Licence de Mathématiques
L3 - Semestre 5, Mesure & Intégration
Année universitaire 2023-2024,
F. Nacry

Mesures positives

Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\lambda \in]0, +\infty[$. Montrer que $\lambda\mu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$. Que dire si $\lambda = 0$?

Solution. Le fait que $\lambda\mu$ soit une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ est évident lorsque $\lambda > 0$. Supposons maintenant que $\lambda = 0$. Si μ ne prend pas la valeur $+\infty$, alors $\lambda\mu$ n'est nulle autre que la mesure nulle sur $(X, \mathcal{T})$. Lorsque μ prend la valeur $+\infty$, le symbole $\lambda\mu$ n'est pas bien défini. ■

Exercice 2 Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

Solution. Nous allons montrer que pour une suite double $(u_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, on a l'égalité

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

On peut supposer que la suite considérée est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit $M \in \mathbb{N}$ fixé. La suite $(u_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs positives, la limite $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{m,n}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour chaque $m \in \{0, \ldots, M\}$ et vaut par définition $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$. On peut alors écrire

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} u_{m,n}.$$

Par ailleurs, on a évidemment pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} u_{m,n} \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

Tout ceci mis ensemble nous dit que

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

Le fait que M soit un entier naturel quelconque donne alors

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

L'inégalité renversée s'obtient de manière analogue.

Notons $\nu := \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n$. On a tout de suite

$$\nu(\emptyset) = (\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n)(\emptyset) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(\emptyset) = 0.$$

Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. On a par σ-additivité

$$\nu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \mu_n(A_m).$$

Le résultat sur les séries doubles à termes positifs démontré ci-dessus donne alors

$$\nu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty}\nu(A_m).$$

Ceci traduit que ν est σ-additive. On conclut que ν est une mesure sur $(X,\mathcal{T})$. ■

Exercice 3 Soit X un ensemble non vide muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(X)$. Montrer que la fonction $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ définie par

$$\mu(A) := \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\big(X,\mathcal{P}(X)\big)$. Montrer que l'espace mesuré $(X,\mathcal{P}(X),\mu)$ est σ-fini si et seulement si X est dénombrable.

Solution. On a bien sûr $\mu(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X, deux à deux disjointes. Notons $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il s'agit d'établir que

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n).$$

On peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq \emptyset$. Il s'ensuit $\sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n) = +\infty$. Par ailleurs, en choisissant pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$, nous voyons (en gardant à l'esprit le fait que $A_k \cap A_l = \emptyset$ pour $l,k \in \mathbb{N}$ distincts) que A est un ensemble infini, i.e., $\mu(A) = +\infty$).

Supposons que $(X,\mathcal{P}(X),\mu)$ soit σ-fini. Alors, on peut écrire $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(X)$ et $\mu(A_n) < +\infty$. Il s'ensuit que X est l'union dénombrable d'ensembles finis et donc dénombrable. Réciproquement, supposons que X soit dénombrable. Alors, X est l'union dénombrable de ses singletons, en particulier $(X,\mathcal{P}(X),\mu)$ est σ-fini. ■

Exercice 4 Soient X un ensemble non vide et $a \in X$. Montrer que la fonction $\delta_a : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ par

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\big(X,\mathcal{P}(X)\big)$.

Solution. C'est évident. ■

Exercice 5 Soient $\mathcal{T}_X$ une tribu sur X, μ une mesure sur $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ un espace mesurable et $f : X \to Y$ une application. Montrer que si f est $(\mathcal{T}_X,\mathcal{T}_Y)$-mesurable, alors l'application $m_f : \mathcal{T}_Y \to [0,+\infty]$ définie par

$$m_f(B) := \mu\big(f^{-1}(B)\big) \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{T}_Y$$

est une mesure sur $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

Solution. La fonction m_f est bien définie par $(\mathcal{T}_X,\mathcal{T}_Y)$-mesurabilité de f. On a bien sûr

$$m_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_Y$ deux à deux disjoints. On a tout de suite

$$m_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)).$$

Par ailleurs, on vérifie que $(f^{-1}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}_X$ deux à deux disjoints. Il vient alors

$$m_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_f(B_n).$$

On conclut que m_f est une mesure sur l'espace mesurable $(Y, \mathcal{T}_Y)$. ■

Exercice 6 On considère la mesure de comptage m sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Que dire de $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} m(T_n)$ et $m(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n)$?

