

Je remercie Olivier Ley de l'INSA de Rennes pour cette feuille d'exercices.

Fonctions de plusieurs variables, E.D.P., Optimisation

1 Lignes de niveaux, continuité

Exercice 1 Pour chacune des expressions suivantes, définir une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ maximale au sens de l'inclusion \subset et étudier sa continuité sur D . Tracer l'allure de D et des ensembles de niveaux $L_c(f) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$ avec $c \in \mathbb{R}$ indiqué.

- (a) $f(x, y) = y^2, c \in \{-1, 0, 1, 4\}$;
- (b) $f(x, y) = \frac{1}{2}x + y, c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
- (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1), c \in \{-100, 0, 2\}$;
- (d) $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}, c \in \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$.

Solution. Définissons tout d'abord les fonctions (projections canoniques) $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$p_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad p_2(x, y) = y \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

qui sont évidemment continues sur \mathbb{R}^2 car linéaires.

- (a) Avec $D = \mathbb{R}^2$, définissons la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = y^2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in D.$$

Celle-ci est continue sur D puisque $f = p_2^2$. D'autre part, on vérifie sans difficultés que $L_{-1}(f) = \emptyset, L_0(f) = \mathbb{R} \times \{0\}, L_1(f) = \mathbb{R} \times \{-1\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ et $L_4(f) = \mathbb{R} \times \{-2\} \cup \mathbb{R} \times \{2\}$. La représentation géométrique de ces ensembles et de D est laissée à titre d'exercice (**Exer**).

- (b) Posons $D = \mathbb{R}^2$ et considérons la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + y \quad \text{pour tout } (x, y) \in D.$$

L'égalité $f = \frac{1}{2}p_1 + p_2$ nous assure que f est continue sur D . Enfin, pour chaque $c \in \mathbb{R}$, on a

$$L_c(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = c - \frac{1}{2}x \right\}.$$

La représentation géométrique de ces ensembles et de D est laissée à titre d'exercice (**Exer**).

- (c) Notons \mathbb{B} la boule unité fermée associée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 et posons $D = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}$. On constate tout de suite que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \mathbb{B}$$

ce qui permet de définir la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{pour tout } (x, y) \in D.$$

La continuité de f sur l'ouvert D de \mathbb{R}^2 est claire puisque $f = \ln(q_1^2 + q_2^2 - \mathbf{1})$ où q_i désigne la restriction de p_i à D pour chaque $i \in \{1, 2\}$ et où $\mathbf{1} : D \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction constante de valeur 1. Enfin, on vérifie que pour chaque $c \in \mathbb{R}$,

$$L_c(f) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = e^c + 1\}.$$

La représentation géométrique de ces ensembles et de D est laissée à titre d'exercice (**Exer**).

(d) Notons $H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : y \geq \frac{1}{x}\}$, $H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : y \leq \frac{1}{x}\}$ et $D = H_1 \cup H_2 \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ et observons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$1 - xy \geq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in D.$$

Ceci permet notamment de définir la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \sqrt{1 - xy} \quad \text{pour tout } (x, y) \in D.$$

La continuité de f en chaque point de D s'obtient en écrivant $f = \sqrt{\mathbf{1} - q_1 \cdot q_2}$ où q_i désigne la restriction de p_i à D pour chaque $i \in \{1, 2\}$ et où $\mathbf{1} : D \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction constante de valeur 1. Concernant les ensembles de niveaux de f , il est clair que $L_c(f) = \emptyset$ pour tout réel $c < 0$ et que pour tout réel $c \geq 0$,

$$L_c(f) = \{(x, y) \in D : xy = 1 - c^2\}.$$

Il s'ensuit pour tout $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$,

$$L_c(f) = \left\{ (x, y) \in H_1 \cup H_2 : y = \frac{1 - c^2}{x} \right\}$$

et

$$L_1(f) = \{(x, y) \in D : xy = 0\} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

La représentation géométrique de D et de ces ensembles est laissée à titre d'exercice (**Exer**). ■

Exercice 2 (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés. On suppose que les fonctions $f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ sont continues en x_0 et y_0 . Ceci implique-t-il que f est continue en (x_0, y_0) ?

