

Intégrale de Lebesgue

Exercice 1 Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications étagées définies sur un ensemble non vide X à valeurs dans $Y \subset \mathbb{R}$.

- Justifier qu'il existe $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux familles non vides finies de parties de X formant une partition de X et deux familles $(y_i)_{i \in I}$ et $(z_j)_{j \in J}$ d'éléments de Y telles que

$$f = \sum_{i \in I} y_i \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j \in J} z_j \mathbf{1}_{B_j}.$$

- Montrer que

$$\lambda f + \mu g = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda y_i + \mu z_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

$$fg = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_i z_j \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}.$$

et

$$\max(f, g) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \max(y_i, z_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}.$$

Solution.

- Conséquence immédiate du caractère étagé de f et g .
- Soit $x \in X$. Puisque $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont deux partitions de X , il existe un unique $i_0 \in I$ et un unique $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{i_0}$ et $x \in B_{j_0}$. Ainsi, pour tout $(i, j) \in I \times J$ avec $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, on a $x \notin A_i \cap B_j$. Il s'ensuit

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda y_{i_0} + \mu z_{j_0} = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda y_i + \mu z_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}(x).$$

La première égalité désirée est établie. Pour les deux autres, on écrit de manière analogue

$$f(x)g(x) = y_{i_0}z_{j_0} = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_i z_j \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}(x)$$

et

$$\max(f(x), g(x)) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \max(y_i, z_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}(x).$$

■

Exercice 2 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $A \in \mathcal{T}$. Déterminer $\int_X \mathbf{1}_A d\mu$. Que dire si $A \notin \mathcal{T}$?

Solution. L'égalité $\mathbf{1}_A = 1.\mathbf{1}_A + 0.\mathbf{1}_{A^c}$ entraîne (via la convention " $0 \times \infty = 0$ ")

$$\int_X \mathbf{1}_A d\mu = 1.\mu(A) + 0\mu(A^c) = \mu(A).$$

Si $A \notin \mathcal{T}$, la fonction étagée $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -mesurable et l'intégrale $\int_X \mathbf{1}_A d\mu$ n'est alors pas définie. ■

Exercice 3 L'objectif de l'exercice est d'étudier l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure de comptage. Soit m la mesure de comptage sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Déterminer $\mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

3. Déterminer $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
4. Soit $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère l'élément de $\mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ donné par $\zeta_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ défini pour tout $m \in \mathbb{N}$ par

$$\zeta_n(k) := \begin{cases} f(k) & \text{si } k < n \text{ et } f(k) < +\infty \\ n & \text{si } f(k) = +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ est croissante et qu'elle converge simplement vers une fonction à déterminer.

5. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

6. Déterminer $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.
7. Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, calculer $\int_{\mathbb{N}} f dm$.

Solution.

1. Il s'agit des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ ayant un nombre fini de valeurs.
2. Il suffit de voir que

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{y \in f(\mathbb{N})} y \text{card}(\{f = y\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n);$$

3. Il s'agit des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
4. Soit $n \geq 1$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Si $f(k) = +\infty$, on a bien sûr $\zeta_n(k) \leq \zeta_{n+1}(k)$.

Supposons maintenant $f(k) < +\infty$. Si $k \geq n$, alors $\zeta_n(k) = 0 \leq \zeta_{n+1}(k)$. Lorsque $k < n$, on a évidemment $k < n+1$ et ceci entraîne $\zeta_n(k) = f(k) = \zeta_{n+1}(k)$.

