M1 MEEF - Semestre 7,
Année universitaire 2020-2021,
F. Nacry

Corrigé CAPES Blanc 1 - 2020-2021

Problème 1

Partie 1 : Nombres irrationnels

1. L'ensemble des rationnels notés $\mathbb{Q}$ est défini par
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \right\}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut établir l'implication
$$\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$$
ou de manière équivalente (par contraposition)
$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}. \tag{1}$$
Supposons donc que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors (par définition) un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tel que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, ce qui s'écrit encore
$$n = \frac{p^2}{q^2}. \tag{2}$$
Observons tout de suite que nous pouvons supposer que $p \geq 1$ (sinon $p = 0$ puis $n = 0$ et l'implication voulue est immédiate). Le théorème fondamental de l'arithmétique (ou de décomposition en produit de facteurs premiers) nous dit alors qu'il existe un entier $m \geq 1$, $p_1, \ldots, p_m$ des nombres premiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{N}$ tels que
$$p = \prod_{k=1}^{m} p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad q = \prod_{k=1}^{m} p_k^{\beta_k}.$$
En revenant à (2), il vient
$$n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{2(\alpha_k - \beta_k)} = (\prod_{k=1}^{m} p_k^{\alpha_k - \beta_k})^2$$
ce qui entraîne évidemment
$$\sqrt{n} = \prod_{k=1}^{m} p_k^{\alpha_k - \beta_k}. \tag{3}$$
D'autre part, en revenant à (2), nous voyons que $nq^2 = p^2$, en particulier $q^2 \mid p^2$. Cette relation entraîne alors que pour chaque entier $k \in \{1, \ldots, m\}$, $2\alpha_k \geq 2\beta_k$, i.e., $\alpha_k - \beta_k \geq 0$. Ceci et l'égalité (3) nous permettent de conclure que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

3. Un entier naturel $n \geq 2$ est dit être un nombre premier lorsque l'ensemble de ses diviseurs positifs est réduit à $\{1, n\}$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

4. Soit $p \in \mathbb{P}$. Nous allons montrer que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. D'après la question précédente, nous savons que $\sqrt{p} \in \mathbb{N}$. Ceci et l'écriture $p = \sqrt{p}.\sqrt{p}$ nous disent alors que $\sqrt{p}$ est un diviseur positif de p ce qui implique (par primalité de p) $\sqrt{p} = 1$ ou $\sqrt{p} = p$ ce qui est absurde dans les deux cas. On conclut alors que $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. — Par l'absurde, supposons que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$. Cette inclusion donne alors immédiatement $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ et ceci contredit (en gardant à l'esprit que $5 \in \mathbb{P}$) le résultat démontré dans la question précédente.
   — Par l'absurde, supposons que $\sqrt{10}+\sqrt{11} \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré, on déduit sans difficultés que $\sqrt{110} = \sqrt{10}\sqrt{11} \in \mathbb{Q}$. Cette inclusion et l'implication (1) entraînent alors que $\sqrt{110} \in \mathbb{N}$. Il reste à voir que ceci est en contradiction avec l'encadrement

$$\sqrt{100} = 10 < \sqrt{110} < \sqrt{121} = 11.$$

   — Par l'absurde une nouvelle fois, supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \in \mathbb{Q}$. Cette inclusion se traduit sans difficultés par l'existence d'un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tel que

$$p \ln(3) = q \ln(2).$$

   Cette égalité étant équivalente à $e^{p\ln(3)} = e^{q\ln(2)}$, nous en arrivons à

$$3^p = 2^q.$$

   L'inégalité $q \geq 1$ nous dit alors que $2 \mid 3^q$ ce qui est absurde et permet de conclure que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose (avec la convention $0! = 1$)

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

6.1. Nous allons montrer par récurrence que

$$k! \geq 2^{k-1} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Commençons par noter que l'inégalité ci-dessus est évidente pour $k = 1$.
Supposons maintenant que la propriété a lieu pour un certain rang, i.e., $m! \geq 2^{m-1}$ pour un entier $m \geq 1$ fixé. Il découle alors de ceci et de l'inégalité $m + 1 \geq 2$

$$(m+1)! = (m+1).m! \geq (m+1)2^{m-1} \geq 2^m,$$

qui n'est nulle autre que l'inégalité voulue au rang $m + 1$. La récurrence est terminée.