Solution. La suite considérée est bien entendu décroissante. On vérifie par ailleurs que $m(T_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n) = 0$. ■

Exercice 7 L'objectif de cet exercice est d'établir qu'il n'existe pas de mesure μ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit à la fois non nulle, finie et invariante par translation (i.e., pour tout $P \subset \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(P + \{n\}) = \mu(P)$).

Nous allons procéder par l'absurde en supposant qu'il existe une telle mesure μ.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.
2. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(\{n\}) = \mu(\{n_0\})$.
3. Calculer $\mu(\mathbb{N})$.
4. Conclure.

Exercice 8 Pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soit $\mu_1 := \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3$. Justifier que μ_1 est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_1([0, \frac{3}{2}])$. Montrer que μ_1 est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Soit $\mu_2 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}\delta_n$. Justifier que μ_2 est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_2(\{1, \ldots, k\})$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire $\mu_2(\mathbb{N})$.
3. Soit $\mu_3 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Justifier que μ_3 est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_3([\frac{1}{2}, 2])$ puis $\mu_3(\mathbb{R})$.

Solution.

1. Le fait que μ_1 soit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ découle de l'Exercice 2. Avec $I := [0, \frac{3}{2}]$, on a

$$\mu(I) = \frac{1}{2}\delta_1(I) + \frac{1}{4}\delta_2(I) + \frac{1}{4}\delta_3(I) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

   Le fait que μ soit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ découle des égalités

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\delta_1(\mathbb{R}) + \frac{1}{4}\delta_2(\mathbb{R}) + \frac{1}{4}\delta_3(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 = 1.$$

2. Le fait que μ_2 soit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ découle de l'Exercice 2. Pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mu_2(\{1, \ldots, k\}) = \sum_{n=1}^{k} \frac{3}{2^n}$. Il s'ensuit

$$\mu_2(\mathbb{N}) = \mu_2(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{1, \ldots, k\}) = \lim_{k\to+\infty} \mu_2(\{1, \ldots, k\}) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 3.$$

3. Le fait que μ_3 soit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ découle de l'Exercice 2. On pose $J := [\frac{1}{2}, 2]$. On a pour tout $n \geq 1$,
$$\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(J) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit
$$\mu(J) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$
D'autre part, puisque pour tout $n \geq 1$, $\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\mathbb{R}) = 1$, on a
$$\mu_3(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

■

Exercice 9 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ une fonction à valeurs positives étendues. On considère les assertions suivantes :

(i) Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, on a l'implication
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ décroissante (pour l'inclusion $\subset$) on a l'implication
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (pour l'inclusion $\subset$) d'éléments de $\mathcal{T}$, on a
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (pour l'inclusion $\subset$) d'éléments de $\mathcal{T}$, on a
$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

1. Montrer que si μ satisfait (i) et (ii), alors μ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.
2. On suppose que μ est à valeurs finies et satisfait (i) et (iii). Montrer que (iv) a lieu.
3. On suppose que μ est à valeurs finies et satisfait (i) et (iv). Montrer que (ii) a lieu.
4. Conclure.

Solution.

1. Supposons que (i) et (ii) ait lieu. Commençons par noter que la suite constante $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n := \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est décroissante pour l'inclusion et satisfait $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. D'après (ii), on a $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$, autrement dit $\mu(\emptyset) = 0$. Il reste à établir que μ est σ-additive. Fixons $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$B_n := \bigcup_{m=0}^{+\infty} A_m \setminus \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{T}.$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment décroissante pour l'inclusion $\subset$. De plus, elle vérifie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Une application de (ii) nous dit alors que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$. Par ailleurs, (i) nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\bigcup_{m=0}^{+\infty} A_m) = \mu((\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \cup B_n) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) + \mu(B_n).$$

La propriété (i) et une récurrence immédiate montre que pour tout $l \in \mathbb{N}$ et pour toute suite finie $(C_k)_{0\leq k\leq l}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a $\mu(\bigcup_{k=0}^{l} C_k) = \sum_{k=0}^{l} \mu(C_k)$. On en déduit

$$\mu(\bigcup_{m=0}^{+\infty} A_m) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) + \mu(B_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il reste à passer à la limite pour aboutir à

$$\mu(\bigcup_{m=0}^{+\infty} A_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).$$

On conclut que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

2. Supposons que μ soit à valeurs finies et que (i) et (iii) ont lieu. On a pour tout $A, B \in \mathcal{T}$ avec $A \subset B$,

$$\mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

puis (car μ est à valeurs finies) $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n := X \setminus B_n$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment croissante pour l'inclusion. Il vient alors

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n)\big) = \mu(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(X) - \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Ceci et (iii) donnent

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(X) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \big(\mu(X) - \mu(A_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(X \setminus A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

3. On suppose que μ est à valeurs finies et satisfait (i) et (iv). En exploitant (i), il vient

$$\mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset),$$

puis (car μ est à valeurs finies) $\mu(\emptyset) = 0$. Ceci et (iv) entraînent bien sûr (ii).

