Licence de Mathématiques
L3 - Semestre 5, Mesure & Intégration
Année universitaire 2023-2024,
F. Nacry

Applications mesurables

Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$ une application $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-mesurable. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur Y avec $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_Y$, alors f est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}')$-mesurable. De même, montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur X avec $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}'$, alors f est $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_X)$-mesurable.

Solution. C'est une conséquence directe de la définition d'application mesurable. ■

Exercice 2 Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces mesurables. Montrer que toute application constante $f : X \to Y$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-mesurable.

Solution. Soit $f : X \to Y$ une application constante. On note y sa valeur, i.e., $y \in Y$ et $f(x) = y$ pour tout $x \in X$. Pour $B \in \mathcal{T}_Y$, on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \begin{cases} X & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

en particulier $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$. Ceci montre que f est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-mesurable. ■

Exercice 3 Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$ une application. On suppose que $f(Y)$ est un ensemble fini (une telle application est alors appelée *application étagée*). Est-ce que f est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-mesurable ?

Exercice 4 Soient $f : X \to Y$ une application non constante entre deux ensembles non vides X et Y. On suppose que X est muni de la tribu $\{\emptyset, X\}$. On considère $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{B}$ pour que f ne soit pas $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable.

Solution. Nous allons montrer que f n'est pas $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement s'il existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tel que $B_0 \cap f(X) \neq \emptyset$ et $f(X) \not\subset B_0$.

$\Rightarrow$, Supposons que f ne soit pas $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable. Il existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tel que $f^{-1}(B_0) \notin \{\emptyset, X\}$. Puisque $f^{-1}(B_0) \neq \emptyset$, il existe $x_1 \in X$ tel que $f(x_1) \in B_0$. Le fait que $f^{-1}(B_0) \neq X$ nous dit qu'il existe $x_2 \in X$ tel que $f(x_2) \notin B_0$. On a donc bien $B_0 \cap f(X) \neq \emptyset$ et $f(X) \not\subset B_0$.

$\Leftarrow$, Supposons que $B_0 \cap f(X) \neq \emptyset$ et $f(X) \not\subset B_0$ pour un certain $B_0 \in \mathcal{B}$. Soit $y_1 \in f(X) \cap B_0$ et $y_2 \in f(X)$ avec $y_2 \notin B_0$. Si f était $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable, alors $f^{-1}(B_0) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B_0) = X$ et choisissant pour chaque $i \in \{1, 2\}$, $x_i \in X$ tel que $f(x_i) = y_i$, il viendrait $x_1 \in f^{-1}(B_0)$ et $x_2 \notin f^{-1}(B_0)$. ■

Exercice 5 Soient X un ensemble non vide, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{T} := f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f. Montrer que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, la fonction $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 6 Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces mesurables et A une partie de X. On suppose que $\{0, 1\} \subset Y$. Montrer que A est une partie $\mathcal{T}_X$-mesurable (i.e., $A \in \mathcal{T}_X$) si et seulement si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : X \to Y$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-mesurable.

Exercice 7 Soit $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ où pour une partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A := \{-x : x \in A\}$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = x^3.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions f et g sont-elles $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{T})$-mesurables ? $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables ? $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurables ?

Solution.

1. Vérifions les points (i), (ii) et (iii) de la définition d'une tribu.
   (i) On a bien sûr $\emptyset \in \mathcal{T}$.
   (ii) Pour $A \in \mathcal{T}$, on a $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{T}$ ainsi que
   $$-(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus (-A) = \mathbb{R} \setminus A.$$
   Ceci justifie la stabilité de $\mathcal{T}$ par complémentaires.
   (iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. On a évidemment $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et
   $$-(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$
   Il s'ensuit que $\mathcal{T}$ est stable par unions dénombrables.
2. - Les fonctions f et g étant boréliennes et $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous avons que f et g sont $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{T})$-mesurables.
   - Avec $A = \{e\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on voit que $f^{-1}(A) = \{1\} \notin \mathcal{A}$. Ainsi, f n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
   - Avec $A = \{-e, e\} \in \mathcal{T}$, on voit que $f^{-1}(A) = \{1\} \notin \mathcal{A}$. Ainsi, f n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.
   - Avec $A = \{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on voit que $g^{-1}(A) = \{1\} \notin \mathcal{A}$. Ainsi, g n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
   - Soit $A \in \mathcal{T}$. L'imparité de g et l'égalité $A = -A$ donne $g^{-1}(A) = -(g^{-1}(A))$. D'autre part, le caractère borélien de g nous dit que $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On conclut que g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

