MEEF Mathématiques - UPVD & UM
M1 - Semestre 8
Année universitaire 2020-2021

# Problème 8

## Lundi 8 mars 2021, durée 5h

**************

**Consignes spécifiques au distanciel** :

- Numériser (éviter les photos) votre production sous une résolution **acceptable**. Merci d'envoyer votre production sous la forme d'un unique fichier .pdf
- Déposer votre fichier sur l'espace prévu Moodle.
- Début/Fin de l'épreuve : lundi 8 Mars 13h00-18h00 (19h40 si tiers-temps).
- Documents et calculatrice non autorisés.

**************

# A propos des fonctions convexes d'une variable réelle

Une partie $C$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est dite être *convexe* lorsque

$$tx + (1-t)y \in C \quad \text{pour tout } t \in [0,1], x, y \in C.$$

**On rappelle** que les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$. **On rappelle** également que

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}, \quad ]a,b] = \{ta + (1-t)b : t \in ]0,1]\}, \ldots$$

Dans toute la suite $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Un point $x \in I$ est dit être un *point intérieur* de $I$ lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$]x-r, x+r[ \subset I.$$

L'ensemble des points intérieurs de $I$ est noté $\operatorname{int} I$ et est appelé *intérieur de* $I$. **On rappelle** que $\operatorname{int} I$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $I$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

– On dit que $f$ *est convexe* (sur $I$) lorsque

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in I, \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Lorsque $-f$ est convexe (sur $I$), on dit que $f$ est *concave* (sur $I$).

– On dit que $f$ est *lipschitzienne* sur une partie $D$ de $I$ lorsqu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y| \quad \text{pour tout } x, y \in D.$$

– On dit que $f$ est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en un point $a \in I$ qui n'est pas la borne gauche (resp. droite) de $I$ lorsque

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{resp. } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$$

existe dans $\mathbb{R}$. Si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) et est appelée *nombre dérivé à gauche* (resp. *nombre dérivé à droite*) de $f$ en $a$.

– L'ensemble

$$\operatorname{epi} f := \{(x,r) \in I \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$

est appelé *épigraphe* de $f$.

**On rappelle** que toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est (Riemann) intégrable sur $[a,b]$. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est (Riemann) intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

# 1 Généralités et premiers exemples

1. Soit $\mathcal{A} : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $\mathcal{A}$ est affine, i.e., il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{A}(x) = ax + b \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est convexe.

2. Montrer que la fonction $\mathcal{V} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{V}(x) = |x| \quad \text{pour tout } x \in I$$

est convexe.

3. Soit $\mathcal{C} : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\mathcal{C}(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe sur $I$.

4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si l'ensemble $\operatorname{epi} f$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tout $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ avec $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, on a
$$f(\sum_{j=1}^n t_j x_j) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(x_j).$$
6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$. On suppose que
$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{pour tout } x, y \in I,$$
une relation évidemment vérifiée par toutes les fonctions convexes. L'objectif des questions qui suivent est d'établir la convexité de $f$.
   (a) Par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_1, \ldots, x_{2^n} \in I$, on a
   $$f(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}\big(f(x_1) + \ldots + f(x_{2^n})\big).$$
   (b) En déduire que pour tout $x, y \in I$ et pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq 2^n$,
   $$f(\frac{m}{2^n}x + (1 - \frac{m}{2^n})y) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + (1 - \frac{m}{2^n})f(y).$$
   (c) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a
   $$\frac{\mathrm{Ent}(2^n t)}{2^n} \to t,$$
   où la notation $\mathrm{Ent}(\cdot)$ désigne la partie entière.
   (d) Etablir que $f$ est convexe.