Il reste à examiner la convergence simple. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Si $f(k) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n(k) = +\infty = f(k)$. Si $f(k) < +\infty$, on observe que pour tout $n > k$

$$|\zeta_n(k) - f(k)| = 0.$$

5. Le théorème de convergence monotone et les questions précédentes donnent

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} \zeta_n dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_n(k).$$

Si f ne prend pas la valeur $+\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_n(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).$$

Si f prend la valeur $+\infty$ en au moins un point $k_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_n(k) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n(k_0) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Dans les deux cas, on a bien

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).$$

6. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$. Les séries $\sum f^+(n)$ et $\sum f^-(n)$ convergent (dans $\mathbb{R}$) et ceci permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{N}} f dm = \int_{\mathbb{N}} f^+ dm - \int_{\mathbb{N}} f^- dm = \sum_{n=0}^{+\infty} f^+(n) - \sum_{n=0}^{+\infty} f^-(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f^+(n) - f^-(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

■

Exercice 4 L'objectif de l'exercice est d'étudier l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure de Dirac. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $a \in X$. On note δ_a la mesure de Dirac sur $(X, \mathcal{T})$.

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$, on a

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

2. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$, on a

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

3. Déterminer $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$.

4. Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$, calculer $\int_X f d\delta_a$.

Solution.

1. Soit $f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$. En revenant à la définition de l'intégrale d'une fonction positive étagée mesurable, il vient

$$\int_X f d\delta_a = \sum_{y \in f(X)} y \delta_a(\{f = y\}) = 1 \cdot f(a) = f(a).$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$. Par le théorème d'approximation, nous savons qu'il existe $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ qui converge simplement vers f . Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$\int_X f d\delta_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\delta_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a).$$

3. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. On a

$$\int_X |f| d\delta_a < +\infty \Leftrightarrow |f|(a) < +\infty \Leftrightarrow |f(a)| < +\infty.$$

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$ n'est nul autre que l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables.

4. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$. Par définition, on a

$$\int_X f d\delta_a = \int_X f^+ d\delta_a - \int_X f^- d\delta_a = f^+(a) - f^-(a) = f(a).$$

■

Exercice 5 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $(X, \mathcal{T})$. On note $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ la mesure définie sur $(X, \mathcal{T})$ par

$$\mu(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mu_n(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{T}.$$

1. Soit $f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \int_X f d\mu_n.$$

2. Soient $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On suppose que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{m,n}.$$

3. Soit $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(X, \mathcal{T})$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \int_X f d\mu_n.$$

Solution.

1. On écrit f sous sa forme standard

$$f = \sum_{y \in f(X)} y \mathbf{1}_{\{f=y\}}.$$

Par définition, on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{y \in f(X)} y \mu(\{f=y\}) = \sum_{y \in f(X)} \sum_{n=0}^{+\infty} y p_n \mu_n(\{f=y\}).$$

Rappelons que pour un entier $M \geq 0$, une suite $(u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M}$ de $[0, +\infty]$ et une suite $(v_m)_{0 \leq m \leq M}$ de $[0, +\infty[$, on a l'égalité

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{+\infty} v_m u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^M v_m u_{m,n}.$$

Il s'ensuit

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{y \in f(X)} y \mu_n(\{f=y\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f d\mu_n.$$

2. Notons μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$f_n(m) := u_{m,n} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

qui est évidemment une fonction $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ -mesurable. Notons que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$

$$f_n(m) = u_{m,n} \leq u_{m,n+1} = f_{n+1}(m),$$

i.e., la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Une application du théorème de convergence monotone donne alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(m) d\mu(m) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(m) d\mu(m)$$

et ceci s'écrit encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{m,n}.$$

3. Il existe une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ qui converge simplement vers f . Le théorème de convergence monotone donne

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \int_X f_n d\mu_k.$$

La croissance de la suite $(p_k \int_X f_n d\mu_k)_{n \in \mathbb{N}}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous permet d'exploiter la question précédente et d'écrire

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} p_k \int_X f_n d\mu_k.$$

Une nouvelle application de la convergence monotone donne alors pour chaque $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_k \int_X f_n d\mu_k = p_k \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu_k = p_k \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu_k = p_k \int_X f d\mu_k.$$

On conclut que

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \int_X f d\mu_k.$$

■

Exercice 6 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante convexe. **On rappelle** que Φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et satisfait

$$\Phi\left(\sum_{k=0}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^n t_k \Phi(x_k),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ et pour tout $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{k=0}^n t_k = 1$.