(2) Etudier, en utilisant la définition, la continuité en $(0, 0)$ des fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = |1 + x + y|$$

et

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solution. (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que les fonctions $f(\cdot, 0), f(0, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur \mathbb{R} . D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Ceci et l'égalité $f(0, 0) = 0$ justifient que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

(2) Munissons \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ et notons \mathbb{U} sa boule unité ouverte.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = |1 + x + y| \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Etudions la continuité de f en $(0, 0)$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ et observons que pour tout $(x, y) \in \eta\mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= |f(x, y) - 1| \\ &= |x + y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq 2\|(x, y)\| < 2\eta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est continue en $(0, 0)$.

(b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Etudions la continuité de g en $(0, 0)$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ et notons que pour tout $(x, y) \in \eta\mathbb{U} \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$|g(x, y) - g(0, 0)| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2 + y^2} = \frac{|(x - y)(x^2 + xy + y^2)|}{\|(x, y)\|^2}.$$

D'autre part, remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|$$

et

$$|x^2 + y^2 + xy| \leq (x^2 + y^2) + |xy| \leq 2\|(x, y)\|^2.$$

Il vient alors pour tout $(x, y) \in \eta\mathbb{U}$,

$$|g(x, y) - g(0, 0)| \leq 4\|(x, y)\| < 4\eta \leq \varepsilon.$$

Ceci justifie la continuité de g en $(0, 0)$. ■

Exercice 3 *Etudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \Delta, \\ \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } (x, y) \notin \Delta. \end{cases}$$

Solution. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 2,$$

donc f ne tend pas vers $f(0, 0) = 0$ en $(0, 0)$. Ainsi, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

(b) On a $\lim_{u \downarrow 0} \frac{1 - \cos(\sqrt{u})}{u} = \frac{1}{2}$, donc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

Ceci et l'égalité $f(0, 0) = \frac{1}{2}$ nous disent que f est continue en $(0, 0)$.

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = e^{-1}$, donc f ne tend pas vers $f(0, 0) = 0$ en $(0, 0)$. Ainsi, f n'est pas continue en $(0, 0)$. ■

2 Dérivées partielles

Exercice 4 Montrer en utilisant la définition de différentielle que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Solution. Munissons \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$. Fixons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f((\bar{x}, \bar{y}) + (h, k)) = \bar{x}\bar{y} + \varphi_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) + hk,$$

où $\varphi_{(\bar{x}, \bar{y})} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application (linéaire continue) définie par

$$\varphi_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) = \bar{x}k + \bar{y}h \quad \text{pour tout } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à observer que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{\|(h, k)\|} = 0$$

puisque pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ avec $(h, k) \neq (0, 0)$

$$0 \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{\|(h, k)\|^2}{\|(h, k)\|} = \|(h, k)\|.$$

On conclut alors que f est différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) de différentielle $Df(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_{(\bar{x}, \bar{y})}$.

■

Exercice 5 Déterminer les dérivées partielles premières là où elles existent de la fonction

(a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin \frac{x}{y} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Solution. (a) La fonction f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ de \mathbb{R}^2 (**Exer**). En particulier, f admet des dérivées partielles premières en chaque point de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. De plus, on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{y_0} \cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{y_0^2} \cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right).$$

(b) La fonction g est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de \mathbb{R}^2 (**Exer**). Il s'ensuit que g admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus, on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

■

Exercice 6 Déterminer le plan tangent au point $(1, 2)$ au graphe de $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Solution. Le plan tangent au graphe de f en $(1, 2)$ est donné par

$$T_{(1,2)}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(1, 2) + \partial_1 f(1, 2)(x - 1) + \partial_2 f(1, 2)(y - 2)\}.$$

■

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} . On définit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(t) = f(t, g(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Justifier que h est de classe C^2 sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée première et seconde de h .

