Florent Nacry

Je remercie Olivier Ley de l'INSA de Rennes pour cette feuille d'exercices.

Séries entières

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :* (a) $\sum \frac{z^n}{n2^n}$; (b) $\sum n! z^n$; (c) $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^n$; (d) $\sum \frac{(n+1)^2}{\sin(n)+\sqrt{n}} z^n$; (e) $\sum \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$ *avec* $k \geq 1$ *entier ;* (f) $\sum n^2 z^{3n}$; (g) $\sum a_n z^n$ *où pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$

Solution. (a) Posons pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n2^n}$ et observons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 2$.

(b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n!$. On a tout de suite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$$

ce qui entraîne (en vertu de la règle de d'Alembert) que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R = 0$.

(c) Avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

Il reste à appliquer la règle de d'Alembert pour obtenir que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 1$.

(d) Posons pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{(n+1)^2}{\sin(n)+\sqrt{n}}$ et écrivons

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)^2}{\sin(n+1)+\sqrt{n+1}} \frac{\sin(n)+\sqrt{n}}{(n+1)^2}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ donc (via d'Alembert) le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vaut $R = 1$.

(e) Soit $k \geq 1$ un entier. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ et observons que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^k}{\prod\limits_{j=1}^{k} (kn+j)}.$$

Il suffit alors de noter que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{(kn)^k} = \frac{1}{k^k}$$

et d'utiliser la règle de d'Alembert pour aboutir au fait que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R = k^k$.

(f) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} (\frac{n}{3})^2 & \text{si } n \equiv 0\ [3], \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0\ [3]. \end{cases}$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ qui n'est nulle autre que $\sum n^2 z^{3n}$ **(Exer)** et rappelons que

$$R = \sup \mathcal{I}_a, \tag{0.1}$$

où $\mathcal{I}_a$ désigne l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument. Fixons $z_0 \in \mathbb{C}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{3n} |z_0|^{3n}$. Etudions la convergence (absolue) de la série numérique $\sum b_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a **(Exer)**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = |z_0|^3 \frac{a_{3n+3}}{a_{3n}} = |z_0|^3 \frac{(n+1)^2}{n^2},$$

en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = |z_0|^3$. Via la règle de d'Alembert, nous savons que la série numérique $\sum b_n$ converge (absolument) si $|z_0| < 1$ et diverge si $|z_0| > 1$ **(Exer)**. En revenant à l'égalité (0.1), ceci nous dit que $R = 1$.

(g) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

On a tout de suite

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$$

ce qui permet d'utiliser la formule de Cauchy-Hadamard et d'en arriver à $R = \frac{1}{2}$.
■

Exercice 2 *Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum c_n (-4)^n$ converge et $\sum c_n 6^n$ diverge. Etudier la nature des séries numériques :*
(a) $\sum c_n 2^n$; (b) $\sum c_n 4^n$; (c) $\sum c_n (-6)^n$; (d) $\sum c_n$; (e) $\sum c_n 8^n$.

Solution. Notons $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$. Rappelons que

$$R = \sup \mathcal{I}_l = \sup \mathcal{I}_b = \sup \mathcal{I}_a$$

où $\mathcal{I}_l$ (resp., $\mathcal{I}_b$ (resp., $\mathcal{I}_a$)) est l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n r^n = 0$ (resp., $(c_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (resp., $\sum c_n r^n$ est absolument convergente)). Rappelons également que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$ (resp., $|z| > R$) , la série numérique $\sum c_n z^n$ converge absolument (resp., diverge).

(a) Puisque $\sum c_n (-4)^n$ converge, la suite $(c_n(-4)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et ceci est trivialement équivalent au caractère borné de $(c_n 4^n)_{n \in \mathbb{N}}$. En gardant à l'esprit l'égalité $R = \sup \mathcal{I}_b$, il vient $R \geq 4$. Il reste à écrire que $2 < 4 \leq R$ pour obtenir que $\sum c_n 2^n$ converge absolument.

(b) On ne peut pas conclure sur la nature de $\sum c_n 4^n$ en général. Posons $x_n = \frac{1}{(n+1)4^n}$ et $y_n = \frac{1}{(n+1)^2 4^n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et vérifions tout de suite que $\sum x_n(-4)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est semi-convergente, $\sum y_n(-4)^n = \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ est absolument convergente, $\sum x_n 6^n = \sum \frac{3^n}{(n+1)2^n}$ est divergente et $\sum y_n 6^n = \sum \frac{3^n}{2^n(n+1)^2}$ est divergente. Observons alors que la série $\sum x_n 4^n = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge et la série $\sum y_n 4^n = \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

(c) On ne peut pas conclure sur la nature de $\sum c_n 6^n$ en général. Avec $x_n = \frac{1}{6^n(n+1)}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on observe que $\sum x_n(-4)^n = \sum \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)3^n}$ converge absolument, $\sum x_n 6^n = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge et $\sum x_n(-6)^n = \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ converge absolument. En considérant $y_n = \frac{n(-1)^n}{6^n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on voit que $\sum y_n(-4)^n = \sum n(\frac{2}{3})^n$ converge, $\sum y_n 6^n = \sum(-1)^n n$ diverge (grossièrement) et $\sum y_n(-6)^n = \sum n$ diverge (grossièrement).

