Licence de Mathématiques
L3 - Semestre 5, Mesure & Intégration
Année universitaire 2023-2024,
F. Nacry

Mesure produit - Théorèmes de Fubini

Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurable.

1. Montrer que
$$C := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R}_+ : f(x) > r\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+^\star} \{f \geq q\} \times [0, q[.$$
En déduire que $C \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer d'une façon différente que $C \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
3. Déterminer C_x et C^r pour $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
4. Etablir que
$$\int_X f d\mu = \int_{[0,+\infty[} \mu(\{f > r\}) d\lambda(r).$$
5. Justifier que si μ est à valeurs finies, on a
$$\int_{[0,+\infty[} \mu(\{f > r\}) d\lambda(r) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > r\}) dr.$$

Solution.

1. L'inclusion $\supset$ est claire. L'inclusion $\subset$ découle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On voit que $C = \{\varphi > 0\}$ avec $\varphi : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x,r) = f(x) - r \quad \text{pour tout } (x,r) \in X \times \mathbb{R}_+.$$
qui est $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
3. Pour $x \in X$, on a $C_x = \{r \in \mathbb{R}_+ : f(x) > r\}$. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on a $C^r = \{x \in X : f(x) > r\}$.
4. On a
$$(\mu \otimes \lambda)(C) = \int_X \lambda(C_x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(C^r) d\lambda(r).$$
Or, pour chaque $x \in X$
$$\lambda(C_x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{C_x}(r) d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(r) d\lambda(r) = \int_0^{f(x)} dr = f(x).$$
Il s'ensuit
$$(\mu \otimes \lambda)(C) = \int_X f(x) d\mu(x).$$
Par ailleurs, on a pour chaque $r \in \mathbb{R}_+$
$$\mu(C^r) = \mu(\{f > r\}),$$
d'où l'égalité
$$(\mu \otimes \lambda)(C) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f > r\}) d\lambda(r).$$

5. Supposons μ à valeurs finies. Il suffit d'observer que $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \mu(\{f > r\}) \in \mathbb{R}$ est à valeurs positives et borélienne (car monotone) pour conclure quant à l'égalité souhaitée.

■

Exercice 2 On note m la mesure de comptage sur l'espace mesuré $\big([0,1], \mathcal{P}([0,1])\big)$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$. On considère la fonction $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y) \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x).$$

Pourquoi le théorème de Fubini-Tonelli ne s'applique t-il pas ?

Exercice 3 On considère la fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(x) \Big) d\lambda(y) \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(y) \Big) d\lambda(x).$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique t-il pas ?

Exercice 4 On pose $A := [0,1] \times]0, +\infty[$ et on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) := e^{-y} \sin(2xy) \mathbf{1}_A(x,y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$ où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. A l'aide du théorème de Fubini, établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} \sin^2(y)}{y} dy = \frac{\ln(5)}{4}.$$

Solution.

1. La fonction f est bien sûr $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par ailleurs, en remarquant que

$$|f(x,y)| \leq e^{-y} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

et en exploitant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) d\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-y} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y) d\lambda(y) = \int_{]0,+\infty[} e^{-y} d\lambda(y).$$

Il reste à voir que cette dernière intégrale vaut l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy < +\infty$ pour conclure que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$.

2. D'après le théorème de Fubini, on a avec $I = \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2$

$$I = \int_{[0,1]} \Big(\int_{]0,+\infty[} e^{-y} \sin(2xy) d\lambda(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \Big(\int_{[0,1]} e^{-y} \sin(2xy) d\lambda(x) \Big) d\lambda(y).$$

A travers une double intégration par parties, on a pour tout $x \in]0,1]$

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)d\lambda(y) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)dy = \frac{2x}{4x^2+1}$$

puis

$$\int_{[0,1]} (\int_{]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)d\lambda(y))d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \frac{2x}{4x^2+1}d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{2x}{4x^2+1}dx = \frac{\ln(5)}{4}.$$

Par ailleurs, on a

$$\int_{]0,+\infty[} (\int_{[0,1]} e^{-y}\sin(2xy)d\lambda(x))d\lambda(y) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y}d\lambda(y).$$

On conclut que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y}d\lambda(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}\sin^2(y)}{y}dy = \frac{\ln(5)}{4}.$$

■

Exercice 5 Soient $p, q \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction borélienne de graphe G. Montrer que $\lambda_{p+q}(G) = 0$.