Solution. La fonction h est de classe C^2 sur \mathbb{R} puisque $h = f \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} définie par

$$\varphi(t) = (t, g(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = D\varphi(t)(1) = (1, g'(t))$$

et écrivons

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= Dh(t)(1) \\
 &= D(f \circ \varphi)(t)(1) \\
 &= Df(\varphi(t))(D\varphi(t)(1)) \\
 &= Df(\varphi(t))(1, g'(t)) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)) + g'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t)).
 \end{aligned}$$

Pour obtenir la dérivée seconde de h'' de h , on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 h''(t) &= Dh'(t)(1) \\
 &= D\left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi + g' \times \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi\right)(t)(1) \\
 &= D\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))(1, g'(t)) + g''(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \\
 &\quad + g'(t) D\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))(1, g'(t)) \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, g(t)) + g'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t, g(t)) + g''(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t)) \\
 &\quad + g'(t) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t, g(t)) + g'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, g(t)) \right).
 \end{aligned}$$

■

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 autour de $(0, 0)$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(2t, -t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer le développement limité de φ en 0.

Solution. On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ et on note \mathbb{U} la boule unité ouverte associée. Puisque f est de classe C^2 autour de $(0, 0)$, il existe un réel $\eta > 0$ et une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x, y) = 0$ tels que pour tout $(a, b) \in \eta\mathbb{U}$,

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)b \\
 &\quad + \frac{1}{2}(a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)) + \|(a, b)\|^2 \varepsilon(a, b).
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert W de 0 dans \mathbb{R} tel que pour tout $t \in W$,

$$\begin{aligned}
 f(2t, -t) &= f(0, 0) + 2 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)t - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)t \\
 &\quad + \frac{1}{2}(4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) - 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)) + \|(2t, -t)\|^2 \varepsilon(2t, -t).
 \end{aligned}$$

En particulier, on a pour tout $t \in W$,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(0,0) + (2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0))t \\ &\quad + (2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0))t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

■

Exercice 9 *Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et la différentiabilité en tout point de \mathbb{R}^2 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :*

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \Delta, \\ x \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) & \text{si } (x, y) \notin \Delta, \end{cases}$$

où $\Delta = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Solution. On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 et on note $B(a, r)$ la boule ouverte associée de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.

(a) La fonction f est différentiable (donc continue) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (**Exer**). D'autre part, elle n'est pas continue en $(0, 0)$ (et donc pas différentiable en $(0, 0)$) puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

On observe enfin que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

i.e., f admet des dérivées partielles selon la première et la seconde variable en $(0, 0)$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

(b) La fonction f est différentiable (et donc continue) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ de \mathbb{R}^2 . Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$. Examinons la continuité de f en (\bar{x}, \bar{y}) . Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \frac{2}{\pi}\varepsilon$. Pour tout $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \eta) \setminus \Delta$, on a

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| = |f(x, y)| \leq |x| \frac{\pi}{2} \leq \eta \frac{\pi}{2} = \varepsilon.$$

On a également pour tout $(x, y) \in \Delta$,

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| = 0 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \eta)$, on a $|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon$. On en déduit que f est continue en (\bar{x}, \bar{y}) . Soit $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, notons que

$$t^{-1}f((0, \bar{y}) + t(1, 0)) = \text{Arctan}\left(\frac{\bar{y}}{t}\right)$$

et

$$t^{-1}f((0, \bar{y}) + t(0, 1)) = 0.$$

En conséquence, on a que pour tout $(a, b) \in \Delta \setminus \{(0, 0)\}$, f n'admet pas de dérivée partielle en la première variable en (a, b) , on a l'égalité $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et on a que pour tout $(a, b) \in \Delta$, f admet une dérivée partielle en la seconde variable en (a, b) vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Delta \cup \{(0, 0)\}.$$

■

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer. La fonction f est-elle de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$?

