Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD4 - Matrices

1 Exercices du T.D.

Exercice 1 *Soit E l'ensemble*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(a) *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Donner une base de E et sa dimension.*
(b) *Vérifier que*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2.$$

(c) *Déterminer l'ensemble $\left\{M \in E : M^2 = -I_2\right\}$.*

Solution. (a) On montre sans difficultés **(Exer)** que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la famille $\mathcal{B} = \left\{ I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de E. Elle est évidemment libre dans $M_2(\mathbb{R})$ **(Exer)**. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E, ce qui nous dit que E est de dimension 2.
(b) L'égalité demandée est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.
(c) Notons $A = \left\{M \in E : M^2 = -I_2\right\}$ qui est non vide grâce à (b). Soit $M_0 \in A$. D'après (a), il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$M_0 = \lambda I_2 + \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors **(Exer)**

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \mu^2 & -2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On en déduit $\lambda = 0$ et $\mu \in \{-1, 1\}$. On a donc montré l'inclusion

$$A \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'inclusion renversée étant immédiate **(Exer)**, on a l'égalité

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

Exercice 2 *Soit*

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

Solution. Commençons par observer que T est une partie de $M_3(\mathbb{R})$ qui contient $0_{M_3(\mathbb{R})}$. Soient $M_1, M_2 \in T$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour chaque $i \in \{1,2\}$, il existe $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & b_i \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\lambda M_1 + \lambda M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & 0 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix}.$$

En posant $\alpha = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, $\beta = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $\gamma = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ et $\delta = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, on a

$$\lambda M_1 + \lambda M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \in T.$$

Ainsi, T est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Soit $M \in T$. Par définition de T, il existe $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Ceci s'écrit encore

$$M = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de T. Il reste à vérifier **(Exer)** que cette même famille est libre dans $M_3(\mathbb{R})$. Donc, $\mathcal{B}$ est une base de T et T est donc de dimension 4. ■

Exercice 3 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n.*

Solution. On vérifie **(Exer)** que $A^0 = I_3$, $A^1 = A$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq 3$, on a $A^k = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. ■

Exercice 4 *Etudier le rang de la famille $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de*

$$u_1 = (1,1,2), \quad u_2 = (2,1,0), \quad u_3 = (0,1,1) \quad \text{et} \quad u_4 = (3,3,3).$$

Donner une famille libre de $\mathbb{R}^3$ maximale qu'on peut extraire de $\mathcal{U}$ et la compléter si nécessaire pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Remarquons tout d'abord que $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$. On montre que **(Exer)** (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Donc, le rang r de $\mathcal{U}$ vaut $r = 3$. Evidemment, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est libre et contient 3 éléments. ■

Exercice 5 *Soient $u_1 = (2,3,0,0)$, $u_2 = (1,0,2,0)$ et $u_3 = (0,3,-4,0)$. Donner le rang de la famille (u_1, u_2, u_3). Donner une famille libre maximale extraite de (u_1, u_2, u_3). Compléter la famille (u_1, u_2, u_3) en une base de $\mathbb{R}^4$.*

Solution. Remarquons tout d'abord que $u_1 - 2u_2 = u_3$. Puisque (u_1, u_2) est évidemment **(Exer)** une famille libre de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2.$$

La famille (u_1, u_2) est une famille libre maximale extraite de (u_1, u_2, u_3). Posons $u_3' = (0,1,1,0)$ et $u_4 = (0,0,0,1)$. On vérifie que **(Exer)** (u_1, u_2, u_3', u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. ■

Exercice 6 *Soit $m \in \mathbb{R}$. Etudier le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1,-1,0,2)$, $u_2 = (0,1,m,2)$, $u_3 = (0,1,1,1)$ et $u_4 = (m,0,1,0)$.*

Solution. Méthode 1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Il vient tout de suite **(Exer)**

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 m = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 m + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On obtient alors **(Exer)**

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2m\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 m + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Puisque $4\lambda_2 m + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0$ et $4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$, on a

$$\lambda_3(4-3m) + 4\lambda_4 = 0.$$

D'autre part, observons que

$$\lambda_3 + 4m\lambda_4 = 0.$$

En combinant les deux égalités précédentes, on aboutit à

$$\lambda_4(m-1)(m-\frac{1}{3}) = 0.$$

Si $m \notin \{1, \frac{1}{3}\}$, on a $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$. Donc, (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ (donc de rang 4) lorsque $m \neq \frac{1}{3}$. Si $m \in \{\frac{1}{3}, 1\}$, on vérifie **(Exer)** que la famille est de rang 3.

Méthode 2. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & -2m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 1-m & -1 \\ 0 & m & 1 & -2m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & -4m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cas 1 **:** $1-m=0$, i.e., $m=1$. On a alors

$$\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3.$$

Cas 2 **:** $1-m \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(m-1) \\ 0 & 0 & 1-m^2 & -4m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(m-1) \\ 0 & 0 & 0 & -3m+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les deux cas combinés ensemble nous disent alors que **(Exer)**

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{cases} 3 & \text{si } m \in \left\{\frac{1}{3}, 1\right\} \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

Exercice 7 *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose*

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de $M_{a,b}$.