4. On a les équivalences suivantes dans le cas où μ est à valeurs finies : (i) et (ii) si et seulement si μ mesure sur X si et seulement si (i) et (iii) si et seulement si (i) et (iv).

■

Exercice 10 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) La mesure μ est σ-finie.

(b) Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$ et $\mu(A_n) < +\infty$.

Solution. Les implications $(b) \Rightarrow (a)$ et $(c) \Rightarrow (a)$ sont évidentes. Montrons les implications réciproques.

Montrons que $(a) \Rightarrow (b)$. Supposons donc qu'il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Il est clair que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'élements de $\mathcal{T}$ et de réunion X. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(B_n) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) < +\infty.$$

Montrons l'implication $(a) \Rightarrow (c)$. Supposons donc une nouvelle fois qu'il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_n \cap (\bigcap_{k=0}^{n-1} X \setminus A_k)$. On a vu au TD1 que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ qui a pour réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ et qui est une partition de X. Il reste à voir que $\mu(B_n) \leq \mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour conclure la démonstration de l'implication $(a) \Rightarrow (c)$. ■

Exercice 11 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. On rappelle que

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}.$$

1. Montrer que
$$\mu(\varliminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$
2. On suppose $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$. Montrer que
$$\mu(\varlimsup_{n\to+\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$
3. **(Borel-Cantelli)** Montrer que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, alors
$$\mu(\varlimsup_{n\to+\infty} A_n) = 0.$$

Solution.

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \bigcap_{k\geq n} A_k$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour l'inclusion, nous avons
$$\mu(\varliminf_{n\to+\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n). \tag{1}$$
Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$, l'inclusion évidente $B_n \subset A_k$ valide pour chaque entier $k \geq n$ nous permet d'écrire
$$\mu(B_n) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k).$$
Il vient alors par passage à la borne supérieure
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \mu(A_k) = \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n). \tag{2}$$
Il reste à combiner (1) et (2) pour conclure.
2. On suppose $c := \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante pour l'inclusion et $c = \mu(B_0) < +\infty$ nous avons
$$\mu(\varlimsup_{n\to+\infty} A_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n). \tag{3}$$

D'autre part, on a évidemment pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B_n) = \mu(\bigcup_{k \geq n} A_k) \geq \mu(A_{k_0}) \quad \text{pour tout } k_0 \geq n.$$

Ceci entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(B_n) \geq \sup_{k \geq n} \mu(A_k)$. Par passage à la borne supérieure, il vient alors

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} \mu(A_k) = \limsup_{n \to +\infty} \mu(A_n). \tag{4}$$

En combinant (3) et (4), on aboutit à l'inégalité désirée.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$. Il est clair que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion $\subset$) d'éléments de $\mathcal{A}$. Par ailleurs, on a

$$\mu(B_0) = \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty.$$

Il s'ensuit

$$\mu(\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n).$$

Il reste à voir que

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k)$$

et à invoquer le fait que le reste d'une série numérique convergente converge vers 0 pour conclure que $\mu(\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n) = 0$.

■

Exercice 12 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

1. Montrer que si $\mu(X) > 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que f soit bornée sur A.
2. Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Solution.

1. Supposons que $\mu(X) > 0$. On note pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $B_n := [-n, n]$ et $A_n := f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ (cette dernière inclusion découlant de l'hypothèse de mesurabilité sur f). Il est clair que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion $\subset$) et satisfait

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = f^{-1}(\mathbb{R}) = X.$$

Il vient alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(X) > 0$$

et ceci nous donne en particulier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) > 0$. Il reste à voir que f est bornée sur $A_{n_0} \in \mathcal{A}$ pour conclure.