Solution. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 . La fonction f est évidemment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (**Exer**). D'autre part, notons que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$0 \leq \frac{|f(h, k)|}{\|(h, k)\|} \leq \|(h, k)\|.$$

Ceci entraîne que f est différentiable en $(0, 0)$ de différentielle nulle. En particulier, les dérivées partielles du premier ordre de f existent en tout point de \mathbb{R}^2 et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. De manière élémentaire, on a tout de suite pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(h, k) = \frac{h^4 k + 3h^2 k^3}{(h^2 + k^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(h, k) = \frac{h^5 - h^3 k^2}{(h^2 + k^2)^2}.$$

Maintenant, définissons $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Notons que $g_1(\cdot, \cdot) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot)$ et que $g_2(\cdot, \cdot) = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot)$. Il est aisé de vérifier que g_1, g_2 sont continues sur \mathbb{R}^2 , d'où l'on tire que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . D'autre part, la fonction $g_1(0, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle en chaque point de \mathbb{R} . Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

existe et vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$. De même, remarquons que $g_2(\cdot, \cdot) = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot)$ et que la fonction $g_2(\cdot, 0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$(g_2(\cdot, 0))(x) = g_2(x, 0) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. D'après le théorème de Schwarz, f n'est de classe C^2 sur aucun ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$. ■

3 Changements de variables et E.D.P.

Exercice 11 Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (resp., $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$).

Solution. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons dans un premier temps qu'elle admet une dérivée partielle première selon la première (resp., seconde) variable en tout point de \mathbb{R}^2 vérifiant

$$\partial_1 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\partial_2 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ (resp., $x_0 \in \mathbb{R}$). En observant que

$$(f(\cdot, y_0))'(x) = \partial_1 f(x, y_0) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$(f(x_0, \cdot))'(y) = \partial_2 f(x_0, y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R})$$

on obtient l'existence de $C_{y_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $D_{x_0} \in \mathbb{R}$) tel que

$$f(x, y_0) = C_{y_0} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$f(x_0, y) = D_{x_0} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}).$$

Puisque y_0 (resp., x_0) est un réel quelconque, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x, y) = C(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp., il existe une fonction $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x, y) = D(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(x, y) = g(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp., s'écrit

$$f(x, y) = g(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est dérivable partiellement en la première (resp., seconde) variable et vérifie

$$\partial_1 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\partial_2 f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

■

Exercice 12 Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (resp., $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$).

Solution. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons tout d'abord que f admette une dérivée partielle seconde selon la première (resp., seconde) variable en tout point de \mathbb{R}^2 satisfaisant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2).$$

Soit $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (resp., $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) la fonction définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$v(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

(resp.,

$$w(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Fixons $b_0 \in \mathbb{R}$ (resp., $a_0 \in \mathbb{R}$). Ce qui précède dit alors que $v(\cdot, b_0)$ (resp., $w(a_0, \cdot)$) est dérivable sur \mathbb{R} et satisfait

$$(v(\cdot, b_0))'(a) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$(w(a_0, \cdot))'(b) = 0 \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, il existe $C_{b_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $E_{a_0} \in \mathbb{R}$) tel que

$$(f(\cdot, b_0))'(a) = v(a, b_0) = C_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$(f(a_0, \cdot))'(b) = w(a_0, b) = E_{a_0} \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

Ceci entraîne l'existence de $D_{b_0} \in \mathbb{R}$ (resp., $F_{a_0} \in \mathbb{R}$) tel que

$$f(a, b_0) = C_{b_0}a + D_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

(resp.,

$$f(a_0, b) = E_{a_0}b + F_{a_0} \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

Le fait que b_0 (resp., a_0) soit quelconque dans \mathbb{R} nous permet alors de dire qu'il existe deux fonctions $C, D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp., $E, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) telles que

$$f(a, b) = C(b)a + D(b) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$f(a, b) = E(a)b + F(a) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2).$$

Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(a, b) = \varphi(b)a + \psi(b) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$f(a, b) = \varphi(a)b + \psi(a) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2)$$

avec $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions quelconques, alors f est deux fois dérivable partiellement selon la première (resp., seconde) variable en tout point de \mathbb{R}^2 et satisfait