1. Soit $f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$.

- (a) Montrer qu'il existe une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de X d'éléments de $\mathcal{T}$ et une famille $(y_i)_{i \in I}$ de réels positifs tels que

$$f = \sum_{i \in I} y_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

(b) Montrer que

$$\Phi \circ f = \sum_{i \in I} \Phi(y_i) \mathbf{1}_{A_i}.$$

En déduire que $\Phi \circ f \in \mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$.

(c) Montrer que $\int_{\Omega} f d\mathbb{P} < +\infty$ et établir l'inégalité

$$\Phi\left(\int_{\Omega} f d\mathbb{P}\right) \leq \int_{\Omega} (\Phi \circ f) d\mathbb{P}.$$

2. Montrer que pour toute suite de réels positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée, on a

$$\Phi(\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(u_n)$$

3. Montrer que pour tout $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ avec $\int_{\Omega} g d\mathbb{P} < +\infty$, on a

$$\Phi\left(\int_{\Omega} g d\mathbb{P}\right) \leq \int_{\Omega} (\Phi \circ g) d\mathbb{P}.$$

Solution.

1. (a) Ceci découle du caractère étagé mesurable de f .

(b) Soit $\omega \in \Omega$. Il existe un unique $i_0 \in I$ tel que $\omega \in A_{i_0}$. Il s'ensuit

$$(\Phi \circ f)(\omega) = \Phi(f(\omega)) = \Phi(y_{i_0}) = \left(\sum_{i \in I} \Phi(y_i) \mathbf{1}_{A_i}\right)(\omega),$$

d'où l'on tire l'égalité voulue. Le caractère étagé mesurable de $\Phi \circ f$ en découle.

2. On a tout de suite

$$\int_{\Omega} f d\mathbb{P} = \sum_{i \in I} y_i \mathbb{P}(A_i) < +\infty.$$

De plus,

$$\Phi\left(\int_{\Omega} f d\mathbb{P}\right) = \Phi\left(\sum_{i \in I} y_i \mathbb{P}(A_i)\right) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \Phi(y_i),$$

où l'inégalité résulte de la convexité de Φ et du fait que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (ceci résultant du fait que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de Ω).

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante majorée de réels positifs. Par croissance de Φ , on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Phi(u_k) \leq \Phi\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n\right).$$

Il vient alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(u_n) \leq \Phi\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n\right).$$

Notons que si $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = 0$, l'égalité désirée a trivialement lieu. Supposons donc $s > 0$. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = s$. On a

$$\Phi(r_k) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(u_n) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

puis par continuité de Φ en s

$$\Phi(s) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(r_k) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(u_n).$$

On conclut que l'égalité énoncée a lieu.

4. Soit $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ avec $\int_{\Omega} g d\mathbb{P} < +\infty$. Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{EM}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ qui converge simplement vers g . Soit $\omega \in \Omega$. La suite $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, croissante qui converge vers $g(\omega)$ (en particulier, elle est bornée). La question précédente nous dit que

$$\Phi(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(f_n(\omega))$$

ce qui s'écrit encore

$$(\Phi \circ g)(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\Phi \circ f_n)(\omega).$$

Par convergence monotone, on a

$$\Phi\left(\int_{\Omega} g d\mathbb{P}\right) = \Phi\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P}\right).$$

La question précédente nous donne

$$\Phi\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P}\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi\left(\int_{\Omega} f_n d\mathbb{P}\right).$$

D'après la deuxième question, on a

$$\Phi\left(\int_{\Omega} f_n d\mathbb{P}\right) \leq \int_{\Omega} (\Phi \circ f_n) d\mathbb{P} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une nouvelle utilisation de la convergence monotone nous dit enfin que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} (\Phi \circ f_n) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} (\Phi \circ f) d\mathbb{P}.$$

On conclut que

$$\Phi\left(\int_{\Omega} g d\mathbb{P}\right) \leq \int_{\Omega} (\Phi \circ f) d\mathbb{P}.$$