(d) D'après (a), le rayon de convergence R de satisfait $R \geq 4$. Puisque $1 < 4 \leq R$, la série numérique $\sum c_n$ converge absolument.

(e) On a tout de suite $R \leq 6$ (sinon, $\sum c_n 6^n$ convergerait absolument). Ainsi, les inégalités $R \leq 6 < 8$ nous disent que $\sum c_n 8^n$ diverge. ■

Exercice 3 *Déterminer le développement en série entière en* 0 *des fonctions suivantes :*
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *;*
(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{2+x}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ *;*
(c) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{2+3x}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ *;*
(d) $f :]-5, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \ln(5+x)$ *pour tout* $x \in]-5, +\infty[$ *;*
(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *;*
(f) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{(2+3x)^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ *;*
(g) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x^3-3x+2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ *;*
(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ *définie par* $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ *;*
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Solution. (a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{0.2}$$

Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Puisque $-x_0^2 \in]-1, 0]$, on peut appliquer l'égalité ci-dessus et obtenir

$$\frac{1}{1-(-x_0^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x_0^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_0^{2n}.$$

Il s'ensuit pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2[1-(-\frac{x}{2})]}.$$

Soit $x_0 \in]-2,2[$. On a $-\frac{x_0}{2} \in]-1,1[$ ce qui permet d'appliquer (0.2) et d'arriver à

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x_0}{2})^n = \frac{1}{1-(-\frac{x_0}{2})} = \frac{1}{1+\frac{x_0}{2}}.$$

Il vient alors pour tout $x \in]-2,2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \frac{1}{2+x}.$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$, on a

$$\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{3}{2}x)}.$$

Soit $x_0 \in]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[$. On a $\frac{3}{2}x_0 \in]-1,1[$ ce qui permet de faire usage de (0.2) et d'écrire

$$\frac{1}{1-(-\frac{3}{2}x_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{2^n}x_0^n.$$

En conséquence, on a pour tout $x \in]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[$,

$$\frac{1}{2+3x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^n.$$

(d) Pour tout $x \in]-5,+\infty[$, on a

$$\ln(5+x) = \ln(5) + \ln(1+\frac{x}{5}).$$

D'autre part, on a pour tout $x \in]-1,1]$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Soit $x_0 \in]-5,5]$. On a $-\frac{x_0}{5} \in]-1,1]$ donc en vertu de l'égalité ci-dessus on dispose de l'égalité

$$\ln(1+\frac{x_0}{5}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n5^n}x_0^n.$$

On déduit de tout ceci pour tout $x \in]-5,5]$,

$$\ln(5+x) = \ln(5) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n5^n}x^n.$$

(e) Considérons $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Evidemment, la fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ et satisfait pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En combinant l'égalité précédente et (0.2), on obtient pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

(f) Introduisons la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = -\frac{1}{3(2+3x)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

Observons tout de suite que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ et satisfait

$$g'(x) = \frac{1}{(2+3x)^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

D'après (0.2), on a pour tout $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$,

$$g(x) = -\frac{1}{3(2+3x)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^n.$$

Il vient alors pour tout $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$,

$$g'(x) = \frac{1}{(2+3x)^2} = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{(-3)^n}{2^{n+2}}x^n.$$

(g) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$, on a **(Exer)**

$$\frac{1}{x^3-3x+2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{9(x+2)} + \frac{1}{9(1-x)} + \frac{1}{3(1-x)^2}.$$

En exploitant (b) et (e), il vient **(Exer)** pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{x^3-3x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}9} + \frac{1}{9} + \frac{n+1}{3}\right)x^n.$$

(h) En vertu de (e), on peut écrire pour tout $x \in]-2,2[$ **(Exer)**

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3}{4}\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} = \frac{x^3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n-1}{2^{n-1}}x^n.$$

(i) Notons que la série entière d'une variable réelle $\sum(-1)^n x^{2n}$ a pour somme sur l'intervalle $]-1,1[$ la fonction $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

Puisque Arctan est la primitive de g qui s'annule en 0, on a

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

■

Exercice 4 *Calculer les sommes suivantes :*
(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

Solution. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{0.3}$$

en particulier,

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

(b) En exploitant encore (0.3), on a

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

(c) Une nouvelle application de (0.3) donne

$$e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!},$$

ce qui s'écrit encore

$$e^2 - \frac{19}{3} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

(d) Pour tout $x \in]-1, 1]$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1]$, on peut exploiter l'égalité précédente et ainsi obtenir

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(1 + \frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}.$$

■

Exercice 5 *Déterminer le domaine de convergence et la somme des séries entières (de variables réelles) sur leur intervalle ouvert de convergence :*
(a) $\sum \sin(n\theta)x^n$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$; (b) $\sum \frac{1}{n} x^n$; (c) $\sum \frac{1}{n(n-1)} x^n$; (d) $\sum n x^n$.