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

(resp.,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2).$$

■

Exercice 13 Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)$ existe et vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Fixons $b_0 \in \mathbb{R}$. Ce qui précède dit alors que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b_0) = (g(\cdot, b_0))'(a) = 0.$$

Ainsi, il existe $C_{b_0} \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(a, b_0) = C_{b_0} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

et ceci entraîne que g s'écrit pour une certaine fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(a, b) = C(b) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Fixons $a_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$(f(a_0, \cdot))'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_0, b) = g(a_0, b) = C(b),$$

d'où l'existence de $D_{a_0} \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a_0, b) = C(b)b + D_{a_0}.$$

On tire de tout ceci l'existence de deux fonctions $\hat{C}, D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(a, b) = \hat{C}(b) + D(a) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}.$$

De plus, notons que le fait que f soit dérivable partiellement en la seconde variable en tout point de \mathbb{R}^2 entraîne que \hat{C} est dérivable sur \mathbb{R} . Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$f(a, b) = \varphi(b) + \psi(a) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

avec $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque, f satisfait l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)$ et l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère $F : U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in U.$$

(1) On suppose f différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Justifier que F est différentiable sur U . Calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.

(2) On suppose f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Justifier que F est de classe C^2 sur U . Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}$. On appelle Laplacien de f la fonction $\Delta f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Delta f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{pour tout } (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Déterminer le Laplacien de f en coordonnées polaires.

Solution. (1) Par composition, F est différentiable sur l'ouvert U de \mathbb{R}^2 . Fixons $(\rho, \psi) \in U$ et notons $\xi = (\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\rho, \psi) = \cos(\psi) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \sin(\psi) \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \psi) = -\rho \sin(\psi) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \rho \cos(\psi) \frac{\partial f}{\partial y}(\xi).$$

(2) Par composition, F est de classe C^2 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^2 . Fixons $(\rho, \psi) \in U$ et notons $\xi = (\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$. On a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho, \psi) = \cos^2(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \sin^2(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) + 2 \cos(\psi) \sin(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho, \psi) &= \rho^2 \sin^2(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) - 2\rho^2 \cos(\psi) \sin(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi) \\ &\quad + \rho^2 \cos^2(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) - \rho \cos(\psi) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) - \rho \sin(\psi) \frac{\partial f}{\partial y}(\xi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}(\rho, \psi) &= -\rho \cos(\psi) \sin(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \rho \cos(\psi) \sin(\psi) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) \\ &\quad + \rho(\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi)) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi) - \sin(\psi) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + \cos(\psi) \frac{\partial f}{\partial y}(\xi). \end{aligned}$$

D'autre part, observons que

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho, \psi) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho, \psi) \\ &= \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) + \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) - \rho \frac{\partial F}{\partial r}(\rho, \psi). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\Delta f(\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi)) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho, \psi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho, \psi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial r}(\rho, \psi).$$

■

Exercice 15 Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Déterminer les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables sur Ω vérifiant

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega.$$

Solution. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose dans un premier temps que f est différentiable sur Ω et satisfait

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega. \quad (3.1)$$

On pose $U =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on considère la fonction $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in U.$$

La différentiabilité de f sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^2 assure celle de F sur l'ouvert U . On vérifie de plus (**Exer**) que pour chaque $(r_0, \theta_0) \in U$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \cos(\theta_0) \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos(\theta_0), r_0 \sin(\theta_0)) + \sin(\theta_0) \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos(\theta_0), r_0 \sin(\theta_0)).$$

En combinant ceci à (3.1), on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = 0 \quad \text{pour tout } (r_0, \theta_0) \in U.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(r, \theta) = \varphi(\theta) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in U.$$

Notons que le fait que F soit dérivable partiellement en la seconde variable en chaque point de U assure que φ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il reste alors à déduire de la dernière égalité (**Exer**) que pour tout $(a, b) \in \Omega$,

$$f(a, b) = (\varphi \circ \text{Arctan})\left(\frac{b}{a}\right).$$

Réciproquement, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(a, b) = \psi\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega$$

avec $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} , alors f est différentiable sur Ω et satisfait

