

L'optimisation sous toutes ses formes

Assale ADJE, Florent NACRY, maîtres de conférences UPVD

La mécanique du contact et l'économie sont à l'origine d'une grande variété de thèmes liés à l'optimisation et étudiés par les chercheurs du LAMPS.



Les origines

Les premières traces écrites de l'optimisation semblent remonter à l'Antiquité avec les fameux *éléments* d'Euclide puis avec Héron d'Alexandrie et son *principe du plus court chemin* en optique. Toutefois, il faut attendre le *calcul différentiel* apparu au milieu du XVII^e siècle pour une première étude systématique des problèmes de minimisation de quantités. La formulation mathématique du *Brachistochrone* au début du XVIII^e siècle conduit à la création du *calcul des variations* : la quantité optimale (optimum) recherchée est désormais une trajectoire. Le XIX^e siècle est marqué par l'intérêt croissant des économistes pour l'optimisation tandis que le XX^e siècle voit l'émergence de la *programmation linéaire*, de méthodes numériques et le prolongement du calcul des variations à travers l'*analyse variationnelle unilatérale* et le *contrôle optimal*.

De la formulation...

Un problème d'optimisation revient à minimiser une fonction dite *objectif* dont les variables peuvent être soumises à des *contraintes*. Le but est donc de déterminer

Les abeilles ont résolu le problème du carreau optimal : les alvéoles hexagonales minimisent la quantité de cire (Théorème du nid d'abeille - 1999)

« Nous cherchons à minimiser le temps consacré au transport de matériaux (transport optimal). »

un *ajustement optimal* des variables (qui respectent les contraintes !) conduisant à la *valeur la plus basse possible* pour la fonction objectif. Ces deux ingrédients constituent une *solution d'un problème d'optimisation*.

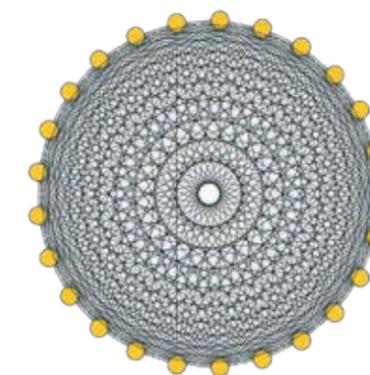
A titre d'exemples, nous cherchons à optimiser la forme d'un objet afin qu'il réponde à des spécifications (optimisation de formes) ; à minimiser le temps consacré au transport de matériaux (transport optimal) ; à déterminer la meilleure action possible pour conduire un système contrôlé d'un état initial à un état final tout en minimisant un critère une énergie, une perte... (contrôle optimal) ; à trouver le meilleur choix réalisable parmi un nombre fini (mais élevé) de configurations (optimisation combinatoire). L'optimisation mathématique est donc divisée en plusieurs classes selon la nature des variables (une forme, un temps, une commande, un entier), les propriétés de la fonction objectif (discrète ou continue ? linéaire ? lisse ? aléatoire ou déterministe ?) et la géométrie des contraintes (bornée ? convexe ?).

... à la résolution

Il convient, d'abord, de vérifier la compatibilité des contraintes puis l'existence de la solution. Le calcul de celle-ci requiert la mise en œuvre d'algorithmes rapides et précis, tenant compte de la classe du problème et des exigences liées au numérique : *erreur d'arrondi et stabilité*.

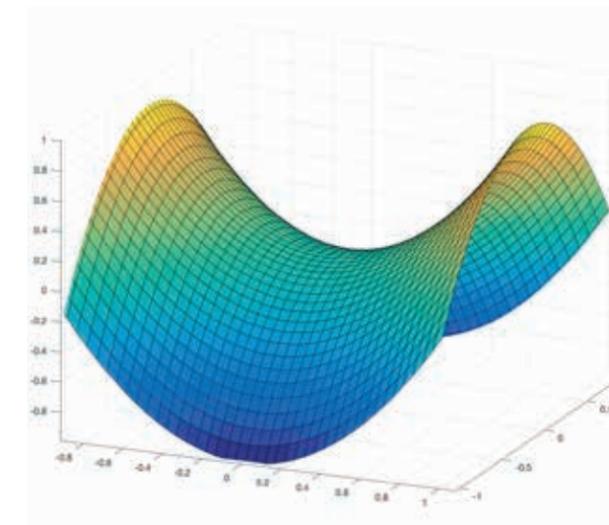
En optimisation continue, la liste des minimiseurs potentiels est réduite à l'aide de conditions dites *nécessaires d'optimalité* tandis que des arguments *topologiques* assurent l'existence d'une solution optimale. La description explicite d'un optimum est souvent un problème délicat : par exemple, comment détermineriez-vous la forme optimale permettant de paver un sol avec des carreaux de même surface tout en minimisant la quantité de joint utilisée ?

En optimisation discrète, si le problème est réalisable, la structure finie garantit l'existence d'une solution. L'aspect combinatoire exige des méthodes passant à l'échelle afin de limiter le temps de calcul. Par exemple, le fameux *problème du*



Dans le graphe complet à 25 sommets, le temps pour construire tous les cycles éligibles pour le problème du voyageur de commerce dépasse l'âge de l'univers.

Les conditions nécessaires d'optimalité détectent les points selles



voyageur de commerce consiste à extraire un plus court cycle parcourant une unique fois tous les sommets d'un graphe ; avec 25 sommets, la construction de tous les cycles candidats peut dépasser l'âge de l'univers (une microseconde par cycle) !

Au LAMPS

La mécanique du contact et l'économie sont à l'origine d'une grande variété de thèmes liés à l'optimisation et étudiés par les chercheurs de l'équipe MACO du LAMPS : l'analyse variationnelle unilatérale (ensembles et fonctions non-lisses, inéquations variationnelles), le contrôle optimal (hybrides, temps de crise) et la théorie des jeux (convexité tropicale, équilibres de Nash).

L'optimisation apparaît également comme un outil pour résoudre des problèmes d'informatique théorique pour l'équipe VENUS du LAMPS : la programmation linéaire en nombres entiers pour l'étude de la précision numérique et la vérification de réseau de neurones ; l'optimisation semi-définie et la théorie des jeux pour la vérification de systèmes en temps discret.