## 2 Opérations sur les fonctions convexes

1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes sur $I$ et $\lambda \geq 0$ un réel. Montrer que les fonctions $f + g$ et $\lambda f$ sont des fonctions convexes sur $I$.
2. Que dire du produit de deux fonctions convexes sur $I$ ?
3. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante définie sur un intervalle $J$ contenant $f(I)$. Montrer que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur $I$.
4. Soient $\Omega$ un ensemble non vide et $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de fonctions convexes de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$f_\omega(x) \leq M \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$
   (a) Justifier que la fonction $\zeta : I \to \mathbb{R}$ définie par
   $$\zeta(x) = \sup_{\omega \in \Omega} f_\omega(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$
   est bien définie.

(b) Montrer que
$$\operatorname{epi}(\zeta) = \bigcap_{\omega \in \Omega} \operatorname{epi} f_\omega.$$
(c) En déduire que la fonction $\zeta$ est convexe.

5. Soient $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $c \in [a, b]$. Montrer que la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_c^x g(y)dy \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$
est convexe.

# 3 Trois pentes - Croissance des pentes

Cette section est dédiée à deux résultats fondamentaux de l'analyse convexe.

**Lemme des trois pentes.** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $u, v, w \in I$ avec $u < v < w$. Alors, on a
$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}. \tag{1}$$

**Proposition (croissante des pentes).** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $a \in I$. Alors, la fonction $q_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$q_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pour tout } x \in I$$
est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

L'objectif des questions ci-dessous est d'établir ces deux résultats.

1. Donner une interprétation géométrique de (1).
2. Justifier qu'il existe $t \in ]0, 1[$ tel que $v = tu + (1 - t)w$.
3. Montrer que
$$f(v) - f(u) \leq (1 - t)\big(f(w) - f(u)\big).$$
4. Etablir $1 - t = \frac{v-u}{w-u}$ et en déduire la première inégalité de (1).
5. Montrer la 2ème inégalité de (1).
6. En distinguant trois cas, établir la proposition relative à la croissance des pentes.

# 4 Dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \operatorname{int} I$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$.

1. Montrer que
$$q_a(x) \leq q_a(a + \varepsilon) \quad \text{pour tout } x \in ]-\infty, a[\cap I$$
et
$$q_a(a - \varepsilon) \leq q_a(x) \quad \text{pour tout } x \in ]a, +\infty[\cap I.$$
En déduire que
$$s := \sup_{x \in ]-\infty, a[\cap I} q_a(x) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad i := \inf_{x \in ]a, +\infty[\cap I} q_a(x) \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $s \leq i$.
3. En utilisant la croissance des pentes et la question précédente, montrer que $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$ et que
$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$
4. Soient $x, y \in \operatorname{int} I$ avec $x < y$. Montrer que
$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$
En déduire que $f'_g$ et $f'_d$ sont des fonctions croissantes sur $\operatorname{int} I$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $[a, b] \subset \operatorname{int} I$.
   (a) Justifier que $f'_g$ et $f'_d$ sont Riemann intégrables sur $[a, b]$.
   (b) Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose
   $$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n\}.$$
   Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n-1} f'_d(x_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f'_g(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k).$$
   (c) En déduire que
   $$\int_a^b f'_d(t)dt = f(b) - f(a) = \int_a^b f'_g(t)dt.$$
   (d) Conclure que pour tout $x, y \in \operatorname{int} I$, on a
   $$\int_x^y f'_d(t)dt = f(y) - f(x) = \int_x^y f'_g(t)dt.$$
6. Montrer que pour tout $x, y \in \operatorname{int} I$, on a
$$f(y) \geq f(x) + f'_g(x)(y - x) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f(x) + f'_d(x)(y - x).$$
Donner une interprétation géométrique de ces inégalités. Comment s'écrivent-elles lorsque $f$ est supposé dérivable sur $\operatorname{int} I$ ?