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b) \in \Omega.$$

■

Exercice 16 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ est radiale lorsqu'il existe une fonction $H :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = H(r) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Déterminer les fonctions radiales $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ satisfaisant

$$\Delta f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Solution. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ radiale et satisfaisant

$$\Delta f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Introduisons la fonction $F :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Puisque f est radiale, il existe $H :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(r, \theta) = H(r) \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Notons tout de suite que H est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. D'autre part, le calcul du Laplacien en coordonnées polaires donne pour tout $(\rho, \psi) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$\Delta f(\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi)) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho, \psi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho, \psi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial r}(\rho, \psi) = 0.$$

On a tout de suite $\frac{\partial F}{\partial r}(\rho, \psi) = H'(\rho)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\rho, \psi) = H''(\rho)$ pour tout $(\rho, \psi) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Il vient alors

$$\frac{1}{\rho} H'(\rho) + H''(\rho) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in]0, +\infty[.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$H(\rho) = \lambda \ln(\rho) + C \quad \text{pour tout } \rho \in]0, +\infty[.$$

En revenant à la définition de H , on aboutit à

$$f(x, y) = \lambda \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + C \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $\mu, K \in \mathbb{R}$ tels que

$$g(x, y) = \mu \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + K \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

est radiale, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et vérifie $\Delta g(x, y) = 0$ pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ■

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 . Pour chaque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction $\varphi_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = (x + ay, x + by) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Déterminer l'ensemble D des éléments $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit inversible.
(2) Montrer que pour chaque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $F_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_{(a,b)}(x, y) = f(x + ay, x + by) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

est différentiable sur \mathbb{R}^2 . Calculer ses dérivées partielles premières.

- (3) En déduire l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Solution. (1) Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Notons que la fonction $\varphi_{(a_0, b_0)}$ est linéaire, en particulier elle est inversible si et seulement si $\det \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & b_0 \end{pmatrix} \neq 0$ si et seulement si $a_0 \neq b_0$. L'ensemble recherché D est donc

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b\}.$$

(2) Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f étant différentiable sur \mathbb{R}^2 , et $\varphi_{(a_0, b_0)}$ étant de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 , la fonction $F_{(a,b)}$ est différentiable sur \mathbb{R}^2 par composition. On a de plus pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{(a_0, b_0)}}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) &= DF_{(a_0, b_0)}(\bar{x}, \bar{y})(1, 0) \\ &= Df \circ \varphi_{(a_0, b_0)}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= Df(\varphi_{(a_0, b_0)}(\bar{x}, \bar{y}))(D\varphi_{(a_0, b_0)}(\bar{x}, \bar{y})(1, 0)) \\ &= Df(\bar{x} + a_0\bar{y}, \bar{x} + b_0\bar{y})(1, 1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + a_0\bar{y}, \bar{x} + b_0\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x} + a_0\bar{y}, \bar{x} + b_0\bar{y}) \end{aligned}$$

et de même

$$\frac{\partial F_{(a_0, b_0)}}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = a_0 \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + a_0\bar{y}, \bar{x} + b_0\bar{y}) + b_0 \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x} + a_0\bar{y}, \bar{x} + b_0\bar{y}).$$

- (3) Supposons dans un premier temps que f vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{pour tout } (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2.$$

Notons que $(-1, 1) \in D$ et posons $F = F_{(-1, 1)}$. Via ce qui précède, on a pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Il s'ensuit qu'il existe alors $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x - y, x + y) = F(x, y) = h(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le caractère différentiable de F sur \mathbb{R}^2 entraîne tout de suite que h est dérivable sur \mathbb{R} . Il reste à écrire

$$f(x, y) = f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}, \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = h\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 s'écrivant

$$\phi(x, y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

avec $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} satisfait l'égalité

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{pour tout } (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2.$$

■

4 Extrema, fonctions implicites, extrema liés, optimisation

Exercice 18 Soit $K = [0, 1]^2$ et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x - y + x^3 + y^3 \quad \text{pour tout } (x, y) \in K.$$

Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global sur K . Etudier les extrema locaux de f sur $\text{int}_{\mathbb{R}^2} K$ et globaux de f sur K .