6.2. Puisque la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ est convergente de somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$, on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 3.$$

6.3 La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) croissante et majorée dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers $\sup_{k\geq 1} u_k$.

6.4 On pose $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On veut montrer que $u_n < e$ pour tout entier $n \geq 1$. On peut procéder de manière élémentaire (sans invoquer la borne supérieure) en supposant par l'absurde qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $u_N \geq e$. Il vient alors (par stricte croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$)

$$u_n \geq u_{N+1} > u_N \geq e \quad \text{pour tout } n \geq N + 1.$$

Il reste à passer à la limite pour aboutir à

$$e = \lim_{n\to+\infty} u_n \geq u_{N+1} > e$$

qui est bien sûr absurde.

6.5 La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante puisque pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

6.6. D'après ce qui précède et l'égalité évidente $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, nous obtenons que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et convergent en particulier vers le même réel, à savoir e, et de plus

$$u_n \leq e \leq v_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

L'inégalité de gauche est en fait stricte d'après (6.4) et l'inégalité de droite l'est également puisque $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

6.7 On suppose par l'absurde que $e \in \mathbb{Q}$. Il existe donc deux entiers naturels p, q non nuls tels que $e = p/q$.

6.7.1 On a vu en (6.6) que

$$u_q < e < v_q.$$

6.7.2. L'inégalité ci-dessus s'écrit encore

$$q \times q! u_q < eq \times q! < q \times q! v_q.$$

En revenant à la définition de v_q et à $e = p/q$, on aboutit à

$$(q \times q!)u_q < p \times q! < 1 + (q \times q!)u_q$$

ce qui est une absurdité puisque $(q \times q!)u_q \in \mathbb{N}$. En conclusion, e est irrationnel, i.e., $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6.8. On propose la fonction suivante en Matlab qui prend en entrée une précision ε et un nombre maximal d'itérations itmax et qui va retourner U_N et V_N avec $N \geq 1$ entier tel que $V_N - U_N \leq \varepsilon$ et it le nombre d'itérations effectués.

```
function [U,V,it] = CAPERPI(eps,itmax)
U=2;
V=3;
n=1;
it=0;
while (V-U>eps & it<itmax)
U=U+1/factorial(n+1);
V=U+1/((n+1)*factorial(n+1));
n=n+1;
it=it+1;
end
```

Testons notre fonction (notons que la notation e utilisée dans l'énoncé est justifiée puisque le e en question correspond bien sûr à $e = exp(1)$).

```

>> eps=10^(-5)

eps =

```

```
     9.999999999999999e-06

>> itmax=20

itmax =

    20

>> [U,V,it]=CAPERPI(eps,itmax)

U =

   2.718278769841270


V =

   2.718281870039683


it =

     7

>> exp(1)

ans =

   2.718281828459046
```

Partie 2 : Le nombre $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel

Dans cette partie, on suppose par l'absurde que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Ecrivons $\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$ avec a_1, b_1 deux entiers naturels (non nuls) *premiers entre eux*.

1. Première preuve. On pose $a_2 = 3b_1 - a_1$ et $b_2 = a_1 - b_1$.

   1.1. Pour établir que $\sqrt{3} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1}$, il suffit d'écrire

$$\frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1} = 2\frac{b_1}{a_1 - b_1} - 1 = 2\frac{b_1}{(\sqrt{3} - 1)b_1} - 1 = 2\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1 = \sqrt{3}.$$

   1.2. Puisque $\sqrt{3} = a_1/b_1$, on a tout de suite

$$(\sqrt{3} - 1)a_1 = 3b_1 - a_1 = a_2.$$

   En combinant ceci et l'encadrement $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$, il vient

$$0 < a_2 < a_1.$$

   1.3 On peut directement conclure sans établir le deuxième encadrement. En effet, on a vu que $a_1/b_1 = a_2/b_2$ ce qui s'écrit encore

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$

   en particulier $a_1 \mid a_2 b_1$. Une application du lemme de Gauss donne alors $a_1 \mid a_2$ et ceci rentre en contradiction avec l'encadrement $0 < a_2 < a_1$.