## 5 Continuité des fonctions convexes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur l'intervalle $I$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $[a, b] \subset \operatorname{int} I$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \operatorname{int} I$ avec $x < y$
$$f'_d(a)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'_g(b)(y - x).$$
2. En déduire que $f$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.
3. Montrer que toute fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$.
4. Déduire des questions précédentes que $f$ est continue sur $\operatorname{int} I$. Montrer que la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
est convexe et qu'elle n'est pas continue sur $[0, 1]$. Est-ce en contradiction avec ce qui précède ?

## 6 Dérivabilité des fonctions convexes

Dans cette section, on suppose que l'intervalle $I$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie $I$.

1. On suppose que $f$ est dérivable sur $I$. Montrer que $f'_g = f'_d = f'$ en déduire que $f'$ est croissante sur $\operatorname{int} I$. Conclure que $f'$ est croissante sur $I$.
2. On suppose que $f$ est deux fois dérivable sur $I$. Que dire de $f''$ ?
3. On suppose dans cette question que $f$ est dérivable sur $I$ et $f'$ est croissante sur $I$.
   (a) Soient $x, y \in I$ avec $x < y$, $t \in ]0, 1[$ et $z = tx + (1 - t)y$. Justifier qu'il existe $\xi_1 \in ]x, z[$ et $\xi_2 \in ]z, y[$ tels que
   $$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_2).$$
   (b) Montrer que
   $$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$
   (c) Etablir que $z - x = (1 - t)(y - x)$ et $y - z = t(y - x)$.
   (d) Conclure que $f$ est convexe.
4. Montrer que $-\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est convexe sur $[0, +\infty[$. Montrer que cette fonction n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ et qu'elle n'est pas dérivable à droite en 0. Est-ce en contradiction avec les résultats des Sections 4 et 5 ?

## 7 Quelques inégalités

1. **Inégalité de Young.** Soit $p \in ]1, +\infty[$. On appelle *exposant conjugué* de $p$ le réel $q \in ]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   ($a$) Justifier que $\ln(\cdot) : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est concave. En déduire que pour tout couple $(a, b)$ de réels positifs,
   $$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
   ($b$) **Application :** soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que si pour $p \in ]1, +\infty[$, la série de terme général $a_n^p$ converge, alors, pour tout réel $r > 1 - \frac{1}{p}$, la série de terme général $\frac{a_n}{n^r}$ converge.
2. En utilisant la fonction $f : [e, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) = -\ln(\ln(x)) \quad \text{pour tout } x \in [e, +\infty[$$
   montrer que
   $$\sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\big(\frac{x + y}{2}\big) \quad \text{pour tout } x \in [e, +\infty[.$$
3. **Inégalité de Nesbitt.** Soient $a, b, c > 0$ trois réels. On souhaite montrer que
   $$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}.$$

$(a)$ On suppose dans cette question que $a+b+c=1$. Montrer que la fonction $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{pour tout } x \in ]0,1[$$

est convexe sur $]0,1[$. En déduire que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}.$$

$(b)$ En introduisant $a' = \frac{a}{a+b+c}$, $b' = \frac{b}{a+b+c}$ et $c' = \frac{c}{a+b+c}$ et en vous appuyant sur $(a)$, établir l'inégalité souhaitée.

$(c)$ Montrer que si $a, b, c$ sont les trois côtés d'un triangle alors on a même l'encadrement

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq 2.$$

(Indication : si $p$ désigne le demi-périmètre du triangle, justifier que $a+b \geq p$, $a+c \geq p$ et $b+c \geq p$, puis conclure.)

L'inégalité de droite est-elle vraie sans l'hypothèse géométrique que $a, b, c$ sont les côtés d'un triangle ?