Solution. Puisque K est compact dans \mathbb{R}^2 et que f est continue sur K (**Exer**), la fonction f admet un minimum et un maximum global sur K . D'autre part, puisque f est différentiable sur l'ouvert $\text{int}_{\mathbb{R}^2} K$ (**Exer**) et que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (**Exer**),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = 1 + 3u^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = -1 + 3v^2,$$

f n'admet aucun minimum local (a fortiori global) sur $]0, 1[$. Donc, un minimum (resp., maximum) global de f est nécessairement un élément de $\text{bd}_{\mathbb{R}^2} K$. Observons maintenant que pour tout $y \in [0, 1]$,

$$f(0, y) = -y + y^3 \quad \text{et} \quad f(1, y) = 2 - y + y^3$$

et que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x, 0) = x + x^3 = f(x, 1).$$

Une étude élémentaire de variations donne (**Exer**)

$$\max_{y \in [0, 1]} f(0, y) = 0 = f(0, 0) = f(0, 1),$$

$$\max_{y \in [0, 1]} f(1, y) = 2 = f(1, 0) = f(1, 1),$$

$$\max_{x \in [0, 1]} f(x, 0) = f(1, 0) = 2,$$

$$\max_{x \in [0, 1]} f(x, 1) = f(1, 1) = 2$$

ainsi que

$$\min_{y \in [0, 1]} f(0, y) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\min_{y \in [0, 1]} f(1, y) = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\min_{x \in [0,1]} f(x, 0) = f(0, 0) = 0,$$

$$\min_{x \in [0,1]} f(x, 1) = f(0, 1) = 0.$$

Il vient

$$\max_{(x,y) \in \text{bd}_{\mathbb{R}^2} K} f(x, y) = 2 = f(1, 0) = f(1, 1)$$

et

$$\min_{(x,y) \in \text{bd}_{\mathbb{R}^2} K} f(x, y) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

En conséquence (**Exer**), 2 est le maximum global de f sur K et $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ est le minimum global de f sur K . ■

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Donner l'allure des lignes de niveaux de f .
- (2) Etudier les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .
- (3) Etudier le problème d'optimisation sous contraintes

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{s.c. } 4x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Solution. (1) Rappelons que pour chaque $c \in \mathbb{R}$, la c -ligne de niveau de f est par définition l'ensemble

$$L_c(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = c\}.$$

Tout de suite, notons que $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ et que pour tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$L_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{c}{x} \right\}.$$

L'allure graphique des lignes de niveaux de f est laissée à titre d'exercice (**Exer**).

(2) La fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 (**Exer**). De plus, en observant que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = v \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = u,$$

on obtient le fait que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f . Mais $(0, 0)$ ne peut pas être extremum local de f puisque la hessienne de f en $(0, 0)$

$$\text{hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est ni positive ni négative.

(3) On s'intéresse au problème d'optimisation sous contraintes

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } xy \\ \text{s.c. } 4x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Puisque $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4\}$ est compact (**Exer**) et f est continue sur \mathbb{R}^2 , f admet un minimum global sur C noté (\bar{x}, \bar{y}) . En particulier, (\bar{x}, \bar{y}) est une solution locale de (\mathcal{P}) et il existe alors (**Exer**) un réel λ tel que

$$(\bar{y}, \bar{x}) + \lambda(8\bar{x}, 2\bar{y}) = 0.$$

Ceci donne sans difficultés

$$\begin{cases} 2\lambda\bar{y} + 16\lambda^2\bar{x} = 0 \\ \bar{x} + 2\lambda\bar{y} = 0, \end{cases}$$

et ce système entraîne $\bar{x}(16\lambda^2 - 1) = 0$. Si $\bar{x} = 0$, alors $\bar{y} = 0$ et ceci est absurde puisqu'on doit avoir $4\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$. Donc $\bar{x} \neq 0$ et par suite $16\lambda^2 = 1$, i.e., $\lambda \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$. Distinguons deux cas.

