Florent Nacry

Je remercie Olivier Ley de l'INSA de Rennes pour cette feuille d'exercices.

Séries de Fourier

Exercice 1 *Dans chacun des cas suivants, tracer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considérée et donner son développement en série de Fourier (on précisera les points où f est égale à sa série de Fourier).*

(1) f *est* 2π*-périodique et* $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } t \in \{0, \pi\}. \end{cases}$

En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(2) f *est* 2π*-périodique et* $f(t) = t$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi[$.

(3) f *est* 2π*-périodique et* $f(t) = |t|$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi[$.

En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(4) f *est* 2π*-périodique et* $f(t) = t^2$ *pour tout* $t \in [-\pi, \pi[$.

(5) f *est* 1*-périodique et* $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\frac{1}{2}, 0[\\ t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$

(6) f *est* 5*-périodique et* $f(t) = 4t$ *pour tout* $t \in [0, 5[$.

Solution. (1) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. Puisque f est impaire, 2π-périodique et continue par morceaux **(Exer)**, sa série $S(f)$ de Fourier de f est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \sum b_n(f) \sin(n \cdot),$$

où pour tout entier $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Une intégration par parties permet d'obtenir pour tout entier $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

$$b_{2n}(f) = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n-1}(f) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

D'autre part, puisque f est C^1 par morceaux **(Exer)**, la série de Fourier de f converge simplement en chaque $t \in \mathbb{R}$ et sa somme vaut $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$. On en déduit

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin\big((2n+1)t\big) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on a

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}^+) + f(\frac{\pi}{2}^-)}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

i.e.,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(2) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. Puisque f est impaire, 2π-périodique et continue par morceaux **(Exer)**, sa série $S(f)$ de Fourier est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \sum b_n(f)\sin(n\cdot)$$

où pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

On vérifie par une intégration par parties **(Exer)** que pour tout entier $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Il reste à voir que f est C^1 par morceaux **(Exer)** pour pouvoir écrire que $S(f)(t)$ converge simplement vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(3) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique, sa série de Fourier $S(f)$ est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\cdot),$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt.$$

On a tout de suite

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \pi.$$

De plus, par une intégration par parties **(Exer)**, on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big).$$

Enfin, le caractère C^1 par morceaux de f **(Exer)** assure pour chaque $t \in \mathbb{R}$ la convergence de la série de Fourier de f vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ (par continuité de f en t), i.e., pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}.$$

En particulier, ceci donne

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

i.e.,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{0.1}$$

Maintenant, posons $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et observons **(Exer)** que

$$\sigma = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

En revenant à (0.1), l'égalité précédente s'écrit

$$\sigma = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

i.e., $\frac{3}{4}\sigma = \frac{\pi^2}{8}$ ou encore

$$\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A présent, exploitons l'égalité de Parseval en écrivant

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f))^2.$$

On a d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{\pi^2}{3}$$

et d'autre part

$$\frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f))^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \tag{0.2}$$

Comme précédemment, avec $\sigma' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ on voit que **(Exer)**

$$\sigma' = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

En utilisant (0.2), on obtient

$$\sigma' = \frac{1}{16}\sigma' + \frac{\pi^4}{96},$$

i.e., $\frac{15}{16}\sigma' = \frac{\pi^4}{96}$ ou encore

$$\sigma' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(4) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire, sa série de Fourier $S(f)$ est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\cdot)$$

où pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt.$$

On a tout de suite

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2\pi^2}{3}.$$

D'autre part, une double intégration par parties donne pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Enfin, le fait que f soit C^1 par morceaux et continue permet d'écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

En particulier, on a

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(5) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. Puisque f est continue par morceaux et 1-périodique, sa série de Fourier $S(f)$ est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(2n\pi\cdot) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(2n\pi\cdot)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(2n\pi t)dt$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$b_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2n\pi t)dt.$$

On a tout de suite

$$a_0(f) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} tdt = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, une intégration par parties donne pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n(f) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t\cos(2n\pi t)dt = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}$$

et

$$b_n(f) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(2n\pi t)dt = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n}.$$

En constant que f soit C^1 par morceaux **(Exer)**, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{8} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2}\cos(2(2n+1)\pi t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n}\sin(2n\pi t).$$

(6) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. La fonction f est continue par morceaux et 5-périodique donc sa série de Fourier $S(f)$ est donnée par

$$S(f)(\cdot) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\cdot) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\cdot),$$

où pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{5}\int_0^5 f(t)\cos(\omega nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{5}\int_0^5 f(t)\sin(\omega nt)dt$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{5}$. On a sans difficultés

$$a_0(f) = \frac{2}{5}\int_0^5 4tdt = 20.$$

De plus, pour tout entier $n \geq 1$, des intégrations par parties donnent

$$a_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{20}{n\pi}.$$

Il reste à constater que f est C^1 par morceaux pour justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{n\pi}\sin(\omega nt).$$