4. **Comparaison de moyennes.** Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. On définit quatre moyennes de ces $n$ nombres, respectivement leur moyenne arithmétique $M_a$, leur moyenne géométrique $M_g$, leur moyenne quadratique $M_q$ et leur moyenne harmonique $M_h$ :

$$M_a := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ M_g := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},\ M_q := \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},\ M_h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Montrer que

$$M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_q.$$

(Indication : pour $M_g \leq M_a$, on pourra utiliser la fonction ln ; pour $M_h \leq M_g$, considérer $1/M_h$ ; pour $M_a \leq M_q$, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

5. **Inégalité de Jensen intégrale.**

Soit $\varphi : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

$(a)$ Soit $f : [0,1] \to ]a,b[$ une fonction continue. Montrer, après avoir justifié que $\int_0^1 f(t)dt \in ]a,b[$, l'inégalité

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t))dt.$$

$(b)$ **Application :** Montrer que pour toute fonction $f$ définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives, on a

$$\forall \alpha > 1,\ \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^\alpha \leq \int_0^1 (f(t))^\alpha dt.$$

En déduire en appliquant cela à la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2},\ t \in [0,1]$, que

$$\forall \alpha > 0,\ \int_0^1 (\cos\theta)^{2\alpha} d\theta \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\alpha+1}.$$

6. $(a)$ Montrer que $\sin : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ est concave.

   $(b)$ En déduire que

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi/2].$$

   $(c)$ **Application :** on veut montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3 \sin^2 x}.$$

i. Justifier que cette convergence est équivalente à celle de la série de terme général $u_n$ où

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^3 \sin^2 x}.$$

ii. Montrer que pour tout entier $n$,

$$u_n \leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + n^3 \pi^3 \sin^2 x}.$$

iii. A l'aide de l'inégalité de gauche établie au b) et d'un chagement de variable montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et conclure.

Proposition de corrigé.

# 1 Généralités et premiers exemples

1. La propriété désirée découle des égalités

$$\begin{aligned} a(tx+(1-t)y)+b &= atx+a(1-t)y+b \\ &= atx+tb+a(1-t)y+(1-t)b \\ &= t(ax+b)+(1-t)(ay+b), \end{aligned}$$

valides pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$.

2. La convexité de $\mathcal{V}$ sur $I$ découle de l'inégalité triangulaire satisfaite par $|\cdot|$.

3. Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Les égalités

$$\begin{aligned} &\big(tx+(1-t)y\big)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \\ =&(t^2-t)x^2 + \big((1-t)^2-(1-t)\big)y^2 + 2t(1-t)xy \\ =&t(t-1)(x^2+y^2-2xy) \\ =&(t-1)(x-y)^2 \end{aligned}$$

montrent que

$$\big(tx+(1-t)y\big)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \leq 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\big(tx+(1-t)y\big)^2 \leq tx^2 + (1-t)y^2.$$

La convexité de $\mathcal{C}$ est établie.

4. $\Rightarrow$, Supposons que $f$ soit convexe sur $I$. Soient $t \in [0,1]$, $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f$. Par convexité de $f$, on a

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \leq tr_1+(1-t)r_2.$$

Il vient alors

$$\big(tx_1+(1-t)x_2, tr_1+(1-t)r_2\big) \in \operatorname{epi} f,$$

c'est-à-dire

$$t(x_1, r_1)+(1-t)(x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f.$$

$\Leftarrow$, Supposons que $\operatorname{epi} f$ soit convexe. Soient $t \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in I$. Par convexité de l'épigraphe, on a

$$t(x_1, f(x_1))+(1-t)(x_2, f(x_2)) \in \operatorname{epi} f.$$

Ceci s'écrit encore

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

et cette dernière inégalité traduit bien la convexité de $f$ sur $I$.

5. Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "

$$f(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tout $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ avec $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$".
Par récurrence, nous allons montrer que $\mathcal{P}(n)$ a lieu pour chaque entier $n \geq 1$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est acquise. Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Fixons $y_1, \ldots, y_{n+1} \in I$, $\tau_1, \ldots, \tau_{n+1} \in [0,1]$ avec $\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j = 1$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, posons $t_j = \frac{\tau_j}{1-\tau_{n+1}} \in [0,1]$. Il est clair que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$ et

$$f\big(\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j y_j\big) = f\big((1-\tau_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} t_j y_j + \tau_{n+1} y_{n+1}\big).$$

La convexité de $f$ nous permet alors d'écrire

$$f\big(\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j y_j\big) \leq (1-\tau_{n+1}) f\big(\sum_{j=1}^{n} t_j y_j\big) + \tau_{n+1} f(y_{n+1}).$$

Une application de notre hypothèse de récurrence nous donne

$$f\big(\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j y_j\big) \leq (1-\tau_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} t_j f(y_j) + \tau_{n+1} f(y_{n+1}).$$

En revenant à la définition de $t_1, \ldots, t_n$, on conclut que

$$f\big(\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j y_j\big) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \tau_j f(y_j).$$

La récurrence est terminée et la propriété voulue est établie.

6. (a) Comme indiqué par la question, nous allons établir la propriété souhaitée par récurrence. Commençons par noter que cette récurrence s'initialise tout de suite grâce à notre hypothèse sur $f$, à savoir

$$f\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{pour tout } x, y \in I.$$

Fixons un entier $n \geq 1$ et supposons que la propriété de l'énoncé ait lieu, i.e., pour tout réels $x_1, \ldots, x_{2^n} \in I$, on a

$$f\big(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\big) \leq \frac{1}{2^n}\big(f(x_1) + \ldots + f(x_{2^n})\big).$$

Soient $y_1, \ldots, y_{2^{n+1}} \in I$ fixés. En posant

$$Y = \frac{y_1 + \ldots + y_{2^n}}{2^n} \in I \quad \text{et} \quad Y' = \frac{y_{2^n+1} + \ldots + y_{2^{n+1}}}{2^n} \in I$$

il vient

$$f\big(\frac{y_1 + \ldots + y_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\big) = f\big(\frac{Y+Y'}{2}\big) \leq \frac{f(Y)+f(Y')}{2}. \tag{2}$$

Nous pouvons à présent exploiter notre hypothèse de récurrence pour obtenir

$$f(Y) \leq \frac{1}{2^n}\big(f(y_1) + \ldots + f(y_{2^n})\big) \tag{3}$$

et

$$f(Y') \leq \frac{1}{2^n}\big(f(y_{2^n+1}) + \ldots + f(y_{2^{n+1}})\big). \tag{4}$$

Il reste à combiner (2), (3) et (4) pour conclure que

$$f\big(\frac{y_1 + \ldots + y_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\big) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\big(f(y_1) + \ldots + f(y_{2^{n+1}})\big)$$

ce qui termine la récurrence. La propriété désirée est établie.

(b) Soient $x, y \in I$ et $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq 2^n$. Si $m = 0$ ou $m = 2^n$, il n'y a rien à établir. Supposons donc $0 < m < 2^n$. Dans ce cas, on peut exploiter la question précédente avec $x_1 = \ldots = x_m = x$ et $x_{m+1} = \ldots = x_{2^n} = y$ pour obtenir

$$f\big(\frac{mx + (2^n - m)y}{2^n}\big) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \frac{2^n - m}{2^n}f(y)$$

qui s'écrit également

$$f\big(\frac{m}{2^n}x + (1 - \frac{m}{2^n})y\big) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + (1 - \frac{m}{2^n})f(y).$$

(c) On observe que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n t - 1 \leq \mathrm{Ent}(2^n t) \leq 2^n t$$

qui est évidemment équivalente à

$$t - \frac{1}{2^n} \leq \frac{\mathrm{Ent}(2^n t)}{2^n} \leq t.$$

Une application directe du théorème d'encadrement permet de conclure quant à la convergence attendue.