Cas 1 : $\lambda = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a $\bar{y} = -2\bar{x}$. L'égalité $4\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$ donne alors $\bar{x} \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Il s'ensuit

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \right\}.$$

Cas 2 : $\lambda = -\frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a $\bar{y} = 2\bar{x}$. Grâce à $4\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$ on a $\bar{x} \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Il s'ensuit

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) \right\}.$$

On en arrive à

$$\min_{(x,y) \in C} f(x, y) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -1.$$

■

Exercice 20 Trouver les points critiques et indiquer s'il s'agit d'extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

- (a) $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$;
- (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$;
- (c) $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Solution. (a) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^4$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 (**Exer**). Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = -4u + 4v \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 4u - 4v^3$$

et ceci entraîne tout de suite (**Exer**) que l'ensemble des points critiques de f est $\{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}$. Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) = 4$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) = -4, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) = -12v^2.$$

On a alors

$$\text{hess}_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

en particulier la hessienne de f en $(0, 0)$ n'est ni positive ni négative. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. On a également

$$\text{hess}_{(1,1)}f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(-1,-1)}f.$$

Puisque pour chaque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -8\beta^2 - 4(\alpha - \beta)^2,$$

la hessienne de f en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ est définie négative. Donc, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont des maxima locaux de f .

(b) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 (**Exer**). Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = 4u^3 - 4(u - v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 4v^3 + 4(u - v)$$

donc (**Exer**) l'ensemble des points critiques de f est $\{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$. Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) = 4$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) = 12u^2 - 4, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) = 12v^2 - 4.$$

Notons que

$$\text{hess}_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

et que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -4(\alpha - \beta)^2.$$

Ainsi, la hessienne de f en $(0, 0)$ est négative mais pas définie négative. En observant que $f(x, x) = 2x^4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$ pour tout $x \in [-2, 2]$, on justifie que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. Maintenant, écrivons

$$\text{hess}_{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}f = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}f.$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 20\left(\alpha + \frac{1}{5}\beta\right)^2 + \frac{96}{5}\beta^2$$

et ceci nous dit que la hessienne de f en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est définie positive. Donc, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima locaux.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 (**Exer**). Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}(4u - 2u(2u^2+3v^2)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}(6v - 2v(2u^2+3v^2)).$$

Supposons que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ soit un point critique de f . On a

$$\begin{cases} 4\bar{x}\bar{y} - 2\bar{x}\bar{y}(2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2) = 0 \\ 6\bar{x}\bar{y} - 2\bar{x}\bar{y}(2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne tout de suite $\bar{x} = 0$ ou $\bar{y} = 0$. De ceci, on tire sans difficultés (**Exer**) que

$$\{(0, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0), (-1, 0)\}$$

est l'ensemble des points critiques de f . Déterminons si ces points critiques sont des extrema locaux. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) = -8uve^{-(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}(4 - 20u^2 + 8v^4 + 12u^2v^2 - 6v^2)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}(6 - 4u^2 - 30v^2 + 8u^2v^2 + 12v^4).$$

Il vient tout de suite

$$\text{hess}_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donc la hessienne de f en $(0, 0)$ est définie positive. Ainsi, $(0, 0)$ est minimum local de f . Il vient également que la hessienne de f en $(1, 0)$ et en $(0, -1)$ est définie négative puisque

$$\text{hess}_{(0,1)}f = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(0,-1)}f.$$

Donc, $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima locaux. Enfin, la hessienne de f en $(1, 0)$ et en $(-1, 0)$ n'est ni négative ni positive puisque

$$\text{hess}_{(1,0)}f = e^{-1} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{hess}_{(-1,0)}f.$$

En conséquence, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ ne sont pas des extrema locaux. ■