■

Exercice 8 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a $\{f < r\} := \{x \in X : f(x) < r\} \in \mathcal{T}$. A t-on le même résultat avec les $\{f \leq r\}$, $\{f > r\}$, $\{f \geq r\}$, $\{f = r\}$ avec $r \in \mathbb{R}$? Peut-on remplacer $\mathbb{R}$ par d'autres parties de $\mathbb{R}$?

Exercice 9

1. Montrer que $B := \{x \in \mathbb{R} : -1 < x\cos(e^x) + x^2 \leq 3\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Soit D une partie non dénombrable de $\mathbb{R}$. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in D, |x - y| < e^{-y}\}$ est-il un borélien de $\mathbb{R}$?
3. Montrer que $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{Q}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{D} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^5$.

Solution.

1. On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) := x\cos(e^x) + x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
   Il est clair que $B = f^{-1}([-1, 3])$ et que f est borélienne (car continue). Il s'ensuit que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme image réciproque par f de l'intervalle $[-1, 3] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. L'ensemble A s'écrit encore
   $$A = \bigcup_{y\in D} \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < e^{-y}\}$$
   qui est l'union d'ouverts de $\mathbb{R}$ et donc un ouvert de $\mathbb{R}$ (en particulier, un borélien de $\mathbb{R}$).

3. Il suffit d'écrire
$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \left(\{x\} \times \{x\} \right)$$
qui est une réunion dénombrable de boréliens de $\mathbb{R}^2$ (pour $x \in \mathbb{Q}$, le singleton $\{x\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et le produit cartésien $\{x\} \times \{x\}$ est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).
4. L'ensemble en question est un produit cartésien de boréliens de $\mathbb{R}$: c'est donc un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^5)$).

■

Exercice 10 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Pour $a > 0$, on définit $f_a : X \to \mathbb{R}$ par
$$f_a(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a & \text{si } f(x) > a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$
Montrer que f_a est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Solution. On a $f_a := a.\mathbf{1}_{\{f>a\}} + f.\mathbf{1}_{\{-a \leq f \leq a\}} + (-a).\mathbf{1}_{\{f<-a\}}$. Les indicatrices sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables puisque $\{f > a\} \in \mathcal{T}$, $\{-a \leq f \leq a\} \in \mathcal{T}$ et $\{f < -a\} \in \mathcal{T}$. On conclut que f_a est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable par somme et produit de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. Remarquons qu'il était également possible d'utiliser le principe du recollement. ■

Exercice 11 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$
est borélienne.

Solution. Il suffit de procéder comme dans l'Exercice 10 à l'aide de l'égalité $h = f.\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} + g.\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. ■

Exercice 12 Montrer que la partie entière ent : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 13 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables. Montrer que si $f+g$ est bien définie, alors $f+g$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. En déduire que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$ et $\{f = g\}$ sont $\mathcal{T}$-mesurables (i.e., appartiennent à $\mathcal{T}$).

