Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD2 - Fonctions polynomiales

1 Exercices du T.D.

Exercice 1 *Soit* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *la fonction polynomiale (où* $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) définie pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *par :*
(a) $f(x) = x^4 - 4$ *;*
(b) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *;*
(c) $f(x) = x^4 + 1$ *;*
(d) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ *;*
(e) $f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$ *;*
(f) $f(x) = x^3 + x - 2$ *;*
(g) $f(x) = x^4 + x^2 - 6$.

Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$ *de* f.

Solution. (a) **Décomposition en facteurs irréductibles sur** $\mathbb{R}$**.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2).$$

On vérifie que **(Exer)** cette écriture est la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$**.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$$

et cette écriture est la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$ **(Exer)**.

(b) **Décomposition en facteurs irréductibles sur** $\mathbb{C}$**.**
Pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, on a **(Exer)**

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^6 - 1}{x - 1} = \prod_{k=1}^{5}(x - e^{i\frac{k\pi}{3}}).$$

Puisque $\mathbb{K} \setminus \{1\}$ est une partie infinie de $\mathbb{K}$, on a pour tout pour tout $x \in \mathbb{K}$ **(Exer)**

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \prod_{k=1}^{5}(x - e^{\frac{ik\pi}{3}}). \tag{1.1}$$

Tout de suite, on voit **(Exer)** qu'il s'agit de la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$**.**
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On va utiliser le fait que **(Exer)** pour tout $X \in \mathbb{K}$,

$$(X - z_0)(X - \overline{z_0}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2 .$$

Puisque **(Exer)** $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{5i\pi}{3}}$, $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{1}{2}$, on a (d'après l'égalité ci-dessus) pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$(x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x - e^{\frac{5i\pi}{3}}) = x^2 - x + 1.$$

De même **(Exer)**, on montre que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$(x - e^{\frac{2i\pi}{3}})(x - e^{\frac{4i\pi}{3}}) = x^2 + x + 1.$$

En combinant (1.1) et les deux égalités précédentes, on aboutit au fait que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1).$$

Il reste à vérifier **(Exer)** qu'il s'agit bien de la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$.

(c) **Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 - i^2 \\ &= (x^2 - i)(x^2 + i) \\ &= (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x + e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x + e^{i\frac{3\pi}{4}}) \end{aligned}$$

et ceci est bien la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$ **(Exer)**.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
En procédant **(Exer)** comme pour la factorisation sur $\mathbb{R}$ dans (b), on montre que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

On vérifie **(Exer)** que c'est bien la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$.

(d) **Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a **(Exer)**

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2(x^2+1) \\ &= (x-1)^2(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Il est immédiat de constater qu'il s'agit de la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$ **(Exer)**.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)$$

et ceci constitue bien la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$ **(Exer)**.

(e) **Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a **(Exer)**

$$f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24 = 3(x-2)^3.$$

Observons **(Exer)** qu'il s'agit d'un cas où la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ coïncident.

(f) **Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2).$$

Il s'agit bien de la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$ **(Exer)**.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.
On a **(Exer)** pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$f(x) = x^3 + x - 2 = (x-1)(x - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2})(x + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}).$$

C'est évidemment **(Exer)** la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$.

(g) **Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.**
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 3).$$

Sans difficultés, on vérifie **(Exer)** que c'est la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$.
Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}).$$

Il est immédiat **(Exer)** de constater que c'est la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$. ■

Exercice 2 *Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ de la fonction polynomiale suivante*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^3 - ix^2 + (-12 + 16i)x + 16 + 12i. \end{aligned}$$

On pourra remarquer que $P(i) = 0$.

Solution. Puisque $P(i) = 0$, il existe $b, c \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = (x - i)(x^2 + bx + c).$$

Il vient alors **(Exer)**

$$\begin{cases} b - i = -i \\ c - ib = -12 + 16i \\ -ic = 16 + 12i. \end{cases}$$

On en déduit $b = 0$ et $c = -12 + 16i$. On vérifie **(Exer)** alors que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = (x - i)(x^2 - 12 + 16i).$$

Or, les racines carrées de $12-16i$ **(Exer)** sont $4-2i$ et $-4+2i$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = (x-i)(x-4+2i)(x+4-2i).$$

Il est aisé **(Exer)** de constater que c'est la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$. ■

Exercice 3 *Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale suivante*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Solution. Puisque P est à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine de multiplicité 2 de P, $\overline{\alpha}$ est une racine de multiplicité 2 de P **(Exer)**. En conséquence, on a pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = (x-\alpha)^2(x-\overline{\alpha})^2 = \left[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\right]^2.$$

Ceci entraîne que $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$. On en déduit pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = (x^2 - 2\cos(\theta)x + 1)^2.$$

Il vient **(Exer)** $\cos(\theta) \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Ceci nous conduit à montrer que $P(j) = 0$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a

$$\begin{aligned} P(j) &= j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 \\ &= j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 \\ &= 3j^2 + 3j + 3 \\ &= 3(j^2 + j + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$P(x) = \left[(x-j)(x-\overline{j})\right]^2 = (x^2 + x + 1)^2.$$

Il s'agit respectivement de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ de P **(Exer)**. ■

2 Exercices supplémentaires

Exercice 4 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On suppose que la fonction polynôme*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

a une racine dans $\mathbb{Q}$ s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$ et p, q premiers entre eux. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
Application : *Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynôme*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 13x + 6. \end{aligned}$$

Solution. On a par définition de f,

$$f(\frac{p}{q}) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Donc, on a **(Exer)**

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On en déduit **(Exer)**

$$p(a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

et

$$q(a_0 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}) = -a_n p^n.$$

La première égalité nous dit alors que $p \mid a_0 q^n$ et la deuxième donne $q \mid a_n p^n$. Puisque p et q sont premiers entre eux, on a p.g.c.d.$(p, q^n) = 1$ et p.g.c.d.$(q, p^n) = 1$. Par application du théorème de Gauss, on obtient $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$. Considérons maintenant la fonction polynôme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 13x + 6 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$ avec p et q premiers entre eux (i.e., avec p.g.c.d.$(p, q) = 1$) tels que

$$g(\frac{p}{q}) = 0.$$

On a alors $p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$ et $q \in \{1, 2\}$. Ceci nous dit que si f a une racine dans $\mathbb{Q}$, nécessairement **(Exer)** celle-ci est dans l'ensemble

$$\left\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

On vérifie alors que $g(2) = 0$ et $g(\frac{1}{2}) = 0$. Ainsi, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (x - 2)(x - \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c).$$

Sans difficultés **(Exer)**, on montre alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (x-2)(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2x + 3) = \frac{1}{2}(x-2)(2x-1)(x^2 + x + 3)$$

et ceci est bien entendu **(Exer)** la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 5 *Trouver toutes les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x^2) = (x^2 + 1)f(x).$$

Exercice 6 *Soient $a \in]0, \pi[$, $n \geq 1$ un entier. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de f sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynôme*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^{2n} - 2\cos(na)x^n + 1. \end{aligned}$$