(d) Soit $t \in [0, 1]$, $x, y \in I$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Ent}(2^n t) \leq 2^n$, nous pouvons appliquer la Question (b) pour obtenir

$$f\big(\frac{\mathrm{Ent}(2^n t)x + (2^n - \mathrm{Ent}(2^n t))y}{2^n}\big) \leq \frac{\mathrm{Ent}(2^n t)}{2^n}f(x) + (1 - \frac{\mathrm{Ent}(2^n t)}{2^n})f(y).$$

Il reste à voir que la continuité de $f$ et la convergence donnée par la Question (c) permettent de passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus et d'aboutir à

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La convexité de $f$ est démontrée.

## 2 Opérations sur les fonctions convexes

1. C'est évident en revenant à la définition d'une fonction convexe.
2. Le produit de deux fonctions convexes sur un intervalle $I$ n'est en général pas convexe sur $I$ : on pourra penser à la fonction cube qui s'écrit comme produits de fonctions affines.
3. Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Par convexité de $f$, on peut écrire
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
Les inclusions $f(x), f(y) \in J$ et la convexité de $J$ nous garantissent que
$$tf(x) + (1-t)f(y) \in J.$$
La croissance de $g$ donne alors
$$g\big(f(tx + (1-t)y)\big) \leq g\big(tf(x) + (1-t)f(y)\big).$$
Il reste à exploiter la convexité de $g$ pour aboutir à l'inégalité
$$g\big(f(tx + (1-t)y)\big) \leq t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y)$$
qui traduit la convexité de $g \circ f$.
4. (a) Ceci découle du fait que pour chaque $x \in I$, la partie de $\mathbb{R}$
$$\{f_\omega(x) : \omega \in \Omega\}$$
est non vide et majorée dans $\mathbb{R}$.
(b) L'égalité est une conséquence directe de la définition de l'épigraphe et de $\zeta$.
(c) Puisque l'intersection d'une famille quelconque non vide de convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un convexe, la question précédente combinée à la convexité de $f_\omega$ pour chaque $\omega \in \Omega$ nous disent que l'épigraphe de $\zeta$ est convexe, i.e., $\zeta$ est convexe.
5. Fixons $t \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $x_1 \leq x_2$ et $z = tx_1 + (1-t)x_2$. On commence par écrire une évidence
$$g(z) - tg(x_1) - (1-t)g(x_2) = t\big(g(z) - g(x_1)\big) + (1-t)\big(g(z) - g(x_2)\big).$$
Puis par Chasles,
$$t\big(g(z) - g(x_1)\big) + (1-t)\big(g(z) - g(x_2)\big) \leq t\int_{x_1}^{z} g(y)dy - (1-t)\int_{z}^{x_2} g(y)dy.$$
On invoque alors la croissance de $g$ et les inégalités $x_1 \leq z$ et $z \leq x_2$ pour obtenir
$$t\big(g(z) - g(x_1)\big) + (1-t)\big(g(z) - g(x_2)\big) \leq t(z - x_1)g(z) - (1-t)(x_2 - z)g(z) = 0.$$

# 3 Trois pentes - Croissance des pentes

1. Dessin !
2. Ceci découle de
$$v \in ]u,w[= \{\tau u + (1-\tau)w : \tau \in ]0,1[\}.$$
3. Par convexité de $f$, on a
$$f(tu + (1-t)w) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$
et cette inégalité est équivalente à
$$f(v) - f(u) \leq (1-t)\big(f(v) - f(u)\big).$$
4. De l'égalité $tu + (1-t)w = v$ on tire $(1-t)(w-u) = v-u$, i.e.,
$$(1-t) = \frac{v-u}{w-u}.$$
Ceci et la question précédente donne
$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}.$$
5. Analogue à ce qui précède.
6. Pour établir la croissance de $q_a$, on fixe $x, x' \in I$ avec $x < x'$. Trois cas se présentent alors naturellement, à savoir :
   (i) $x < x' < a$. Il suffit d'appliquer la deuxième inégalité du lemme des trois pentes pour obtenir
   $$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a)-f(x')}{a-x'},$$
   ce qui s'écrit encore $q_a(x) \leq q_a(x')$.
   (ii) $a < x < x'$. Dans ce cas, on exploite la première inégalité du lemme des trois pentes pour écrire
   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x')-f(a)}{x'-a},$$
   i.e., $q_a(x) \leq q_a(x')$.
   (iii) $x < a < x'$. Ici, on utilise une nouvelle fois la première inégalité du lemme des trois pentes pour en arriver à
   $$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(x')-f(a)}{x'-a},$$
   i.e., $q_a(x) \leq q_a(x')$.