Solution. Supposons que $f + g$ soit bien définie. On pose $I := \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\}$ et $D := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus I$. On définit $s : D \to \overline{\mathbb{R}}$ par
$$s(x, y) := x + y \quad \text{pour tout } (x, y) \in D.$$
On considère également la fonction $\varphi : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ définie par
$$\varphi(x) := (f(x), g(x)) \quad \text{pour tout } x \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Notons que la continuité de s entraîne évidemment que s est $(\mathcal{B}(D), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. Par ailleurs, la fonction φ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable par $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurabilité de f et g. Sa restriction $\varphi^{|D}$ est alors $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(D))$-mesurable puisque $\mathcal{B}(D)$ est la tribu induite par $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur D. Il reste à voir que $f + g = s \circ \varphi^{|D}$ pour conclure que $f + g$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable.

Posons $Z := \{f = g = +\infty\} \cup \{f = g = -\infty\} \in \mathcal{T}$. Remarquons que
$$A := \{f < g\} = \{x \in X \setminus Z : f(x) < g(x)\} = \left\{x \in X \setminus Z : f_{|X \setminus Z}(x) - g_{|X \setminus Z}(x) < 0\right\}.$$

En définissant $h : X \setminus Z \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$$h(x) := f_{|X\setminus Z}(x) + (-g_{|X\setminus Z})(x) \quad \text{pour tout } x \in X \setminus Z$$

on voit que $A = h^{-1}([-\infty, 0[)$. Notons que $f_{|X\setminus Z}$ et $-g_{|X\setminus Z}$ sont $(\mathcal{T}_{X\setminus Z}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables, où $\mathcal{T}_{X\setminus Z}$ est la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur $X \setminus Z$. D'après ce qui précède, la fonction h est $(\mathcal{T}_{X\setminus Z}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. Il s'ensuit que $A \in \mathcal{T}_{X\setminus Z} \subset \mathcal{T}$.

Posons $Y = (\{f = -\infty\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{f = +\infty\} \cap \{g = +\infty\})$. On a bien sûr

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = \{x \in X \setminus Y : f(x) < g(x)\} =: A.$$

Par ailleurs, $f_1 := f_{|X\setminus Y}$ et $g_1 := -g_{|X\setminus Y}$ sont $(\mathcal{T}_{X\setminus Y}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables avec $\mathcal{T}_{X\setminus Y}$ la tribu induite sur $X \setminus Y$ par $\mathcal{T}$ et sont telles que $f_1 + g_1$ est bien définie. Il s'ensuit que $f_1 + g_1$ est $(\mathcal{T}_{X\setminus Y}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable, en particulier

$$A = (f_1 + g_1)^{-1}(]0, +\infty]) \in \mathcal{T}_{X\setminus Y} \subset \mathcal{T},$$

où la dernière inclusion résulte de $X \setminus Y \in \mathcal{T}$. ∎

Exercice 14 Soit X un ensemble contenant au moins deux éléments. Donner un exemple de tribu $\mathcal{T}$ sur X et de fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $|f|$ soit $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et f non-$(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Solution. Soient $a, b \in X$ distincts. On considère la tribu grossière $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in X$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable car $f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \notin \mathcal{T}$. Néanmoins, la fonction $|f|$ est constante et donc $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. ∎

Exercice 15 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := \sqrt{f(x)} \quad \text{pour tout } x \in X$$

est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Est-elle $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurable ?

Solution. On a $g = k \circ h$ avec $k := \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $h := f^{|\mathbb{R}_+} : X \to \mathbb{R}_+$. La fonction k est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable (car continue) et h est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurable (car h est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable). On conclut que g est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable par composition. La fonction g n'est pas $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurable car $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{R}$. ∎

Exercice 16 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Montrer que le graphe et l'épigraphe d'une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est une partie mesurable de $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 17 Montrer que toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa dérivée f' est borélienne.

Solution. Pour chaque entier $n \geq 1$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^{-1}(f(x + n^{-1}) - f(x)) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est clairement $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} n^{-1}(f(x + n^{-1}) - f(x)).$$

La limite de fonctions $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables étant $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, on conclut que f' est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. ∎

Exercice 19 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{T}$-mesurable (i.e., un élément de $\mathcal{T}$).