Solution. On rappelle que le graphe G de f est un borélien de $\mathbb{R}^{p+q}$. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_G(\cdot,\cdot)$ est évidemment borélienne ce qui permet d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et ainsi d'obtenir

$$\lambda_{p+q}(G) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \mathbf{1}_G d\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{1}_G(x,y)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ la fonction partielle $\mathbf{1}_G(x,\cdot)$ est nulle en tout point y de $\mathbb{R}$ sauf en $y = f(x)$ où elle vaut 1. Il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_G(x,y)d\lambda(y) = \lambda(\{f(x)\}) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On conclut que $\lambda_{p+q}(G) = 0$. ■

Exercice 6 Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis, $f_1 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $f_2 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$. On définit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \quad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Etablir que

$$\int_{X_1\times X_2} |f|d(\mu_1 \otimes \mu_2) = (\int_{X_1} |f_1|d\mu_1)(\int_{X_2} |f_2|d\mu_2).$$

En déduire $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.

Exercice 7 Soit $r > 0$ un réel. On note B_r la boule fermée de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ centrée en $(0,0)$ de rayon r, i.e.,

$$B_r := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 \leq r\right\}.$$

On s'intéresse à "l'aire de B_r", autrement dit au réel $\lambda_2(B_r)$.

1. Justifier que B_r est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que
$$\lambda_2(B_r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}dr.$$
3. Conclure que $\lambda_2(B_r) = \pi r^2$.

Solution.

1. L'ensemble B_r est fermé dans $\mathbb{R}^2$: il est donc un élément de $B(\mathbb{R}^2) = B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R})$.
2. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction $\mathbf{1}_{B_r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ qui est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurable (rappelons que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini) pour obtenir
$$\lambda_2(B_r) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2} d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{B_r}(x,y)d\lambda(x))d\lambda(y) =: I.$$
On a bien sûr
$$I = \int_{[-r,r]} (\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{B_r}(x,y)d\lambda(x))d\lambda(y).$$
En remarquant que pour $y_0 \in [-r,r]$, on a
$$(x, y_0) \in B_r \Leftrightarrow x^2 \leq r^2 - y_0^2 \Leftrightarrow -\sqrt{r^2 - y_0^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y_0^2},$$
il vient
$$I = \int_{[-r,r]} \Big(\int_{[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]} \mathbf{1}_{B_r}(x,y)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y).$$
Il s'ensuit
$$I = \int_{[-r,r]} 2\sqrt{r^2 - y^2}d\lambda(y).$$
L'intégrande de cette dernière intégrale étant borélienne et Riemann intégrable sur $[-r,r]$, on conclut
$$I = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}dy.$$
3. On a
$$I = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}dy = 4r\int_0^r \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}dy \underset{u=y/r}{=} 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}du.$$
Il s'agit alors de voir que
$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}du \underset{t=\text{Arcsin}(u)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \sin^2(t)\big)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{4}.$$

■

Exercice 8 On pose
$$I := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} d\lambda_2(x,y)$$

1. Justifier que I est bien définie.
2. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} d\lambda(y))d\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} d\lambda(x))d\lambda(y).$$
3. Conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{y^2-1}dy = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 9 Calculer $\lambda_3(]-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R})$ où λ_3 désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$.

Solution. Notons $H:=]-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}$. En exploitant la convention $0\times(+\infty)=(+\infty)\times 0=0$, on peut écrire

$$\lambda_3(]-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R})=\lambda(]-\infty,0])\times\lambda_2(\{0\}\times\mathbb{R})=(+\infty)\times\lambda_2(\{0\}\times\mathbb{R})=(+\infty)\times 0=0.$$

Sans avoir recours à une convention, on peut écrire

$$H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([-n,0]\times\{0\}\times[-n,n])$$

puis observer que

$$\lambda_3([-n,0]\times\{0\}\times[-n,n])=0 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

et enfin conclure

$$\lambda_3(H)=\lim_{n\to+\infty}\lambda_3([-n,0]\times\{0\}\times[-n,n])=0.$$

■

Exercice 10 Montrer que tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ avec $n\geq 2$ satisfait $\lambda_n(H)=0$.

Solution. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ et $(a_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}}$ une famille de réels tels que

$$H=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=\sum_{k\neq i}a_kx_k\right\}.$$

On a par Fubini-Tonelli

$$\lambda_n(H)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_H(x_1,\ldots,x_n)d\lambda_i(x_i)\Big)d\lambda_{n-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Or, on a pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_H(x_1,\ldots,x_n)d\lambda_i(x_i)=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{\sum_{k\neq i}a_kx_k\}}(x_i)d\lambda_i(x_i)=0.$$

On conclut que $\lambda_n(H)=0$. ■