Solution. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons R_c (resp., R_s) le rayon de convergence de la série entière (de variable réelle) $\sum \cos(n\theta)x^n$ (resp., $\sum \sin(n\theta)x^n$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\cos(n\theta)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\sin(n\theta)| \leq 1.$$

Ainsi, on a les inégalités **(Exer)**

$$R_c \geq 1 \quad \text{et} \quad R_s \geq 1.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\alpha) = 0$. Il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\alpha) = 0$ puis **(Exer)**

$$\lim_{n\to+\infty} 2\cos^2(n\alpha) = 1$$

et ceci contredit notre hypothèse. Ainsi **(Exer)**, $\sum \cos(n\theta)$ et $\sum \cos(n\theta)(-1)^n$ divergent. Le rayon de convergence R_c vaut donc 1 et le domaine de convergence de $\sum \cos(n\theta)x^n$ est $]-1,1[$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\beta) = 0$. On a tout de suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin[(n+1)\beta] = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} (\sin(n\beta)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(n\beta)) = 0.$$

Puisque $\sin(\beta) \neq 0$, l'égalité précédente et notre hypothèse nous donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(n\beta) = 0$$

ce qui est absurde. Ainsi **(Exer)**, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les séries $\sum \sin(n\theta)$ et $\sum \sin(n\theta)(-1)^n$ divergent. Dans ce cas, le rayon de convergence R_s vaut 1 et le domaine de convergence de $\sum \sin(n\theta)x^n$ est $]-1,1[$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors tout de suite $R_s = +\infty$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **(Exer)**. Il reste à observer **(Exer)** que le rayon de convergence de $\sum e^{in\theta}x^n$ est 1 et que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n + i\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta}x)^n = \frac{1}{1-e^{i\theta x}}$$

pour aboutir à l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = \frac{x\sin(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

(b) La série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1 et un domaine de convergence égal à $[-1,1[$ **(Exer)**. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

On tire tout de suite de ceci que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

(c) La série entière (de variable réelle) $\sum \frac{1}{n(n-1)}x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et un domaine de convergence égal à $[-1,1]$ **(Exer)**. Définissons la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

La fonction f admet des primitives sur $]-1,1[$ et l'unique primitive sur $]-1,1[$ s'annulant en 0 est la fonction $F:]-1,1[\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=-\ln(1-x)\quad\text{pour tout } x\in]-1,1[.$$

De même F admet des primitives sur $]-1,1[$ et l'unique primitive sur $]-1,1[$ de F qui s'annule en 0 est la fonction $\mathcal{F}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{F}(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)n}\quad\text{pour tout } x\in]-1,1[.$$

D'autre part, une intégration par parties donne sans difficultés

$$\mathcal{F}(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x-(x-1)\ln(1-x)\quad\text{pour tout } x\in]-1,1[.$$

(d) Une application directe de la règle de d'Alembert nous donne que le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est 1. De plus, il est clair que les séries numériques $\sum n$ et $\sum(-1)^n n$ divergent (grossièrement). Ainsi, le domaine de convergence de la série entière de variable réelle $\sum nx^n$ est $]-1,1[$. Maintenant, définissons la fonction $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\quad\text{pour tout } x\in]-1,1[.$$

La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et satisfait pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\quad\text{et}\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}.$$

Il reste à voir que pour tout $x\in]-1,1[$,

$$xf'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n.$$

■

Exercice 6 (a) *Déterminer une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ développable en série entière en 0 satisfaisant $y(0)=1$, $y'(0)=0$ et pour un réel $\varepsilon>0$, $y''(x)+xy'(x)+y(x)=0$ pour chaque $x\in]-\varepsilon,\varepsilon[$.*
(b) *Déterminer une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ développable en série entière en 0 satisfaisant $y(0)=1$, $y'(0)=0$ et pour un réel $\varepsilon>0$, $xy''(x)+y'(x)+y(x)=0$ pour chaque $x\in]-\varepsilon,\varepsilon[$.*

Solution. Supposons qu'il existe une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ développable en série entière en 0 et satisfaisant pour un réel $\eta>0$

$$y''(x)+xy'(x)+y(x)=0\quad\text{pour tout } x\in]-\eta,\eta[,$$

$y(0)=1$ et $y'(0)=0$. Ainsi, il existe un réel $\varepsilon\in]0,\eta[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle tels que

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\quad\text{pour tout } x\in]-\varepsilon,\varepsilon[.$$

En particulier, y est deux fois dérivable sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et on a pour tout $x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

On a alors pour tout $x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n + a_n\big)x^n + 2a_2 + a_0 = 0.$$

Ceci et les égalités $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$ entraînent pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Finalement, on a pour tout $x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ceci nous conduit à considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et à observer qu'elle satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n$ et

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$$

(b) Ceci se traite de manière analogue à (a) **(Exer)**. ■