Florent Nacry

Je remercie Olivier Ley de l'INSA de Rennes pour cette feuille d'exercices.

Séries numériques

Exercice 1 *Etudier la convergence des séries numériques suivantes dont on donne le terme général :*
(a) $\frac{\ln(n)}{2^n}$; (b) $\frac{4n^2-n+5}{3n^5+2}$; (c) $\frac{1}{n^2(\ln(n))^2}$; (d) $\frac{1}{(\ln(n))^2}$; (e) $n(\cos(\frac{1}{n})-1)$; (f) $\frac{n!}{(2n)!}$; (g) $\frac{1}{n\cos^2(n)}$; (h) $2^{-\sqrt{n}}$; (i) $\frac{(-1)^n\sin(n)}{n^2}$; (j) $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(\ln(n))^2}$; (k) $\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n))^2}$; (l) $\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}$.

Solution. (a) Commençons par noter que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln(n) \leq \sqrt{n}.$$

Observons d'autre part que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ **(Exer)**. Ceci fournit un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$n^2 \leq 2^n.$$

Ainsi, on a pour tout entier $n \geq N$,

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{2^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Cet encadrement et la convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ assurent alors la convergence de $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$.

(b) Grâce à l'équivalent entre suites à termes positifs

$$\frac{4n^2-n+5}{3n^5+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{3n^3}$$

et à la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^3}$ (série de Riemann de paramètre $\alpha = 3 > 1$) on obtient la convergence de la série numérique $\sum \frac{4n^2-n+5}{3n^5+2}$.

(c) Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$0 < n^2 \leq n^2(\ln(n))^2$$

ou de manière équivalente

$$0 < \frac{1}{n^2(\ln(n))^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ceci combiné à la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) nous dit que $\sum \frac{1}{n^2(\ln(n))^2}$ converge.

(d) Pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$0 < \ln(n) \leq \sqrt{n}$$

ou de manière équivalente

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{(\ln(n))^2}.$$

Puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, l'encadrement ci-dessus nous dit que la série numérique $\sum \frac{1}{(\ln(n))^2}$ diverge.

(e) On a l'équivalent entre suites à termes négatifs **(Exer)**

$$n\Big(\cos\big(\frac{1}{n}\big) - 1\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

et ceci assure du fait que $\sum n\big(\cos\big(\frac{1}{n}\big) - 1\big)$ a même nature que $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge (série harmonique).

(f) Pour tout entier $n \geq 2$, on a **(Exer)**

$$0 \leq \frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{(n+1)\times\ldots\times 2n} \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ combinée à l'encadrement ci-dessus fournit alors la convergence de la série numérique $\sum \frac{n!}{(2n)!}$.

(g) On a tout de suite pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 < n\cos^2(n) \leq n$$

ce qui entraîne pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n\cos^2(n)}.$$

A travers ce dernier encadrement, nous voyons que la divergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique) implique celle de la série numérique $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$.

(h) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\exp(\sqrt{n}\ln(2))} = 0$ **(Exer)**, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$\frac{1}{\exp(\sqrt{n}\ln(2))} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ceci et la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ (i.e., la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) justifient la convergence de la série numérique $\sum 2^{-\sqrt{n}}$.

(i) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Cet encadrement et la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) nous disent que la série numérique (à termes positifs) $\sum \left|\frac{(-1)^n\sin(n)}{n^2}\right|$ converge, i.e., $\sum \frac{(-1)^n\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

(j) Pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(\ln(n))^2}\right| \leq \frac{1}{n^2(\ln(n))^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Il s'ensuit via la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) que la série numérique (à termes positifs) $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(\ln(n))^2}\right|$ converge, i.e., $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(\ln(n))^2}$ converge absolument.

(k) Notons que la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n))^2}$ est alternée **(Exer)**. D'autre part, il est clair que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n))^2}\right| = \frac{1}{(\ln(n))^2} \quad \text{pour tout entier } n \geq 2$$

est décroissante et converge vers 0 **(Exer)**. D'après le théorème de convergence des séries alternées, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln(n))^2}$ converge.