## 4 Dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes

1. Pour tout $x \in ]-\infty, a[ \cap I$, on a evidemment
$$x \leq a + \varepsilon.$$
Puisque $a + \varepsilon \in I$, nous pouvons exploiter la croissance de $q_a(\cdot)$ pour obtenir
$$q_a(x) \leq q_a(a+\varepsilon) \quad \text{pour tout } x \in ]-\infty, a[ \cap I.$$
On en déduit que l'ensemble
$$\{q_a(x) : x \in ]-\infty, a[ \cap I\}$$
est non vide et majoré dans $\mathbb{R}$, en particulier il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ que l'on note $s$. De même, on montre que
$$q_a(a-\varepsilon) \leq q_a(x) \quad \text{pour tout } x \in ]a, +\infty[ \cap I$$
ce qui garantit que l'ensemble
$$\{q_a(x) : x \in ]a, +\infty[ \cap I\}$$
est non vide et minoré : on note $i$ sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
2. L'inégalité $s \leq i$ découle directement de l'inégalité
$$q_a(x) \leq q_a(y)$$
valide pour tout $x \in ]-\infty, a[ \cap I$ et pour tout $y \in ]a, +\infty[ \cap I$.
3. La croissance de $q_a$ donne
$$\lim_{x \to a, x < a} q_a(x) = s.$$
Il découle de ceci, de la définition de $q_a(\cdot)$ et de l'inclusion $s \in \mathbb{R}$ que $f(\cdot)$ est dérivable à gauche de $a$ avec $f'_g(a) = s$. De même, $f(\cdot)$ est dérivable à droite en $a$ avec $f'_d(a) = i$. L'inégalité $s \leq i$ obtenue à la question précédente peut donc également s'écrire
$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$
4. Soit $h > 0$ tel que $x + h < y$. D'après la proposition relative à la croissance des pentes, on a
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
Un passage à la limite donne alors
$$f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
Soit $k < 0$ tel que $y + k > x$. De même que ci-dessus, on obtient
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y+k) - f(y)}{k},$$
d'où l'on tire par un passage à la limite
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y).$$
La croissance de $f'_g$ et de $f'_d$ découle de ce qui précède.

5. (a) La Riemann intégrabilité de $f'_g$ et $f'_d$ sur $[a,b]$ découle de la croissance de ces deux fonctions.

(b) De la Question 4. ci-dessus, on tire que pour chaque $k \in \{1,\dots,n-1\}$, on a

$$f'_d(x_k)(x_{k+1}-x_k) \leq f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq f'_g(x_k)(x_{k+1}-x_k).$$

L'inégalité souhaitée est alors immédiate.

(c) Fixons pour un moment $n \geq 1$ entier. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'_d(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \frac{x-c}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'_d(a+k\frac{b-a}{n})$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'_g(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \frac{x-c}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'_g(a+k\frac{b-a}{n}).$$

D'autre part, un simple télescopage donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Par Riemann intégrabilité de $f'_g$ et $f'_d$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} f'_d(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \int_a^b f'_d(t)dt$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} f'_g(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \int_a^b f'_g(t)dt.$$

On conclut que

$$\int_a^b f'_d(t)dt = f(b) - f(a) = \int_a^b f'_g(t)dt.$$

(d) Soient $x, y \in \operatorname{int} I$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset I$ et $[y-\varepsilon, y+\varepsilon] \subset I$. Soit $t \in [0,1]$ et $u := tx + (1-t)y$. Il vient sans difficultés $[u-\varepsilon, u+\varepsilon] \subset I$ et ceci montre que $u \in \operatorname{int} I$.