2. On note pour chaque entier $n \geq 1$, $B_n := \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $A_n := f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ (cette dernière inclusion étant une conséquence directe de l'hypothèse de mesurabilité de f). La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est clairement une suite croissante de parties satisfaisant

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = f^{-1}(\mathbb{R}^\star) = \{f \neq 0\}$$

et ceci permet d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu(\{f \neq 0\}) > 0.$$

On déduit de ceci l'existence d'un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\mu(A_{n_0}) > 0$. Il reste à voir que pour tout $x \in A_{n_0}$, $|f(x)| > \frac{1}{n_0}$.

■

Exercice 13 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f et f_n sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables pour tout $n \geq 1$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge selon la mesure μ lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose que $\mu(X) < +\infty$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f. On fixe un réel $\varepsilon > 0$.
   (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}$. Montrer que
   $$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0.$$
   (b) Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
   (c) Conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge selon la mesure μ.
2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge selon la mesure μ.
   (a) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\mu(\left\{|f_{s(n)} - f| > \frac{1}{n+1}\right\} < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n := \left\{|f_{s(n)} - f| \leq \frac{1}{n+1}\right\}$. Montrer que $\mu(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n^c) = 0$.
   (c) Conclure que $(f_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f.

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien sûr
   $$\lim_{k\to+\infty} \mu(\left\{|f_k - f| > \frac{1}{n+1}\right\} = 0.$$
   Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,
   $$\mu(\left\{|f_k - f| > \frac{1}{n+1}\right\} < \frac{1}{2^n}.$$
   Il est alors clair qu'on peut construire une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
   $$\mu(\left\{|f_{s(n)} - f| > \frac{1}{n+1}\right\} < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
2. La convergence de la série $\sum \frac{1}{2^n}$ permet d'appliquer Borel-Cantelli qui donne l'égalité attendue.

3. Soit $x \in X \setminus \overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n^c$. On a donc par définition de limite supérieure ensembliste

$$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k^c.$$

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $x \in A_k$, i.e., $\left|f_{s(k)}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{k+1}$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n_0$ et $\frac{1}{k+1} \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Il s'ensuit que pour tout $k \geq N$, $\left|f_{s(k)}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{k+1} \leq \varepsilon$. On conclut que $f_{s(k)}(x) \to f(x)$.

■

Exercice 14 Une partie incluse dans une partie négligeable est-elle négligeable ? L'intersection de parties négligeables est-elle négligeable ? Le complémentaire d'une partie négligeable est-il négligeable ? L'union dénombrable de parties négligeables est-elle négligeable ?

Exercice 15 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. On note C l'ensemble des $x \in X$ tels que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et appartienne à $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p,q\geq n} \{x \in X : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}\}.$$
2. En déduire que $C \in \mathcal{T}$.
3. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout si et seulement si $\mu(C^c) = 0$.
4. **(Egorov)** On suppose qu'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui soit $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et une partie $\Omega \in \mathcal{T}$ avec $\mu(\Omega) = 0$ telles que
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in X \setminus \Omega.$$

   L'objectif dans la suite est de construire pour chaque réel $\varepsilon > 0$, une partie $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.

   Pour tout $k, n \geq 1$ entiers, on note
$$A_n^k := \bigcap_{p\geq n} \{x \in X : |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\}.$$

   (a) Etablir que pour tout $k, n \geq 1$ entiers, $A_n^k \in \mathcal{T}$.

   (b) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que la suite $(A_n^k)_{n\geq 1}$ est croissante (pour l'inclusion $\subset$).

   (c) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que
$$X \setminus \Omega \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n^k$$
   et en déduire que
$$\mu(X) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n^k).$$

   (d) Soient $\varepsilon > 0$ un réel et $k \geq 1$ un entier. Justifier l'existence d'un entier (qui dépend de k et de ε) $N(k, \varepsilon) \geq 1$ tel que
$$\mu(A_{N(k,\varepsilon)}^k) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

(e) Pour chaque réel $\varepsilon > 0$, on pose

$$A_\varepsilon = \bigcup_{k\geq 1} X \setminus A^k_{N(k,\varepsilon)}.$$

Montrer que $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ et $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

(f) Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Etablir que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$, i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

(g) Enoncer le résultat que vous venez d'établir (connu sous le nom de Théorème d'Egorov).

Solution.

