MEEF Mathématiques - UPVD & UM
M1 - Semestre 7
Année universitaire 2020-2021

Problème n°4 - Durée 5h

****

Consignes spécifiques au distanciel :

— Numériser (éviter les photos) votre production sous une résolution **acceptable**. Fichiers souhaités : pdf (de préférence) et images. **Merci de ne pas multiplier les fichiers inutilement.**

— **Etudiant(e) UPVD** : Envoyer le tout sans message texte à florent.nacry@gmail.com avec l'objet :

PB4-MEEF-PRENOM NOM

Etudiant(e) UM : Déposer votre fichier sur l'espace prévu Moodle.

— Début/Fin de l'épreuve : lundi 2 Novembre 13h00-18h00 (19h40 si tiers-temps).

****

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendant.

Notations et rappels.

(i) Dans tout le sujet, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(ii) On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des **polynômes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indeterminée X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ les éléments de $\mathbb{K}[X]$ de **degré inférieur** ou égal à n.

(iii) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E, \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Si $F = E$, une application linéaire de E dans $F = E$ est appelée **endomorphisme** de E. Si $F = \mathbb{K}$, une application linéaire de E dans $F = \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur E. Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

(iv) Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{fois}},$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'application identité de E. Etant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$) on peut associer à l'endomorphisme ci-dessus f un nouvel endomorphisme noté $P(f) : E \to E$ défini par

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(v) Pour une matrice carrée A de taille $n \geq 1$, on note $\det(A) \in \mathbb{K}$ son **déterminant** et $\mathcal{X}_A = \det(A - X\mathrm{I}_n) \in \mathbb{K}_n[X]$ son **polynôme caractéristique**, avec I_n la matrice identité de taille n. De manière analogue, si f est un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, on note $\det(f) \in \mathbb{K}$ son déterminant et $\mathcal{X}_f \in \mathbb{K}_n[X]$ son polynôme caractéristique.

Exercice.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 1 (Cayley-Hamilton) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors, l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul.

On veut montrer que l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul, c'est-à-dire que

$$\mathcal{X}_f(f)(x) = 0_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

1. Justifier que $\mathcal{X}_f(f)(0_E) = 0_E$. **On fixe dans toute la suite de l'exercice** $x \in E \setminus \{0_E\}$.
2. On note $l(E)$ l'ensemble des *familles libres* de E. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \Big\{ d \in \mathbb{N}^\star : \big(x, f(x), \ldots, f^{d-1}(x)\big) \in l(E) \Big\}$$

   est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.
3. En utilisant le fait que *toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément*, déduire de la question précédente qu'il existe un entier $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :
   (i) la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\big) \in l(E)$;
   (ii) la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), f^m(x)\big) \notin l(E)$.
4. Justifier qu'il existe $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x).$$

   En déduire que $P(f)(x) = 0_E$ avec $P = (\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k) - X^m$.
5. On associe au polynôme P ci-dessus la matrice (dite *compagnon*)

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K}).$$

   L'objectif de cette question est de déterminer le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_{C_P}$ de C_P, c'est-à-dire $\det(C_P - X\mathrm{I}_m)$.
   (a) En effectuant un développement selon la dernière colonne de $C_P - X\mathrm{I}_m$, montrer que

$$\mathcal{X}_{C_P}(X) = (-X + a_{m-1})(-X)^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{m+1+k} a_k \Delta_k$$

   où pour chaque entier $k \in \{1, \ldots, m-2\}$,

$$\Delta_0 = \det D_0 \quad \text{et} \quad \Delta_k = \det \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ C_k & D_k \end{pmatrix},$$

   avec A_k, C_k, D_k des matrices (blocs), où A_k et D_0, D_k sont triangulaires.
   (b) Montrer qu'il existe une constante k_m dépendant uniquement de m telle que $\mathcal{X}_{C_P}(X) = k_m P(X)$.
6. On **suppose** dans cette question que $m = n$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \big(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\big)$ est une base de E.
(b) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ de E est donnée par C_P.
(c) En déduire que $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{C_P}$.
(d) Conclure.