Si $x < y$, nous avons $[x,y] \subset \operatorname{int} I$ et nous pouvons appliquer ce qui précède pour obtenir

$$\int_x^y f'_d(t)dt = f(y) - f(x) = \int_x^y f'_g(t)dt.$$

Si $y < x$, nous avons $[y,x] \subset \operatorname{int} I$ et une nouvelle application du résultat précédent donne

$$\int_y^x f'_d(t)dt = f(x) - f(y) = \int_y^x f'_g(t)dt.$$

Cette dernière égalité s'écrit encore

$$\int_x^y f'_d(t)dt = f(y) - f(x) = \int_x^y f'_g(t)dt.$$

Dans les deux cas, on a bien l'égalité désirée, à savoir

$$\int_x^y f'_d(t)dt = f(y) - f(x) = \int_x^y f'_g(t)dt.$$

6. Les inégalités attendues sont des conséquences directes de ce qui a été obtenu à la question précédente. Ce résultat exprime que le graphe d'une fonction convexe "se situe" au-dessus de ses demi-tangentes. Si $f$ est supposée dérivable sur $\operatorname{int} I$, le résultat devient
$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad \text{pour tout } x, y \in \operatorname{int} I.$$

# 5 Continuité des fonctions convexes

1. D'après la section précédente, nous pouvons écrire pour tout $x, y \in \operatorname{int} I$ avec $x < y$
$$f'_d(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'_g(y)(y-x).$$
Puisque $f'_g$ et $f'_d$ sont croissantes sur $[a,b] \subset \operatorname{int} I$, il vient
$$f'_d(a)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'_g(b)(y-x),$$
pour tout $x, y \in \operatorname{int} I$ avec $x < y$.
2. Il suffit de poser $K = \max(|f'_d(a)|, |f'_g(b)|)$ pour conclure que
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \quad \text{pour tout } x, y \in [a,b].$$
3. Une utilisation directe de la caractérisation séquentielle de la continuité montre que toute fonction lipschitzienne sur $[a,b]$ est continue sur $[a,b]$. La réciproque est fausse : la racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

# 6 Dérivabilité des fonctions convexes

1. Puisque $f$ est dérivable sur $I$, $f$ est dérivable à gauche et à droite sur $I$ et
$$f = f'_g = f'_d.$$
La Section 4 nous dit alors que $f$ est croissante sur $\operatorname{int} I = I$.
2. Puisque $f'$ est croissante sur $I$, la fonction $f''$ est positive sur $I$.
3. (a) Une application directe du théorème des accroissements finis sur $[x,z]$ et sur $[z,y]$ donne l'existence de $\xi_1 \in ]x,z[$ et $\xi_2 \in ]z,y[$ tels que
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2).$$
   (b) Le caractère croissant de $f'$ donne alors
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1) \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2).$$
   (c) Les relations voulues découlent de $z = tx + (1-t)y$.

(d) De la question précédente et de l'inégalité

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

on tire

$$t\big(f(z)-f(x)\big) \leq (1-t)\big(f(y)-f(z)\big).$$

Cette dernière inégalité est bien sûr équivalente à

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

4. La dérivée de $-\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc $-\sqrt{\cdot}$ est convexe sur $]0,+\infty[$. Il n'est alors pas difficile de déduire que $f$ est convexe sur $[0,+\infty[$. Pour autant, l'égalité

$$\lim_{x\to 0, x>0} 1/\sqrt{x} = +\infty$$

montre que $f$ n'est pas Lipschitz sur $]0,+\infty[$ ni dérivable à droite en 0. Ce n'est bien sûr pas en contradiction avec l'étude précédente : 0 n'est pas un point intérieur à $[0,+\infty[$ !