En particulier, ceci donne

$$f(\frac{5}{4}) = 5 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Le caractère continu par morceaux de f permet d'appliquer Parseval et d'écrire

$$\frac{1}{5}\int_0^5 16t^2dt = \frac{400}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{400}{\pi^2 n^2}$$

ou de manière équivalente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

Exercice 2 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$g(x) = \max(\sin(x), 0) \quad \textit{pour tout}\, x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Représenter le graphe de g.*
(2) *Déterminer les coefficients de Fourier de g et étudier la convergence de sa série de Fourier.*
(3) *Déterminer* $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$ *et* $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
(4) *Déterminer le développement en série de Fourier de f où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par*

$$f(x) = |\sin(x)| \quad \textit{pour tout}\, x \in \mathbb{R}.$$

Solution. (1) La représentation graphique de f est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.

(2) Notons tout d'abord que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Déterminons les coefficients de Fourier réels de g. On a

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt = \frac{2}{\pi}$$

et

$$a_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t)dt = 0.$$

Observons qu'une intégration par parties donne pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(nt)dt.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, une nouvelle intégration par parties nous conduit à

$$\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{n}[(-1)^n + 1] - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt.$$

En combinant ces deux séries d'égalités, on obtient que pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n(g) = -\frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2-1)}.$$

D'autre part, on a sans difficultés

$$b_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on vérifie par des intégrations par parties que

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(nt)dt$$

et

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt)dt.$$

Ceci entraîne que pour tout entier $n \geq 2$,

$$b_n(g) = 0.$$

La série de Fourier $S(g)$ est donnée par

$$S(g)(\cdot) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(n\cdot) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g)\sin(n\cdot)$$

ou encore pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S(g)(t) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nt) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

Il reste à voir que g est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour aboutir au fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nt) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

(3) On a

$$g(0) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4n^2-1)}$$

et

$$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} + \frac{1}{2}.$$

Il vient alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}).$$

(4) En observant que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = g(t) + g(-t)$$

on a $a_n(f) = 2a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(g) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. ■

Exercice 3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. Comparer les coefficients de Fourier de f et f'.*

Solution. Posons $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Les coefficients réels de f sont donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$$

et pour tout entier $n \geq 1$ par

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

De même, les coefficients réels de f' sont donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$a_n(f') = \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\cos(n\omega t)dt$$

et pour tout entier $n \geq 1$ par

$$b_n(f') = \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\sin(n\omega t)dt.$$

On a

$$a_0(f') = \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)dt = \frac{2}{T}(f(T) - f(0)) = 0$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{2}{T}\left[f(t)\cos(n\omega t)\right]_0^T + \frac{2n\omega}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \\ &= \frac{2n\omega}{T}\frac{T}{2}b_n(f) = n\omega b_n(f). \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\sin(n\omega t)dt \\ &= \frac{2}{T}[f(t)\sin(n\omega t)]_0^T - \frac{2n\omega}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= -\frac{2n\omega}{T}\frac{T}{2}a_n(f) = -n\omega a_n(f). \end{aligned}$$

■

Exercice 4 *Soit $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2-z} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}.$$

(1) *Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie réelle de $\varphi(e^{ix})$.*
(2) *Développer en série entière φ autour de 0.*
(3) *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{2-\cos(x)}{5-4\cos(x)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(4) *En déduire $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ et $J = \int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2dt$.*

Solution. (1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\left|e^{ix}\right| = 1$, on a $e^{ix} \neq 2$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\varphi(e^{ix})) &= \mathrm{Re}(\frac{1}{2 - e^{ix}}) \\
&= \mathrm{Re}(\frac{2 - e^{ix}}{|2 - e^{ix}|^2}) \\
&= \frac{1}{5 - 4\cos(x)}\mathrm{Re}(2 - e^{-ix}) \\
&= \frac{2 - \cos(x)}{5 - 4\cos(x)}.
\end{aligned}$$

(2) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a

$$\varphi(z) = \frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2(1 - \frac{z}{2})}.$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Il s'ensuit que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 2$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2(1 - \frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n.$$

(3) Par continuité de la fonction $\mathrm{Re}(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{2 - \cos(x)}{5 - 4\cos(x)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(\frac{e^{inx}}{2^n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\cos(nx).$$

(4) On a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2},$$

où la dernière égalité résulte de (3). Ainsi, on a

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Par application de Parseval **(Exer)**, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{n+1}}$$

ou encore

$$J = \frac{7\pi}{12}.$$

■