2. Deuxième preuve.

2.1. On rappelle le résultat suivant :

Théorème (fondamental de l'arithmétique) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une unique (à l'ordre près des facteurs) décomposition en produit de facteurs premiers.

2.2. Puisque $\sqrt{3} = a_1/b_1$, on a $3 = a_1^2/b_1^2$ ou encore

$$3b_1^2 = a_1^2.$$

2.3. L'égalité précédente nous dit que $3 \mid a_1^2$. Le lemme d'Euclide (ou un passage à la décomposition en facteurs premiers) nous assure alors que $3 \mid a_1$. Il découle de ceci que $3 \mid b_1^2$ puis de même que précédemment $3 \mid b_1$. Finalement, 3 est un diviseur commun à a_1 et à b_1 ce qui est contradictoire.

3 Troisième preuve.

Nous allons étudier le chiffre des unités dans l'écriture décimale de a_1^2 et/ou $3b_1^2$. On rappelle que pour un entier $n \geq 1$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et un unique $(m+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_m) \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k.$$

Cette expression précédente s'appelle le *développement en base* 10 *de* n. L'entier a_0 est appelé le *chiffre des unités* de n et vérifie bien sûr la relation $n \equiv a_0(10)$.

On commence donc naturellement par observer

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^2 mod 10	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

On distingue alors six cas :

Cas 1 : $b_1^2 \equiv 0(10)$. Dans ce cas, 10 est un diviseur commun à a_1 et b_1 ce qui est contradictoire puisqu'ils sont premiers entre eux.

Cas 2 : $b_1^2 \equiv 1(10)$. On a alors (car $a_1^2 = 3b_1^2$) $a_1^2 \equiv 3(10)$ et ceci est absurde en vertu du tableau ci-dessus.

Cas 3 : $b_1^2 \equiv 4(10)$. Il vient alors $a_1^2 \equiv 2(10)$ ce qui est une absurdité.

Cas 4 : $b_1^2 \equiv 5(10)$. On a $a_1^2 \equiv 5(10)$ et ceci entraîne que 5 est un diviseur commun à a_1 et b_1 ce qui une fois encore contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux.

Cas 5 : $b_1^2 \equiv 6(10)$. On a immédiatement une contradiction puisque dans ce cas $a_1^2 \equiv 8(10)$.

Cas 6 : $b_1^2 \equiv 9(10)$. Là encore, on a une contradiciton puisque $a_1^2 \equiv 7(10)$.

On conclut alors que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Partie 3 : Approximation rationnelle de $\sqrt{2}$

1 Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer que

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}.$$

Seule l'implication $\Leftarrow$ mérite d'être justifiée. Supposons donc que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$. Cette égalité s'écrit évidemment

$$(b - b')\sqrt{2} = a' - a.$$

Si $b \neq b'$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et c'est absurde. On a donc $b = b'$ et ceci entraîne $a' - a = 0$, i.e., $a = a'$.

2 Commençons par établir que pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tel que

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = p_n + q_n\sqrt{2}.$$

Procédons par récurrence. En posant $p_1 = 3$ et $q_1 = 2$, on a évidemment

$$(3 + 2\sqrt{2})^1 = p_1 + q_1\sqrt{2}.$$

Fixons maintenant un entier $m \geq 1$ et supposons qu'il existe un couple $(p_m, q_m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tel que

$$(3 + 2\sqrt{2})^m = p_m + q_m\sqrt{2}.$$

On vérifie alors que

$$(3 + 2\sqrt{2})^{m+1} = (3 + 2\sqrt{2})(p_m + q_m\sqrt{2}) = p_{m+1} + \sqrt{2}q_{m+1},$$

avec $p_{m+1} = 3p_m + 4q_m$ et $q_{m+1} = 2p_m + 3q_m$. Ceci termine la récurrence.
Il reste à voir que la question précédente garantit pour chaque entier $n \geq 1$ l'unicité du couple (p_n, q_n).

