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$ est une intégrale généralisée convergente **(Exer)** et **(Exer)**

$$\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx = \begin{cases} \frac{1}{\ln(a)}\big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(a)\big) & \text{si } a > 1, \\ -\frac{1}{\ln(a)}\mathrm{Arctan}(a). & \text{si } a < 1. \end{cases}$$

(*c*) Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour chaque $X \in]0,+\infty[$, posons $I_X = \int_0^X e^{-tu}\sin(u)du$ et observons que **(Exer)**

$$I_X = -e^{-tX}\cos(X) + 1 - t\int_0^X \cos(u)e^{-tu}du$$

et
$$\int_0^X \cos(u)e^{-tu}du = e^{-tX}\sin(X) + tI_X.$$
Ces deux égalités combinées donnent pour tout $X \in]0, +\infty[$,
$$I_X = \frac{1}{1+t^2}\big(1 - e^{-tX}\cos(X) - te^{-tX}\sin(X)\big). \tag{0.4}$$
Distinguons deux cas.
Cas 1 : $t > 0$. On a tout de suite
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-tx}\cos(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-tx}\sin(x) = 0$$
ce qui fournit (via (0.4))
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-tu}\sin(u)du = \frac{1}{1+t^2}.$$
En particulier, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-tu}\sin(u)du$ converge.
Cas 2 : $t \leq 0$. D'après (0.4), on a pour chaque entier $n \geq 1$,
$$\int_0^{2n\pi} e^{-tu}\sin(u)du = \frac{1}{1+t^2}\big(1-e^{-t(2n\pi)}\cos(2n\pi)-te^{-t(2n\pi)}\sin(2n\pi)\big) = \frac{1}{1+t^2}\big(1-e^{-t(2n\pi)}\big).$$
Par passage à la limite, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2n\pi} e^{-tu}\sin(u)du = -\infty.$$
En conséquence, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-tu}\sin(u)du$ diverge.
(d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas.
Cas 1 : $\alpha > 1$. La convergence de l'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ et les inégalités valables pour tout réel $x > 0$,
$$\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$
nous disent que les intégrales généralisées $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont absolument convergentes.
Cas 2 : $\alpha \in]0, 1]$. Une intégration par parties donne tout de suite **(Exer)** pour tout $X \in]\pi, +\infty[$,
$$\int_\pi^X \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = -\frac{\cos(X)}{X^\alpha} - \frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha\int_\pi^X \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}dx.$$
En combinant $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x^\alpha} = 0$ et le premier cas ci-dessus **(Exer)**, on obtient
$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}dx.$$
Cas 3 : $\alpha \leq 0$. Par l'absurde, supposons que $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ converge. Observons que ceci entraîne
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = 0. \tag{0.5}$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx \geq \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \sin(x)dx \geq \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et ceci contredit (0.5). ■

Exercice 4 *Montrer la convergence et calculer les intégrales généralisées suivantes :*
(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ *;*
(b) $\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})\Big)dt$ *;*
(c) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ *;*
(d) $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *;*
(e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Solution. (a) L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$ converge en vertu de l'encadrement

$$0 < \frac{1}{x^2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour tout } x \in [1, +\infty[$$

et du fait de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Fixons $X \in [1, +\infty[$. Un changement de variables approprié donne **(Exer)**

$$\int_1^X \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+X}} \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$$

D'autre part, on a pour tout réel $x > 1$,

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Il découle de ceci **(Exer)**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

(b) Soit $T \in [1, +\infty[$. Une intégration par parties donne sans difficultés **(Exer)**

$$\int_1^T \mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})dt = T\mathrm{Arctan}(\frac{1}{T}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(T^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Il vient alors

$$\int_1^T \Big(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})\Big)dt = \ln\big(\frac{T}{\sqrt{T^2+1}}\big) - T\mathrm{Arctan}(\frac{1}{T}) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = 1$ (car $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$) et $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\big) = 0$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})\Big)dt$ converge et satisfait

$$\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})\Big)dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1.$$

(c) Soient deux réels ε et η avec $0 < \varepsilon < \eta < 1$. Par intégrations par parties **(Exer)**, on a

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = -\frac{\ln(1-\eta^2)}{\eta} + \frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \ln(1+\eta) + \ln(1+\varepsilon) + \ln(1-\eta) - \ln(1-\varepsilon).$$

Il vient (grâce à $\ln(1-\varepsilon^2) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\varepsilon^2$)

$$\lim_{h\to 0, h>0} \int_{h}^{\eta} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = -\frac{\ln(1-\eta^2)}{\eta} - \ln(1+\eta) + \ln(1-\eta).$$

Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_0^{\eta} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge. On a de plus

$$\lim_{h\to 1} \int_{0}^{h} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \lim_{h\to 1, h<1} \big(-\frac{\ln(1-h^2)}{h} - \ln(1+h) + \ln(1-h)\big) = -2\ln(2).$$

Finalement, l'intégrale généralisée $\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge et

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = -2\ln(2).$$

(d) On convient ici que $0^0 = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{k+2} = 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $t \geq B$,

$$0 \leq e^{-t}t^k \leq \frac{1}{t^2}.$$

La convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ associée à l'encadrement précédent garantit alors la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^k dt$. Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^n dt = n!.$$

Il est immédiat de constater que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier. Supposons que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^m dt = m!$. Une intégration par parties permet d'établir que **(Exer)**

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{m+1} dt = (m+1)\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^m dt.$$

Il reste alors à exploiter l'hypothèse de récurrence pour arriver à

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{m+1} dt = (m+1)(m!) = (m+1)!.$$

Ceci termine la récurrence.
(e) Soient a, b deux réels avec $-1 < a < b < 1$. Un changement de variables approprié donne **(Exer)**

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{\mathrm{Arcsin}(a)}^{\mathrm{Arcsin}(b)} \frac{dx}{2-\sin^2(x)}.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\text{Arcsin}(a)}^{\text{Arcsin}(b)} \frac{dx}{2-\sin^2(x)} = \int_{\text{Arcsin}(a)}^{\text{Arcsin}(b)} \frac{dx}{\cos^2(x)(2+\tan^2(x))} = \frac{1}{2}\int_{\text{Arcsin}(a)}^{\text{Arcsin}(b)} \frac{dx}{\cos^2(x)\big(1+(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}})^2\big)}.$$

Un nouveau changement de variables fournit **(Exer)**

$$\frac{1}{2}\int_{\text{Arcsin}(a)}^{\text{Arcsin}(b)} \frac{dx}{\cos^2(x)(1+(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}})^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{Arctan}(\beta)-\text{Arctan}(\alpha)),$$

où $\alpha = \frac{\tan(\text{Arcsin}(a))}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{\tan(\text{Arcsin}(b))}{\sqrt{2}}$. Il s'ensuit

$$\lim_{h\to -1, h>-1}\int_h^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{Arctan}(\beta)+\frac{\pi}{2}),$$

en particulier l'intégrale généralisée $\int_{-1}^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ converge. Il reste à écrire

$$\lim_{h\to 1, h<1}\int_{-1}^h \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

pour aboutir à la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ et à l'égalité

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

■

Exercice 5 *Pour chaque entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = n$ et $f(n-\frac{1}{n^3}) = f(n+\frac{1}{n^3}) = 0$ et en la supposant affine sur chaque intervalle $[n-\frac{1}{n^3}, n+\frac{1}{n^3}]$ avec $n \geq 2$ entier et nulle ailleurs.*
(a) Montrer que pour chaque entier $n \geq 2$,

$$u_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est bornée et converge dans $\mathbb{R}$.
(c) Donner l'allule du graphe de f.
(d) Comparer pour chaque entier $n \geq 2$, $\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)dt$ et u_n.
(e) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ bien que f ne soit bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Solution. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{k^2-k} \geq \frac{1}{k^2}.$$

Il vient alors pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 < u_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty.$$

Il s'ensuit que $(u_n)_{n\geq 2}$ est bornée. D'autre part, il est clair que $(u_n)_{n\geq 2}$ est (strictement) croissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge dans $\mathbb{R}$.

(c) **(Exer)**.

(d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et donc localement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$. Notons pour chaque entier $n \geq 2$, $\mathcal{A}_n$ l'aire du triangle de sommets $(n - \frac{1}{n^3}, 0)$, $(n + \frac{1}{n^3}, 0)$ et (n, n). L'interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann donne pour chaque entier $n \geq 2$,

$$\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \mathcal{A}_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Soit $(x_n)_{n\geq 2}$ une suite de réels positifs satisfaisant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On a pour chaque entier $n \geq 2$,

$$\int_0^{x_n} f(t)dt \leq \int_0^{\mathrm{Ent}(x_n)+1} f(t)dt \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

ce qui assure que la suite $(\int_0^{x_n} f(t)dt)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée et donc convergente. En conséquence, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (tandis que f n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$). ■