(l) On voit tout de suite que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}$ est une série alternée **(Exer)**. De plus, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}\right| = \frac{1}{n\ln(n)} \quad \text{pour tout entier } n \geq 2$$

est décroissante et converge vers 0 **(Exer)**. D'après le théorème de convergence des séries alternées, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}$ converge. ∎

Exercice 2 *Etudier la convergence des séries en fonctions des paramètres :* (a) $\sum na^n$ *avec* $a \in [0, +\infty[$ *;* (b) $\sum n^\alpha \tan(\frac{1}{n})$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *;* (c) $\sum \frac{a^n}{n+b^n}$ *avec* $a, b \in]0, +\infty[$ *;* (d) $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution. (a) Soit $a \geq 0$ un réel fixé. Posons pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = na^n$. Si $a \geq 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\sum u_n$ diverge (grossièrement). Si $a = 0$, il est trivial de noter que la série $\sum u_n$ converge. Supposons donc $a \in]0, 1[$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ **(Exer)**, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on ait

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ garantit alors que $\sum u_n$ converge.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n^\alpha \tan(\frac{1}{n})$ et notons que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Les suites impliquées dans l'équivalent précédent sont à termes positifs, donc $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ sont de même nature. Or, la série $\sum \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ converge si et seulement si $1 - \alpha > 1$, i.e., $\alpha < 0$.

(c) Soient $a, b \in]0, +\infty[$. Posons pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$. Distinguons deux cas.

Cas 1 : $b > 1$. On a $n + b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{a}{b})^n$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\frac{a}{b} < 1$, i.e., $a < b$.

Cas 2 : $b \leq 1$. On a $n + b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{n}$. Ceci nous dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 1$.

(d) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Posons pour tout entier $n \geq 3$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$. Distinguons trois cas.

Cas 1 : $\alpha > 1$. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha = 1 + \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq 3$, posons $v_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, donc il existe un entier $N \geq 3$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} = v_n.$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge.

Cas 2 : $\alpha < 1$. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha = 1 - \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq 3$, posons $v_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon/2}}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, il existe un entier $N \geq 3$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$0 \leq \frac{1}{n^{1-\varepsilon/2}} = v_n \leq u_n.$$

En conséquence, la série $\sum u_n$ diverge.

Cas 3 : $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, on voit que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n \geq \frac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n$ diverge. On peut donc supposer $\beta > 0$. Considérons la fonction $f : [3, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{t \ln^\beta t} \quad \text{pour tout } t \in [3, +\infty[.$$

Cette fonction est évidemment positive, continue et décroissante sur $[3, +\infty[$. Un résultat de comparaison série-intégrale nous dit alors que $\sum u_n$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_3^{+\infty} f(t)dt$. Par un changement de variable, on montre **(Exer)** que cette dernière a même nature que $\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ qui converge si et seulement si $\beta > 1$. ■

Exercice 3 *Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :* (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Solution. (1) L'équivalent entre suites à termes positifs **(Exer)**

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

et la convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n^3}$ (série de Riemann de paramètre $\alpha = 3 > 1$) garantissent la convergence de la série numérique $\sum \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$. Nous allons maintenant calculer la somme de cette dernière série. Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 0\}$, on a **(Exer)**

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

L'égalité précédente permet d'écrire pour tout entier $N \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\
&= 2\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} \\
&\quad + (\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}) - 2\frac{1}{2} - \frac{2}{N+1}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

(b) La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ associée au fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2(n+1)}{3^n} = 0$ donne tout de suite la convergence de la série $\sum \frac{n+1}{3^n}$. D'autre part, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^n},$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = -\frac{1}{3^n}\frac{3}{2}(n + \frac{3}{2}).$$

En écrivant pour chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_0$$

et en gardant à l'esprit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on arrive à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.$$

■

Exercice 4 *Pour tout entier $n \geq 2$, on définit*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}.$$

(1) *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n}$.
(2) *Etudier la nature des séries numériques* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *et* $\sum w_n$.