■

Exercice 7 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $f_n \geq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose également qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Solution. Pour chaque $n \geq n_0$, on pose $g_n := f_{n_0} - f_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment croissante. Le fait que $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$ permet d'écrire d'une part

$$\int_X g_n d\mu = \int_X (f_{n_0} - f_n) d\mu = \int_X f_{n_0} d\mu - \int_X f_n d\mu \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et d'autre part

$$\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \int_X (f_{n_0} - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) d\mu = \int_X f_{n_0} d\mu - \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

On aboutit alors à

$$\int_X f_{n_0} d\mu - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f_{n_0} d\mu - \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

et ceci s'écrit encore (car $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

■

Exercice 8 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. On suppose que μ est finie, i.e., $\mu(X) < +\infty$. Montrer que $\frac{f}{1+|f|} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Solution. On a évidemment $|\frac{f}{1+|f|}| \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T}, \mu)$ puis

$$\int_X |\frac{f}{1+|f|}| d\mu \leq \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \leq \int_X d\mu = \mu(X) < +\infty.$$

Il s'ensuit $\frac{f}{1+|f|} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. ■

Exercice 9 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. L'objectif de l'exercice est d'établir que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) \leq \eta$, on ait $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

1. Justifier que $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -mesurable.
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f_n(x) := \min(|f(x)|, n) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (|f| - f_n) d\mu = 0.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Justifier qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\int_X (|f| - f_n) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

4. Conclure.

Solution.

1. La fonction $|f|$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -mesurable par composition de la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable avec la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui est continue.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante de limite simple $|f|$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs positives et $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -mesurable. D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Il s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (|f| - f_n) d\mu = 0.$$

3. La question précédente nous assure bien sûr alors de l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_X (|f| - f_n) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

4. Soit $A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$. On a

$$\int_A (|f| - f_n) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0,$$

en particulier

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A f_{n_0} d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_A n_0 d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leq n_0 \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Exercice 10 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que

$$f = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Solution. L'égalité évidente $f \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}} = f^+$ et notre hypothèse nous donne $\int_X f^+ d\mu = \int_{\{f \geq 0\}} f d\mu = 0$. Le fait que f^+ soit $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable entraîne alors $\mu(\{f^+ \neq 0\}) = 0$. Par ailleurs, on a

$$0 = \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = - \int_X f^- d\mu.$$

De même que ci-dessus, on a $\mu(\{f^- \neq 0\}) = 0$. Il reste à voir que

$$\{f \neq 0\} \subset \{f^+ \neq 0\} \cup \{f^- \neq 0\}$$

pour conclure que $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. ■

Exercice 11 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est σ -fini si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs strictement positives.

Solution. $\Rightarrow$, Supposons que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ soit σ -fini. Il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ qui est à la fois une partition de X et telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu(A_n) + 1)2^n} \mathbf{1}_{A_n}(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On a déjà vu que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X \frac{1}{(\mu(A_n) + 1)2^n} \mathbf{1}_{A_n}(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu(A_n) + 1)2^n} \mu(A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Il s'ensuit que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

$\Leftarrow$, Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs strictement positives. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := \{f \geq \frac{1}{2^n}\}$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment à valeurs dans $\mathcal{T}$, croissante et de réunion X . Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^n} \mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{1}{2^n} d\mu = \int_{A_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu < +\infty$$

et ceci entraîne bien sûr que $\mu(A_n) < +\infty$. On conclut que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est σ -fini. ■

Exercice 12 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et satisfait $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$. Montrer que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Solution. La $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurabilité de f découle du fait que f est la limite simple de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables. Il reste à écrire

$$\int_X |f| d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} |f_n| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n| d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$$

pour conclure que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. ■

Exercice 13 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ pour tout $x \in X$ et $\mu(X) > 0$. Etablir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

Solution. Il suffit d'écrire

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = +\infty \times \mu(X) = +\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

pour aboutir au résultat souhaité. ■

Exercice 14 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ minorée par une fonction $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

Solution. On applique le lemme de Fatou à la suite $(f_n - g)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(X, \mathcal{T})$:

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n - g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f_n - g) d\mu.$$

Par ailleurs, on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n - g) = +\infty$ puis (car $\mu(X) > 0$)

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n - g) d\mu = +\infty.$$

Ceci et l'égalité

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f_n - g) d\mu = - \int_X g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

nous donnent alors

$$- \int_X g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

Il reste à voir que $-\int_X g d\mu \in \mathbb{R}$ pour conclure que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

■

Exercice 15 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|f| \leq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu.$$

A t-on l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|f| \geq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu$?