Solution. Fixons $a, b \in \mathbb{R}$.
Méthode 1. On a

$$\operatorname{rg}(M_{a,b}) = \dim \operatorname{vect}\{e_1, e_2, e_3\},$$

où $e_1 = (1, a, 1, b)$, $e_2 = (b, 1, a, 1)$ et $e_3 = (1, b, 1, a)$.
Cas 1 : $a \neq b$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 b + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_2 + \lambda_3 b = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 + \lambda_3 a = 0. \end{cases}$$

On déduit de cette égalité $\lambda_2(b - a) = 0$. Puisque $a \neq b$, on a $\lambda_2 = 0$. On a alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_3 b = 0, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. On peut alors conclure

$$\operatorname{rg}(M_{a,b}) = 3.$$

Cas 2 : $a = b$ et $a \notin \{-1, 1\}$.
Remarquons tout de suite que

$$(1, a, 1, b) = (1, b, 1, a).$$

On a donc

$$\operatorname{rg}(M_{a,b}) = \dim \operatorname{vect}\{(1, a, 1, a), (a, 1, a, 1)\}.$$

On vérifie sans difficultés que **(Exer)** la famille $((1, a, 1, a), (a, 1, a, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ car $a \notin \{-1, 1\}$. Donc, on a

$$\operatorname{rg}(M_{a,b}) = 2.$$

Cas 3 : $a = b$ et $a \in \{-1, 1\}$.
Il reste à observer que
$$\mathrm{rg}(M_{1,1}) = \dim \mathrm{vect}\,\{(1,1,1,1)\} = 1$$
et
$$\mathrm{rg}(M_{-1,-1}) = \dim \mathrm{vect}\,\{(1,-1,1,-1)\} = 1.$$
Méthode 2. On a
$$\mathrm{rg}(M_{a,b}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix}.$$
Cas 1 : $a = b$. Il vient alors
$$\mathrm{rg}(M_{a,b}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \{-1,1\} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}.$$
Cas 2 : $a \neq b$. Dans ce cas, on a
$$\mathrm{rg}(M_{a,b}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-ab & b-a \\ 0 & 1-b^2 & a-b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = 3.$$
■

Exercice 8 (*a*) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Déterminer les ensembles*
$$S = \{X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$
et
$$S' = \{X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}.$$
(*b*) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Déterminer les ensembles*
$$S = \{X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$
et
$$S' = \{X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}.$$
Donner une base du sous-espace vectoriel S' *de* $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution. (*a*) Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors
$$\begin{aligned} X \in S &\Leftrightarrow AX = B \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$. De même, on a

$$\begin{aligned} X \in S' &\Leftrightarrow AX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) On vérifie **(Exer)** que $S = \emptyset$ et $S' = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Exercice 9 (a) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Déterminer les ensembles*

$$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$

et

$$\left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Déterminer les ensembles*

$$S = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$

et

$$S_0 = \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

A t-on $S = \{X_1 + X_0 : X_0 \in S_0\}$ *pour n'importe quel* $X_1 \in S$ *?*

Solution. (a) On a

$$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) On a

$$S = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\} = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$S_0 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

En posant $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $S = \{X_1 + X_0 : X_0 \in S_0\}$. Fixons $X_2 \in S$ et montrons que

$$S = \{X_2 + X_0 : X_0 \in S_0\}.$$

Soit $U \in S$. Il existe $V \in S_0$ tel que $U = X_1 + V$. En écrivant

$$U = X_2 + (X_1 + V - X_2)$$

et en remarquant que $A(X_1 + V - X_2) = 0$, on voit tout de suite que **(Exer)** $U \in \{X_2 + X_0 : X_0 \in S_0\}$. On a donc l'inclusion

$$S \subset \{X_2 + X_0 : X_0 \in S_0\}.$$

L'inclusion renversée s'obtient de manière analogue **(Exer)**. On a donc l'égalité souhaitée. ■

Exercice 10 *Résoudre (par la méthode d'échelonnement) le système*

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3y + z = 8 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solution. On considère la matrice (augmentée)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

associé au système $(\mathcal{S})$. On applique **(Exer)** l'algorithme d'échelonnement sur A pour aboutir à une matrice

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons S l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$. D'après le cours, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \\ z = 2. \end{cases}$$

■

Exercice 11 (a) *Dans cette question, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n \geq 1$ un entier, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On suppose que A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ et que $AX = Y$. Montrer que $X = A^{-1}Y$.*
(b) *Les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$ sont-ils inversibles dans $M_3(\mathbb{R})$? Si oui, calculer les inverses.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, la dimension de

$$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : A_i X = 0\}.$$

Solution. (a) Puisque $AX = Y$ et que A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, on a

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}Y.$$

Ceci s'écrit encore

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}Y,$$

d'où l'égalité $X = A^{-1}Y$.
(b) Les matrices A_1 et A_3 sont inversibles dans $M_3(\mathbb{R})$ tandis que A_2 ne l'est pas. On a

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in \{1, 3\}$, on a évidemment

$$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : A_i X = 0\} = \{0\}$$

qui est de dimension 0. On a

$$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : A_2 X = 0\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est de dimension 1. ∎

2 Exercices supplémentaires

Exercice 12 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$A^5 + A = I_n.$$

Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 13 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer l'ensemble*

$$\{A \in M_n(\mathbb{K}) : \forall M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$