1. Il s'agit simplement d'observer que la complétude de l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nous dit que pour chaque $x \in X$, on a l'inclusion $x \in C$ si et seulement si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $k, p, q \geq 1$ entiers, la $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurabilité de $|f_p - f_q|$ nous dit que

$$A_{k,p,q} := \left\{ x \in X : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{T}.$$

La stabilité de $\mathcal{T}$ par intersections dénombrables nous alors dit que pour chaque entier $k \geq 1$ et chaque entier $n \geq 1$, on a l'inclusion

$$\bigcap_{p,q\geq n} A_{k,p,q} \in \mathcal{T}.$$

La stabilité de $\mathcal{T}$ par unions dénombrables et l'inclusion précédente donnent pour chaque entier $k \geq 1$

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p,q\geq n} A_{k,p,q} \in \mathcal{T}.$$

Une nouvelle utilisation de la stabilité de $\mathcal{T}$ par intersections dénombrables permet de conclure que

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p,q\geq n} A_k \in \mathcal{T}.$$

3. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ μ-presque partout, alors C^c est μ-négligeable, i.e., il existe $N \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $C^c \subset N$. L'inclusion $C^c \in \mathcal{T}$ donnée par la question précédente entraîne alors $\mu(C^c) = 0$. La réciproque est évidente.
4. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Dans les questions (a)-(b)-(c) et (d), on considère $k \geq 1$ un entier fixé.

(a) Soit $n \geq 1$ un entier fixé. L'ensemble A^k_n est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$. En effet, pour tout entier $p \geq n$, la $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurabilité de $|f_p - f|$ donne

$$\{x \in X : |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\} \in \mathcal{T}.$$

(b) Evident.

(c) Soit $x \in X \setminus \Omega$, i.e., $x \in X$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Il existe alors un entier $n \geq 1$ tel que pour tout entier $p \geq n$, $|f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$. On en déduit que $x \in \bigcup_{n\geq 1} A^k_n$ puis

$$X \setminus \Omega \subset \bigcup_{n\geq 1} A^k_n.$$

En combinant l'inégalité $\mu(X) < +\infty$, l'égalité $\mu(\Omega) = 0$, l'inclusion ci-dessus et la propriété de croissance donnée par la question précédente, on aboutit à

$$\mu(X) = \mu(X \setminus \Omega) \leq \mu(\bigcup_{n\geq 1} A^k_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A^k_n).$$

(d) Soient $\varepsilon > 0$ un réel et $k \geq 1$ un entier fixés. La question précédente et l'inégalité $\mu(X) < +\infty$ permettent d'écrire

$$\mu(X) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n^k) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Il découle de ceci l'existence d'un entier $N(k, \varepsilon) \geq 1$ tel que $\mu(A_{N(k,\varepsilon)}^k) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k}$.

(e) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{5}$$

Fixons un réel $\eta > 0$. Choisissons un entier $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} \leq \eta$. Soit $n \geq N(k, \varepsilon)$ un entier. Pour tout $x \in X \setminus A_\varepsilon$, on a évidemment $x \in A_{N(k,\varepsilon)}^k$ ce qui entraîne

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \eta.$$

On en déduit

$$\sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \eta.$$

La convergence (5) est donc établie.

(f) Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ-presque partout vers f.
Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ telle que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.

■

Exercice 16 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = g_n$ μ-presque partout. Montrer que $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ μ-presque partout.

Solution. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $X \setminus \{f_n = g_n\} = \{f_n \neq g_n\}$ est μ-négligeable, i.e., pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $N_n \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(N_n) = 0$ et $\{f_n \neq g_n\} \subset N_n$. Notons que l'hypothèse de mesurabilité entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{f_n \neq g_n\} = (f_n - g_n)^{-1}(\mathbb{R}^\star) \in \mathcal{T}$, en particulier $\mu(\{f_n \neq g_n\}) = 0$. Posons $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \neq g_n\} \in \mathcal{T}$. Il est clair que $\mu(A) = 0$, en particulier A est μ-négligeable. De plus, par définition de A, on a pour tout $x \in X \setminus A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = g_n(x)$. Cette dernière égalité donne évidemment que pour tout $x \in X \setminus A$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$. ■

Exercice 17 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, μ, ν deux mesures finies sur X (i.e., $\mu(X) < +\infty$ et $\nu(X) < +\infty$). On suppose que pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

L'objectif de cet exercice est d'établir la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{T}, \big(\mu(A) < \eta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon\big).$$

Nous allons procéder **par l'absurde**.

1. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ avec $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ et $\nu(A_n) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ satisfaisant
$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
3. Etablir que
$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0 \quad \text{et} \quad \nu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \geq \varepsilon.$$
4. Conclure.