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n := \mathbf{1}_{\{|f| \leq n\}} f$ qui est évidemment $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable (du fait de $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$). On a de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$ et

$$|g_n(x)| \leq |f(x)| \quad \text{pour tout } x \in X, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il reste à voir que $\int_X |f| d\mu < +\infty$ pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée et aboutir à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|f| \leq n\}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

On considère $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}, \delta_0))$ où δ_a est la mesure de Dirac en 0. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante égale à $1/2$ est un élément de $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. On a

$$\int_X f d\delta_0 = f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_{\{|f| \geq n\}} f d\delta_a = \int_{\emptyset} f d\delta_a = 0.$$

■

Exercice 16 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n := \{|f| \geq n\} \quad \text{et} \quad B_n := \{n \leq |f| < n+1\}.$$

1. Montrer que

$$\int_X |f| d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{B_n} |f| d\mu.$$

En déduire que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ si et seulement si la série $\sum n\mu(B_n)$ converge.

2. Montrer que $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exploiter cette égalité pour obtenir pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N n\mu(B_n) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) - N\mu(A_{N+1}).$$

En déduire que si la série $\sum \mu(A_n)$ converge, alors $\sum n\mu(B_n)$ converge.

3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(N+1)\mathbf{1}_{A_{N+1}} \leq |f|$. Conclure que la série $\sum \mu(A_n)$ converge lorsque la série $\sum n\mu(B_n)$ converge.

Solution.

1. On commence par observer que la suite des $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a ses éléments deux à deux disjoints et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Ceci et le fait que $A \ni \mathcal{T} \mapsto \int_A |f| d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ soit une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$ donnent

$$\int_X |f| d\mu = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} |f| d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{B_n} |f| d\mu.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la définition de B_n entraîne évidemment

$$n\mu(B_n) \leq \int_{B_n} |f| d\mu \leq (n+1)\mu(B_n).$$

On en arrive alors à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(B_n) \leq \int_X |f| d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\mu(B_n). \quad (1)$$

Il découle de ceci que l'inclusion $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ entraîne la convergence de la série $\sum \mu(B_n)$. Par ailleurs, si la série $\sum n\mu(B_n)$ converge, alors les inégalités $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \mu(X) < +\infty$ nous disent que $\sum (n+1)\mu(B_n)$ converge et nous pouvons conclure par (1) que $\int_X |f| d\mu < +\infty$, i.e., $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

2. On a bien sûr pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Fixons $N \in \mathbb{N}$. On a (car μ est finie)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N n\mu(B_n) &= \sum_{n=0}^N n\mu(A_n \setminus A_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^N n\mu(A_n) - \sum_{n=0}^N n\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^N n\mu(A_n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)\mu(A_n) \\
&= -N\mu(A_{N+1}) + \sum_{n=1}^N \mu(A_n).
\end{aligned} \tag{2}$$

Il vient alors $\sum_{n=0}^N n\mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$. Il découle de ceci que si la série $\sum \mu(A_n)$ converge, alors la série $\sum n\mu(B_n)$ converge.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par définition de A_{N+1} , on a $(N+1)\mathbf{1}_{A_{N+1}} \leq |f|$ et ceci nous dit que $N\mu(A_{N+1}) \leq (N+1)\mu(A_{N+1}) \leq \int_X |f|d\mu =: c$. Supposons que $\sum n\mu(B_n)$ converge. D'après la Question 1., on a l'inclusion $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$, i.e., $c < +\infty$. En revenant à (2), nous voyons que

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) \leq c + \sum_{n=0}^N n\mu(B_n)$$

et ceci nous permet de conclure que la série $\sum \mu(A_n)$ converge.