7. On **suppose** maintenant que $m < n$.
   (a) Justifier qu'il existe $n - m$ vecteurs $e_{m+1}, \ldots, e_n \in E$ tel que la famille
   $$\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), e_{m+1}, \ldots, e_n)$$
   soit une base de E.
   (b) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans cette base $\mathcal{B}$ est une matrice par blocs de la forme
   $$\begin{pmatrix} C_P & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
   où $A \in M_{m,n-m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-m}(\mathbb{K})$.
   (c) Montrer que $\mathcal{X}_{C_P}$ divise $\mathcal{X}_f$.
   (d) Conclure.

Problème.

Aux notations et rappels présentés au début du sujet s'ajoutent :

(vi) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des formes linéaires sur E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$, voir en-tête du sujet) est noté $E^\star$ et est appelé **dual algébrique** de E. Etant donnée $\varphi \in E^\star$ et $x \in E$, il est d'usage de noter
$$\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E}.$$
On appelle $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^\star, E}$ le **crochet de dualité** entre E et $E^\star$.

(vii) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. *On rappelle* que pour chaque $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k.$$
L'élément $(x_1, \ldots, x_n)$ est appelé **vecteur des coordonnées** de x dans la base β et est noté $[x]_\beta$. Etant donné $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $[x]_{k,\beta}$ la k-ième coordonnée de x dans la base β, c'est-à-dire $[x]_{k,\beta} = x_k$. On note $b_k^\star : E \to \mathbb{K}$ l'application qui à un vecteur $x \in E$ associe sa k-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$, autrement dit
$$b_k^\star(x) = [x]_{k,\beta} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

L'objectif du problème est l'étude du dual algébrique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Base duale

1. Montrer que l'ensemble $E^\star$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(E; \mathbb{K})$ des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ (muni de sa structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
2. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
   (a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $b_k^\star \in E^\star$. Autrement dit montrer que l'application $b_k^\star : E \to \mathbb{K}$ définie par
   $$b_k^\star(x) = [x]_{k,\beta} \quad \text{pour tout } x \in E$$
   est linéaire.

(b) Montrer que la famille $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est l'unique famille de $E^\star$ satisfaisant pour tout les entiers $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ les relations

$$\langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star, E} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Montrer que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une famille libre de $E^\star$.

(d) Montrer que pour tout $\varphi \in E^\star$,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star, E} \, b_k^\star.$$

(e) En déduire que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une base de $E^\star$. On l'appelle la **base duale** de $E^\star$ associée à la base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et on la note $\mathcal{B}^\star$. Exprimer la dimension de $E^\star$ en fonction de celle de E.

(f) Soit $\varphi \in E^\star$ et $x \in E$. Montrer que

$$\langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} = [\varphi]_{\beta^\star} \times ([x]_\beta)^T,$$

où $\times$ désigne le produit matriciel et ^{T} la transposition.

2 Exemples

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Justifier que $C([a,b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Montrer que l'application $\mathcal{R} : C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{R}(f) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{pour tout } f \in C([a,b], \mathbb{R})$$

est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

2. Montrer que la fonction *partie réelle* $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire lorsque $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Que dire si $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

3. Dans cette question, $n \geq 1$ est un entier et $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est sa base duale. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Justifier qu'il existe une unique famille $(p_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de réels tels que

$$\begin{cases} b_1^\star = p_{1,1} e_1^\star + \ldots + p_{1,n} e_n^\star, \\ \vdots \\ b_n^\star = p_{n,1} e_1^\star + \ldots + p_{n,n} e_n^\star. \end{cases}$$

   (b) Déduire de ces égalités et de la Question 2.(b) de la Partie 1, l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [b_1]_{1,\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{1,\mathcal{C}} \\ \vdots & & \vdots \\ [b_1]_{n,\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{n,\mathcal{C}} \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n$$

   (c) Comme s'appelle la matrice de droite intervenant dans le premier membre de l'égalité ci-dessus ? Pourquoi est-elle inversible ? A quoi correspond son inverse ?