3 Il découle de notre étude précédente que les suites $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ sont définies par $p_1 = 3$, $q_1 = 2$ et

$$p_{n+1} = 3p_n + 4q_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 2p_n + 3q_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

4 Montrons que pour tout entier $n \geq 1$,

$$(3 - 2\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}.$$

Procédons une nouvelle fois par récurrence. Puisque $p_1 = 3$ et $q_1 = 2$, on a tout de suite

$$3 - 2\sqrt{2} = p_1 - q_1\sqrt{2}.$$

Fixons à présent un entier $m \geq 1$ et supposons que $(3 - 2\sqrt{2})^m = p_m - q_m\sqrt{2}$. Il suffit de voir que les égalités (provenant de la question précédente)

$$p_{m+1} = 3p_m + 4q_m \quad \text{et} \quad q_{m+1} = 2p_m + 3q_m$$

entraînent

$$(3 - 2\sqrt{2})^{m+1} = (p_m - q_m\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = p_{m+1} - q_{m+1}\sqrt{2}$$

pour terminer la récurrence.

5 En observant que $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$, on obtient pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 = (3 - 2\sqrt{2})^n(3 + 2\sqrt{2})^n = (p_n + q_n\sqrt{2})(p_n - q_n\sqrt{2}) = p_n^2 - 2q_n^2.$$

6 Fixons un entier $n \geq 1$. Si $d \in \mathbb{N}^\star$ est un diviseur commun à p_n et à q_n, d divise $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$. Ceci justifie que p_n et q_n sont premiers entre eux, i.e., la fraction p_n/q_n est irréductible.

7 Fixons un entier $n \geq 1$. L'égalité $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ donne tout de suite

$$\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} = \frac{p_n - \sqrt{2}q_n}{q_n} = \frac{1}{p_nq_n + \sqrt{2}q_n^2}.$$

Il reste à utiliser les inégalités évidentes

$$0 < \frac{1}{p_nq_n + \sqrt{2}q_n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_nq_n + \sqrt{2}q_n^2} < \frac{1}{\sqrt{2}q_n^2}$$

pour conclure.

8 En exploitant les questions (2) et (4), on obtient facilement pour tout entier $n \geq 1$

$$p_n = 2^{-1}[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n]$$

et

$$q_n = (2\sqrt{2})^{-1}[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n].$$

9 Puisque $0 < \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} < 1$, les deux relations obtenues à la question (8) donnent respectivement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2p_n}{(3+2\sqrt{2})^n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{2}q_n}{(3+2\sqrt{2})^n} = 1.$$

10 Fixons un réel $A > 0$. Puisque $2\sqrt{2}q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (3+2\sqrt{2})^n$, on a en particulier $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et ceci nous dit qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $q_N > A$. Il reste à poser $p = p_N$ et $q = q_N$ et à invoquer la question (7) pour conclure que

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{2} < \frac{1}{q^2\sqrt{2}} < \frac{1}{q^2}.$$

11 En Matlab, la fonction suivante prend en entrée un entier $N \geq 1$ et renvoie p_N et q_N.

```
function [p,q] = CAPESMTPERPI(N)
p=3;
q=2;
for k=1:N-1
    r=p;
    p=3*r+4*q;
    q=2*r+3*q;
end
end
```

Cette fonction donne une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$:

```
>> [p,q]=CAPESMTPERPI(10)

p =

    22619537


q =

    15994428

>> p/q

ans =

   1.414213562373096

>> sqrt(2)

ans =

   1.414213562373095
```

Problème 2

Dans toute la suite, le nombre d'éléments d'un ensemble fini X, appelé *cardinal* de X et est noté $\mathrm{card}(X)$. On note $\lfloor\cdot\rfloor$ la fonction *partie entière*. On convient que $0! = 1$ et $0^0 = 1$.

Partie 1 : Coefficients binomiaux

1. Soit $n \geq 1$ un entier. On a pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\big(n-(k+1)\big)!} = \frac{n-k}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, on a évidemment l'inégalité

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Supposons donc $n \geq 1$. La question précédente nous assure pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$ de l'équivalence

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1} \Leftrightarrow \binom{n}{k} \leq \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Il découle de ceci

$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}.$$

Si n est pair, on a tout de suite

$$\binom{n}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Si n est impair, on a

$$\binom{n}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} = \binom{n}{((n-1)/2) + 1} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

où la deuxième égalité résulte de la propriété de symétrie des coefficients binomiaux (à savoir, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$). Dans les deux cas, on dispose bien de l'égalité

$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

3. Par récurrence nous allons établir qu'un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ a un ensemble de parties qui est fini, de cardinal 2^n.