■

Exercice 17 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{ne^{-x}}{1+nx} \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n d\lambda,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[$.

Solution. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1/n) + x} \leq \frac{e^{-x}}{(1/(n+1)) + x} = f_{n+1}(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Ceci et le fait que f_n soit borélienne pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous permet d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$l := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0, +\infty[} f d\lambda \geq \int_{[0, 1]} f d\lambda,$$

où $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est définie par

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La divergence de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ et le caractère borélien de la fonction $]0, 1] \ni x \mapsto \frac{e^{-x}}{x} \in \mathbb{R}_+$ nous dit alors que $\int_{[0, 1]} f d\lambda = +\infty$. On conclut que $l = +\infty$. ■

Exercice 18 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n : I := [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

1. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $f_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(I, \mathcal{B}(I))$.
2. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_I f_n(x) d\lambda(x) = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Solution.

1. Soit $n \geq 1$ fixé. Puisque f_n est borélienne, l'intégrale $\int_I |f_n| d\lambda$ est bien définie et

$$\int_I |f_n| d\lambda \leq \int_I n d\lambda(x) = n\lambda(I) = n < +\infty.$$

En particulier, on a $f_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$.

2. Soit $n \geq 1$. La continuité de f_n entraîne son caractère Riemann intégrable sur $I = [0, 1]$. Ceci, la question précédente et une application directe du cours nous donnent alors l'égalité attendue.
3. Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On définit $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$g(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in I$$

qui est à valeurs positives, continue donc borélienne et satisfait

$$\int_I g(x) d\lambda(x) = \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2).$$

On a d'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Le théorème de convergence dominée donne alors $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ (ce dont on disposait déjà par ailleurs) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) d\lambda(x) = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \int_I g(x) d\lambda(x) = \frac{1}{2} \ln(2).$$

■

Exercice 19 Pour tout $n \geq 1$, on définit $f_n : I :=]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) := \frac{1 - \cos^n(x)}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n d\lambda$.

Solution.

1. Soit $n \geq 1$ fixé. On examine le caractère fini de l'intégrale $\int_I |f_n| d\lambda$ qui est bien définie car f_n est borélienne. Il suffit d'observer que

$$\int_I \left| \frac{1 - \cos^n(x)}{1 + x^2} \right| d\lambda(x) \leq \int_{[0, +\infty[} \frac{2}{1 + x^2} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + x^2} dx < +\infty,$$

où l'égalité résulte du caractère borélien et positif de l'intégrande considérée.

2. On définit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

qui est bien sûr borélienne. Il est clair que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement λ -presque partout vers f : plus précisément

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I \setminus N,$$

avec $N := \{x \in I : \cos(x) \in \{-1, 1\}\}$ qui est dénombrable et donc de mesure de Lebesgue nulle. Comme ci-dessus, on a pour chaque entier $n \geq 1$

$$|f_n(x)| \leq 2f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et $\int_I 2f(x) d\lambda(x) < +\infty$. Il reste à appliquer le théorème de convergence dominée pour pouvoir écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n d\lambda = \int_I f(x) d\lambda(x).$$

■

Exercice 20 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) d\lambda(x).$$

Solution. On a tout de suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Par ailleurs, on voit que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [a, b]$

$$\left| \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) \right| \leq |f(x)| \ln(e + |x|) \leq |f(x)| \ln(e + \max(|a|, |b|)),$$

d'où

$$\int_{[a, b]} \left| \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) \right| d\lambda \leq \ln(e + \max(|a|, |b|)) \int_{[a, b]} |f(x)| d\lambda(x) < +\infty.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) d\lambda(x) = \int_{[a, b]} f(x) d\lambda(x).$$

■

Exercice 21 Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $\sum \alpha_n$ converge absolument et que $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par un réel $\beta > 0$. On considère pour chaque $n \geq 1$, la fonction $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(k) := \alpha_k \left(1 + \frac{\beta_k}{n}\right)^n \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

1. Justifier que pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f qui est $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.
3. Etablir que pour tout $n \geq 1$

$$|f_n(k)| \leq e^{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$.