Solution. Notons Ω l'ensemble des $x \in X$ tels que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. On a évidemment

$$\Omega = X \setminus \left\{ x \in X : \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) < \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \right\}.$$

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ donne alors

$$\Omega = X \setminus \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\left\{ x \in X : \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) < q \right\} \cap \left\{ x \in X : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > q \right\}).$$

Il reste à invoquer le fait que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables pour conclure quant à la mesurabilité recherchée. ■

Exercice 20 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, (E, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurables de X dans E qui converge simplement vers une fonction $f : X \to E$.

1. Soit A une partie non vide de E. Montrer que la fonction $d_A : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$d_A(x) := \inf_{a\in A} d(a, x) \quad \text{pour tout } x \in E$$

   est continue et satisfait

$$\operatorname{adh} A = \{x \in E : d_A(x) = 0\}.$$

2. Montrer que pour tout fermé de E, on a

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left\{ x \in X : d_F(f_n(x)) \leq \frac{1}{p} \right\}.$$

3. Conclure que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable.

Exercice 21 Soient (X, d) un espace métrique, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{u,v\in B[x,\delta]} |f(u) - f(v)|,$$

où $B[x, \delta]$ désigne la boule fermée de l'espace métrique (X, d) centrée en x de rayon $\delta > 0$.

1. Soit $x \in X$. Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.
2. Montrer que pour tout réel $\eta > 0$, l'ensemble $\{x \in X : \omega_f(x) < \eta\}$ est un ouvert de X.
3. Conclure que l'ensemble des points de X où f est continue est un borélien de X.

Solution.

1. $\Rightarrow$, Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, on peut trouver un réel $\delta_0 > 0$ tel que

$$|f(x) - f(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } u \in B[x, \delta_0].$$

   Il s'ensuit

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f(x)| + |f(x) - f(v)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } u, v \in B[x, \delta_0].$$

   On en déduit

$$\sup_{u,v\in B[x,\delta_0]} |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$$

puis

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{u,v\in B[x,\delta]} |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

$\Leftarrow$, Supposons $\omega_f(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\omega_f(x) < \varepsilon$, il existe un réel $\delta_0 > 0$ tel que

$$\omega_f(x) \leq \sup_{u,v\in B[x,\delta_0]} |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Observons que la deuxième inégalité donne sans difficultés

$$|f(u) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in B[x, \delta_0]$$

ce qui traduit la continuité de f en x.

2. Fixons un réel $\eta > 0$. On peut supposer $U := \{\omega_f < \eta\} \neq \emptyset$. Soit $\overline{x} \in U$. Puisque $\omega_f(\overline{x}) < \eta$, il existe un réel $\delta_0 > 0$ tel que

$$\sup_{u,v\in B[\overline{x},\delta_0]} |f(u) - f(v)| < \eta.$$

Nous allons montrer que $B := B[\overline{x}, \frac{\delta_0}{2}] \subset U$. Soit $x \in B$. Observons que pour tout $w \in B[x, \frac{\delta_0}{2}]$

$$d(\overline{x}, w) \leq d(\overline{x}, x) + d(x, w) \leq \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0,$$

autrement dit $B[x, \frac{\delta_0}{2}] \subset B[\overline{x}, \delta_0]$. Ainsi, on a

$$|f(u) - f(v)| \leq \eta \quad \text{pour tout } u, v \in B[x, \frac{\delta_0}{2}],$$

d'où l'on tire facilement

$$\inf_{\delta>0} \sup_{u,v\in B[x,\delta]} |f(u) - f(v)| < \eta,$$

i.e., $x \in U$. On aboutit alors à $B \subset U$, en particulier U est ouvert dans (X, d).

3. Ceci découle des deux questions précédentes et de l'égalité évidente

$$\{\omega_f = 0\} = \bigcap_{n\geq 1} \left\{\omega_f < \frac{1}{n}\right\}.$$

$\blacksquare$