Pour $X = \emptyset$, on a évidemment $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ qui est un ensemble fini de cardinal $2^0 = 1$.

Fixons un entier $m \geq 1$ et supposons que tout ensemble fini de cardinal m a son ensemble de parties qui est fini et de cardinal 2^m. Soit X un ensemble fini à $m+1$ éléments. Fixons $a \in X$ et notons $X_a = X \setminus \{a\}$ qui est un ensemble fini vérifiant $\mathrm{card}(X_a) = m$. Observons que l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X s'écrit alors

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : a \notin Y\} \cup \{Y \in \mathcal{P}(X) : a \in Y\}. \tag{4}$$

Il est aisé de constater que

$$A = \{Y \in \mathcal{P}(X) : a \notin Y\} = \mathcal{P}(X_a).$$

L'hypothèse de récurrence nous dit alors que A est fini avec $\mathrm{card}(A) = 2^m$. Concernant l'ensemble $B = \{Y \in \mathcal{P}(X) : a \in Y\}$, le caractère bijectif de l'application $\Phi : B \to \mathcal{P}(X_a)$ définie par

$$\Phi(Y) = Y \setminus \{a\} \quad \text{pour tout } Y \in B,$$

nous assure que B est un ensemble fini et de même cardinal que $\mathcal{P}(X_a)$. Il reste à revenir à l'union disjointe (4) pour conclure que $\mathcal{P}(X)$ est un ensemble fini de cardinal

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^m + 2^m = 2^{m+1}.$$

Ceci termine la récurrence.

4. Etant donné un ensemble fini de cardinal $m \in \mathbb{N}$, nous savons que le nombre de parties de X à k éléments avec $k \in \{0, \ldots, n\}$ correspond à $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. En combinant ceci à la question précédente, on conclut alors que le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ est donné par

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n.$$

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Nous allons montrer par récurrence que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conventions $0! = 1$ et $0^0 = 1$ permettent d'écrire

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} = 1.$$

Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m-k}.$$

De cette dernière égalité, on déduit sans peine

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m+1-k}. \\
&= \sum_{l=1}^{m+1} \begin{pmatrix} m \\ l-1 \end{pmatrix} a^l b^{m-(l-1)} + \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m+1-k}. \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} [\begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}] a^k b^{m+1-k} + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} a^{m+1} b^0 + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} a^0 b^{m+1}.
\end{aligned}$$

Il reste à observer que $\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, m\}$$

pour conclure que

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m+1-k}.$$

Ceci termine la récurrence.

6. Une application directe de la question précédente (i.e., du binôme de Newton) donne

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

7. Une nouvelle application du binôme de Newton donne

$$0 = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Il découle de cette égalité

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\in 2\mathbb{N}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\in 2\mathbb{N}+1}} \binom{n}{k}$$

et ceci justifie qu'un ensemble fini a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.

Partie 2 : Nombre d'antichaînes

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini non vide de cardinal $n \geq 1$. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ (on dit aussi que $\mathcal{F}$ est une *classe de parties de* E). On dit que $\mathcal{F}$ est une antichaîne de E lorsque pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{F} \setminus \{A\}, B \not\subset A.$$

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. Notons a, b les deux éléments (distincts) de E (donc $E = \{a, b\}$). On vérifie que les seules antichaînes possibles sont

$$\{\emptyset\}, \{E\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}.$$

2. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note

$$\mathcal{P}_k = \{A \in \mathcal{P}(E) : \mathrm{card}(A) = k\}.$$

Le fait que les ensembles $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ soient des antichaînes de E découle du fait que pour A, B deux ensembles finis, on a l'équivalence

$$\begin{cases} A \subset B \\ \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

3. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites $(C_j)_{0\leq j\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ telles que pour tout $j, j' \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{card} C_j = j \quad \text{et} \quad C_j \subset C_{j'} \quad \text{lorsque}\, j \leq j'.$$

La construction d'un élément de $\mathcal{C}$ consiste en la construction de $n+1$ parties de E notées $C_0, \ldots, C_n$ comme suit :

— La définition de $\mathcal{C}$ impose que le premier terme C_0 d'un élément de $\mathcal{C}$ soit l'ensemble vide, i.e., $C_0 = \emptyset$;

— L'ensemble C_0 étant construit, on construit C_1 en choisissant un élément c_1 de E parmi n possibles : n choix possibles ;

— L'ensemble C_1 étant construit, on construit C_2 en choisissant un élément de $E \setminus \{c_1\}$: $n-1$ choix possibles ;

— ...

— L'ensemble C_{n-1} étant construit, on construit C_n en choisissant un élément de $E \setminus \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$: 1 choix possible.

On conclut alors que $\mathrm{card}\, \mathcal{C} = n!$.

4. Soit A une partie de E de cardinal $k \in \{0, \ldots, n\}$. Un élément $(C_j)_{0 \leq j \leq n}$ est dit *adapté* à A s'il existe $j_0 \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $C_{j_0} = A$. On note $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ adaptés à A. Remarquons que pour $(C_j)_{0 \leq j \leq n} \in \mathcal{C}_A$, on doit avoir $C_k = A$. Ceci et un dénombrement élémentaire comme celui qui précède nous assure de l'égalité
$$\operatorname{card} \mathcal{C}_A = k!(n-k)!.$$
5. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{F}$ une antichaîne de E. Nous allons montrer que
$$\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \neq \emptyset \Leftrightarrow A = B.$$
$\Leftarrow$, L'implication résulte de la non-vacuité de $\mathcal{C}_C$ pour n'importe quel $C \in \mathcal{P}(E)$.
$\Rightarrow$, Supposons que $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \neq \emptyset$. Notons $(C_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}$ un élément de cette intersection, i.e., $(C_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}$ est un élément de $\mathcal{C}$ à la fois adapté à A et à B. Le caractère adapté de la famille $(C_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}$ nous assure de l'existence de $i_A, i_B \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $C_{i_A} = A$ et $C_{i_B} = B$. En combinant ces deux égalités et la définition de $\mathcal{C}$, nous voyons alors que $A \subset B$ ou $B \subset A$. Il reste à observer que si A et B sont deux éléments distincts de l'antichaîne $\mathcal{F}$, alors nécessairement $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, ce qui est contradictoire.
6. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note f_j le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ dont le cardinal est j, i.e.,
$$f_j = \operatorname{card}\{A \in \mathcal{F} : \operatorname{card} A = j\}.$$
Il découle de l'inclusion $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}$ et de la question précédente
$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \operatorname{card} \mathcal{C}_A \leq \operatorname{card} \mathcal{C} = n!.$$
Il vient alors
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\{A \in \mathcal{F} : \operatorname{card} A = j\}} \operatorname{card} \mathcal{C}_A \leq n!$$
ce qui s'écrit encore (grâce à la Question 4.)
$$\sum_{j=1}^{n} j!(n-j)! \sum_{\{A \in \mathcal{F} : \operatorname{card} A = j\}} 1 \leq n!.$$
En revenant à la définition de $f_1, \ldots, f_n$, on conclut que
$$\sum_{j=1}^{n} j!(n-j)! f_j \leq n!.$$
7. L'inégalité obtenue à la question précédente entraîne tout de suite
$$\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} j!(n-j)! f_j \leq 1$$
qui s'écrit encore
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{\binom{n}{j}} \leq 1.$$
8. Une application directe de la Question 2 de la Partie 1 (Coefficient binomiaux) du présent problème donne l'inégalité attendue, i.e.,
$$\sum_{j=1}^{n} f_j \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$
9. Avec $k = \lfloor n/2 \rfloor$, on vérifie (voir Question 4 de la Partie 1 (Coefficients binomiaux) et Question 2 de la présente partie) que l'antichaîne $\mathcal{P}_k$ est de cardinal $\binom{n}{k}$.