Solution.

1. C'est immédiat compte-tenu du fait que $\mathbb{N}$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, on a tout de suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$. Supposons $x \neq 0$. On a $\ln(1 + \frac{x}{n}) \sim \frac{x}{n}$ d'où l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{x}{n}) - x = 0.$$

Il s'ensuit $e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} \sim e^x$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$. On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(k) = \alpha_k e^{\beta_k} =: f(k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La fonction f est bien sûr $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

3. On a pour tout $n, k \in \mathbb{N}$

$$|f_n(k)| \leq |\alpha_k| |1 + \frac{\beta_k}{n}|^n = |\alpha_k| e^{n \ln |1 + \frac{\beta_k}{n}|} \leq |\alpha_k| e^{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})} = |\alpha_k| e^{n \frac{\beta}{n}} = |\alpha_k| e^{\beta}.$$

4. Puisque $\sum |\alpha_k| e^{\beta}$ converge, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage μ . Ceci nous permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} \alpha_k (1 + \frac{\beta_k}{n})^n d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_k (1 + \frac{\beta_k}{n})^n d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \alpha_k e^{\beta_k} d\mu(k).$$

On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (1 + \frac{\beta_k}{n})^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{\beta_k}.$$

■

Exercice 22 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, x) := e^{-t^2} \cos(tx) \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(tx) d\lambda(t) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée F' de F sous une forme intégrale.

2. Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. Conclure.

Solution.

1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\cdot, x)$ est borélienne (car continue) et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\cdot, x)| d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t).$$

De plus, le caractère borélien de la fonction à valeurs positives $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2} \in \mathbb{R}$ et la convergence de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ entraînent

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

On aboutit alors à $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ la fonction $f(t, \cdot)$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(f(t, \cdot))' = \partial_2 f(t, \cdot)$. Elle satisfait pour tout $t, x \in \mathbb{R}$

$$|\partial_2 f(t, x)| = |-te^{-t^2} \sin(tx)| \leq |t|e^{-t^2}.$$

Notons que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} |t|e^{-t^2} dt$ converge puisque

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T te^{-t^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-T^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Un argument de parité donne alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$. Cette convergence et le caractère borélien de $\mathbb{R} \ni t \mapsto |t|e^{-t^2} \in \mathbb{R}$ permettent d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} |t|e^{-t^2} d\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2} dt < +\infty.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. La fonction F est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f(t, x) d\lambda(t) = - \int_{\mathbb{R}} te^{-t^2} \sin(tx) d\lambda(t) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, la convergence absolue de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx) dt$ et le caractère borélien de l'intégrande nous disent que

$$F'(x) = - \int_{\mathbb{R}} te^{-t^2} \sin(tx) d\lambda(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

2. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx) dt = \left[-\frac{\sin(tx)e^{-t^2}}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}xF(x).$$

Ainsi, F est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + \frac{1}{2}xy = 0$.

3. La résolution de l'équation différentielle ci-dessus donne un réel C tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4}}$. Il reste à voir que $F(0) = \sqrt{\pi}$ pour conclure que

$$F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 23 (Riemann intégrabilité généralisée V.S. Lebesgue intégrabilité) Les symboles suivants ont-ils un sens

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{]0, +\infty[} \frac{\sin(x)}{x} d\lambda(x)?$$

Solution. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'intégrale généralisée de Riemann $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge. Par ailleurs, une intégration par parties donne pour tout $X > 1$

$$\int_1^X \frac{\sin(x)}{x} dx = -\left[\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

En combinant cette égalité, la convergence absolue de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\cos(X)}{X} = 0$ on obtient la convergence de l'intégrale généralisée de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On conclut que l'intégrale généralisée de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