Exercice 18 On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Rappeler la valeur de $\lambda(I)$.
2. La mesure λ est-elle σ-finie ?
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lambda(\{x\})$.
4. Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Que vaut $\lambda(D)$?
5. Déterminer $\lambda(\mathbb{Q})$, $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q})$ et $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
6. Déterminer $\lambda\big(\bigcup_{n\geq 1}[n, n + \frac{1}{2^n}]\big)$.
7. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si U est borné, alors $\lambda(U) < +\infty$. Que pensez-vous de la réciproque ?
8. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une fonction bijective. Justifier que
$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$$
est un ouvert dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) \leq \varepsilon$. Conclure.
9. Soit $r \in [0, +\infty]$. Peut-on construire une partie D dense de $\mathbb{R}$ avec $\lambda(D) = r$?
10. Donner un exemple de borélien B de $\mathbb{R}$ tel que
$$\lambda(\operatorname{int} B) < \lambda(B) < \lambda(\operatorname{adh} B).$$

Exercice 19 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation (i.e., pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(B + a) = \mu(B)$). On suppose $c := \mu([0,1]) \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que $\mu([0, \frac{1}{n}[) \leq \frac{c}{n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\mu(\{0\}) = 0$ puis $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Etablir que $\mu([0, n]) = cn$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\mu([0, q]) = cq$ pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$.
4. Montrer que $\mu([0, x]) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Conclure que $\mu = c\lambda$.

Solution.

1. Soit $n \geq 1$ un entier. On commence par voir que
$$[0,1] \supset \bigcup_{k=0}^{n-1} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[.$$
Il s'ensuit
$$c = \mu([0,1]) \geq \mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[).$$

Notons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\left\{\frac{k}{n}\right\} + [0, \frac{1}{n}[= [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[.$$

Le fait que μ soit invariante par translations donne alors

$$c \geq \sum_{k=0}^{n-1} \mu([0, \frac{1}{n}[) = n\mu([0, \frac{1}{n}[)$$

ou encore

$$\frac{c}{n} \geq \mu([0, \frac{1}{n}[).$$

Puisque $([0, \frac{1}{m}[)_{m\geq 1}$ est une suite décroissante et $\mu([0,1[) < +\infty$, on a

$$\mu(\{0\}) = \mu(\bigcap_{m\geq 1} [0, \frac{1}{m}[) \leq \lim_{m\to+\infty} \mu([0, \frac{1}{m}[) \leq \lim_{m\to+\infty} \frac{c}{m} = 0,$$

i.e., $\mu(\{0\}) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a bien sûr $\{x\} = \{0\} + \{x\}$ puis

$$\mu(\{x\}) = \mu(\{0\} + \{x\}) = \mu(\{0\}) = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si $n = 0$, l'égalité désirée a lieu. Si $n \geq 1$, on peut écrire

$$\mu([0,n]) = \mu(\{n\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} [k, k+1[) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} [k, k+1[) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu([k, k+1]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu([0,1]) = nc.$$

3. Soit $a \in \mathbb{Q}_+$. On peut écrire $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \geq 1$. On a d'après la question précédente

$$\mu([0, aq]) = \mu([0,p]) = cp.$$

Par ailleurs, on a

$$[0, aq] = \{aq\} \cup \bigcup_{k=0}^{q-1} [ka, (k+1)a[$$

puis

$$\mu([0, aq]) = \sum_{k=0}^{q-1} \mu([ka, (k+1)a[) = \sum_{k=0}^{q-1} \mu([0, a[) = q\mu([0,a]).$$

On conclut

$$cp = \mu([0, aq]) = q\mu([0,a])$$

ou encore

$$ca = c\frac{p}{q} = \mu([0,a]).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $(q_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de $\mathbb{Q}_+$ avec $\lim_{n\to+\infty} q_n = x$. On a

$$\mu([0,x]) = \lim_{n\to+\infty} \mu([0, q_n]) = \lim_{n\to+\infty} cq_n = cx.$$

5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On a

$$\mu([0, b-a]) = c(b-a)$$

puis par invariance par translations

$$\mu([a,b])\mu(\{a\} + [0, b-a]) = c(b-a) = c\lambda([a,b]).$$

Ceci et le fait que la μ mesure d'un singleton soit nulle nous dit que μ et $c\lambda$ coïncident sur la classe $\mathcal{I}$ des intervalles de $\mathbb{R}$. Cette classe est stable par intersections (finies) et engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On conclut que $\mu = c\lambda$.

■