Solution. (1) Pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{w_n} = \frac{\sqrt{n + (-1)^n}}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ **(Exer)**, on a les équivalents $\sqrt{n} + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$. Ceci entraîne (via les égalités ci-dessus) $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $\frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n}.$$

(2) La série numérique $\sum u_n$ converge puisque c'est une série alternée de terme général u_n ($n \geq 2$) satisfaisant $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ ainsi que le fait que $(|u_n|)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante.
Etudions maintenant la nature de la série numérique $\sum v_n$. Observons que pour tout entier $n \geq 2$,

$$v_n - u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}.$$

Or, $n + (-1)^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et les suites $(n)_{n\geq 2}$ et $(n+(-1)^n\sqrt{n})_{n\geq 2}$ sont à termes positifs. En conséquence, les séries numériques $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum(u_n - v_n)$ sont de même nature. Puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on a que $\sum(u_n - v_n)$ diverge ou de manière équivalente $\sum(v_n - u_n)$ diverge. La convergence de la série numérique $\sum(-u_n)$ implique alors tout de suite **(Exer)** le caractère divergent de série numérique $\sum v_n$.
Nous terminons avec l'étude de la nature de la série numérique $\sum w_n$. Notons que pour tout entier $n \geq 2$ **(Exer)**,

$$\begin{aligned}
w_n - u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - \sqrt{n+(-1)^n})}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+(-1)^n})}.
\end{aligned}$$

En vertu des équivalents **(Exer)**

$$\sqrt{n+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} + \sqrt{n+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

on obtient alors

$$w_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Les suites $(w_n - u_n)_{n\geq 2}$ et $(\frac{1}{2n\sqrt{n}})_{n\geq 2}$ étant à termes négatifs, on tire alors que $\sum(w_n - u_n)$ et $\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ sont de même nature. Or, la série numérique $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, en particulier elle converge. Il s'ensuit que $\sum(w_n - u_n)$ converge et ceci implique (en gardant à l'esprit que $\sum u_n$ converge) la convergence de la série numérique $\sum w_n$ **(Exer)**. ■

Exercice 5 *Pour tout entier $n \geq 1$, on définit*

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad s_n = r_n - \frac{1}{n} \quad \textit{et} \quad t_n = s_n - \frac{1}{2n^2}.$$

(1) *Etablir que* $\lim_{n\to+\infty} nr_n = 1$.

(2) *Justifier que pour tout entier* $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}).$$

Montrer que

$$s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

(3) *Déterminer* $a \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^3}.$$

Solution. Fixons $n_0 \geq 2$ un entier et $N \geq n_0$ un entier. Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2}.$$

On tire de l'inégalité ci-dessus

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{dx}{x^2} = \sum_{k=n_0}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n_0}^{N} \frac{1}{k^2}$$

et ceci entraîne

$$\frac{1}{n_0} = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = r_{n_0}. \tag{0.1}$$

D'autre part, on a pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{k=n_0}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n_0}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2} = \int_{n_0-1}^{N} \frac{dx}{x^2}$$

ce qui donne

$$r_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n_0-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n_0-1}. \tag{0.2}$$

En combinant (0.1) et (0.2), on en arrive à

$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2,$$

en particulier $\lim_{n\to+\infty} nr_n = 1$.

(2) Soit $n_0 \geq 1$ un entier. Fixons $N \geq n_0$ un entier. On a **(Exer)**

$$\sum_{k=n_0}^{N} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{N+1},$$

donc **(Exer)** la série numérique $\sum(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ converge et

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n_0}. \tag{0.3}$$

D'après l'égalité (0.3), on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$s_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \tag{0.4}$$

Un résultat de sommation de relations de comparaison donne tout de suite **(Exer)**

$$s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}. \tag{0.5}$$

Pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \quad \text{pour tout } x \in [k, k+1]$$

et

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{pour tout } x \in [k-1, k].$$

Ceci fournit pour tout entier $k \geq 2$ l'encadrement

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^3}.$$

On en déduit

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{dx}{x^2} = \sum_{k=n_0}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{k=n_0}^{N} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n_0}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3} = \int_{n_0-1}^{N} \frac{dx}{x^3}.$$

et ceci donne

$$\frac{1}{2n_0^2} = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n_0-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2(n_0-1)^2}.$$

On obtient de cet encadrement **(Exer)**

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

et il reste à exploiter l'équivalent (0.5) pour aboutir à

$$s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(3) On vérifie **(Exer)** que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^2} = \sum_{k=n}^{+\infty}(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}).$$

En revenant à (0.4), il est aisé de constater **(Exer)** que pour tout entier $n \geq 1$,

$$t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2(k+1)^2}.$$

D'après un résultat de sommation de relations de comparaison **(Exer)**,

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^4}.$$

Il suffit alors d'observer **(Exer)** que

$$\frac{1}{6n^3} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{2x^4} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^4} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^4} = \frac{1}{6(n-1)^3}$$

pour obtenir

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

■