On note λ la mesure de Lebesgue sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$. La fonction f étant borélienne, l'intégrale $I := \int_{\mathbb{R}_+^*} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| d\lambda(x)$ a un sens. De plus, on a en posant $\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}[$, on voit que

$$I \geq \int_{\Omega} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| d\lambda(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \lambda(\Omega) = +\infty.$$

On conclut que l'intégrale $\int_{]0, +\infty[} \frac{\sin(x)}{x} d\lambda(x)$ n'est pas définie. ■

Exercice 24 On pose $I :=]0, +\infty[$ et on note λ la mesure de Lebesgue sur l'espace mesurable $(I, \mathcal{B}(I))$. On considère la fonction $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, x) := e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{pour tout } (t, x) \in I^2.$$

1. Montrer que pour chaque $x \in I$, $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$.
2. Etablir que la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := \int_I f(t, x) d\lambda(t) \quad \text{pour tout } x \in I$$

est continue sur I .

3. Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$.
4. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = C - \text{Arctan}(x)$.
5. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

6. Déterminer la valeur de C .

Solution.

1. On a pour tout $x \in I$,

$$\int_I |f(t, x)| d\lambda(t) \leq \int_I e^{-tx} d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x},$$

où l'avant dernière égalité résulte du caractère positif et borélien de l'intégrande. On en déduit que $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ pour tout $x \in I$.

2. On a vu précédemment que $f(\cdot, x)$ est borélienne pour tout $x \in I$. Par ailleurs, il est clair que $f(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in I$. Enfin, pour $\bar{x} \in I$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \bar{x}$ de sorte que l'on puisse écrire pour tout $x \in]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon[$,

$$\int_I |f(t, x)| d\lambda(t) \leq \int_I e^{-tx} d\lambda(t) \leq \int_I e^{-t(\bar{x} - \varepsilon)} d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t(\bar{x} - \varepsilon)} dt < +\infty.$$

On conclut que F est continue en $\bar{x}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que F est dérivable sur $J :=]\varepsilon, +\infty[\subset I$. On a vu que $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ pour tout $x \in J$. De plus, il est évident que $f(t, \cdot)$ est dérivable pour tout $t \in I$. Enfin, on a pour tout $x' \in J$ et pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') \right| \leq e^{-tx'} \leq e^{-t\varepsilon}$$

et $\int_I e^{-t\varepsilon} d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon} dt < +\infty$. Le théorème de dérivabilité sur un intervalle ouvert sous le signe somme nous dit alors que F est dérivable sur J et pour tout $\bar{x} \in J$,

$$F'(\bar{x}) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}) d\lambda(t) = - \int_I e^{-t\bar{x}} \sin(t) d\lambda(t).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est un réel quelconque strictement positif, nous pouvons conclure que F est dérivable sur I et pour tout $\bar{x} \in I$,

$$F'(\bar{x}) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}) d\lambda(t) = - \int_I e^{-t\bar{x}} \sin(t) d\lambda(t).$$

4. Soit $x \in I$. L'intégrale généralisée de Riemann $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$ est absolument convergente et l'intégrande étant borélienne, on a

$$\int_I e^{-tx} \sin(t) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

Par ailleurs, une double intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

On conclut que $F(\cdot) = C - \text{Arctan}(\cdot)$ pour une certaine constante réelle C .

5. C'est une application directe de la convergence dominée. On a tout d'abord

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nt} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Par ailleurs, on a bien sûr $\int_I e^{-t} d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ ainsi que

$$\left| e^{-nt} \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq e^{-nt} \leq e^{-t} \quad \text{pour tout } (n, t) \in \mathbb{N}^* \times I.$$

On aboutit alors à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I e^{-nt} \frac{\sin(t)}{t} d\lambda(t) = 0.$$

6. Ce qui précède nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0$$

et

$$F(n) = C - \operatorname{Arctan}(n) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Il s'ensuit $C = \frac{\pi}{2}$.

■

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$f(x) := \sqrt{|x|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2} d\lambda_f(x)$.