   (d) **Application.** Ici, $n = 3$, $b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $b_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $b_3 = 3e_1 + e_3$. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa base duale.

4. Dans cette question, on considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, ainsi qu'un entier $m \geq 1$ et $(m+1)$-réels de $[a, b]$ $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$.
   (a) On introduit l'application $\Phi : \mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}^{m+1}$ définie par
   $$\Phi(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_m)) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_m[X].$$
      (i) Justifier brièvement que Φ est linéaire.
      (ii) Que dire de $P \in \mathbb{R}_m[X]$ ayant au moins $(m+1)$ racines distinctes ? En déduire que Φ est injective.
      (iii) Montrer que Φ est surjective et donc bijective.
      (iv) Conclure qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que
      $$P(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, m\}.$$
   (b) L'unique polynôme obtenu à la question précédente s'appelle le *polynôme interpolateur de Lagrange* associé à la fonction f et à la famille $(x_k)_{0 \leq k \leq m}$. On s'intéresse désormais à la recherche d'une formule explicite pour ce polynôme. On introduit pour chaque $k \in \{0, \ldots, m\}$ le polynôme
   $$L_k(X) = \prod_{l \neq k} \frac{X - x_l}{x_k - x_l}.$$
      (i) Vérifier que $L_0, \ldots, L_m$ sont des éléments de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $L_k(x_l)$ pour des entiers $k, l \in \{0, \ldots, m\}$.
      (ii) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
      (iii) Etablir que
      $$P(X) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) L_k(X)$$
      (iv) Soit $\mathcal{L}^\star = (L_0^\star, \ldots, L_m^\star)$ la base duale de $\mathcal{L}$. Pour $Q \in \mathbb{R}_m[X]$ et $k \in \{0, \ldots, m\}$ déterminer $L_k^\star(Q)$.

3 Vers la représentation de Riesz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, i.e., E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer que pour chaque $v \in E$ la fonction $f_v : E \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f_v(x) = \langle v, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in E$$
   est une forme linéaire de E. On note $f_v(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$. En déduire que l'application $\Phi : E \to E^\star$ définie par
   $$\Phi(v) = \langle v, \cdot \rangle \quad \text{pour tout } v \in E$$
   est bien définie.
2. Montrer que Φ est linéaire et bijective.
3. Conclure que
   $$E^\star = \{\langle v, \cdot \rangle : v \in E\}.$$
4. **Application.** Pour $n \geq 1$ entier, donner une description explicite des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ et de $M_n(\mathbb{R})$.

4 Bidual algébrique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le dual algébrique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E^\star$ est appelé **bidual algébrique** de E et est noté $E^{\star\star}$.

1. Pour $x \in E$, montrer que l'application $J_x : E^\star \to \mathbb{K}$ définie par

$$J_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} \quad \text{pour tout } \varphi \in E^\star$$

   est linéaire. Ceci permet de définir l'application

$$\begin{aligned} J : E &\to E^{\star\star} \\ x &\mapsto J_x : E^\star \to \mathbb{K} \\ &\qquad \varphi \mapsto J_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E}\,. \end{aligned}$$

2. Montrer que J est une application linéaire.
3. En étudiant le noyau de J, montrer que J est injective.
4. Conclure que J est un isomorphisme. On dit alors que E **s'identifie canoniquement à** $E^{\star\star}$ **à travers** J.

5 Base antéduale

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 1$. On note J l'isomorphisme canonique de E avec son bidual algébrique $E^{\star\star}$ et J_x l'image de x par J pour $x \in E$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$. Soit $(\varphi_1^\star, \ldots, \varphi_n^\star)$ sa base duale associée (qui est donc une base de $E^{\star\star}$).

1. Justifier qu'il existe $b_1, \ldots, b_n \in E$ tels que

$$J_{b_k} = \varphi_k^\star \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E.
3. En utilisant la Question 2(b) de la Partie 1, montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$. On dit alors que $(b_1, \ldots, b_n)$ est **une** base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.
4. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ admet une **unique** base antéduale.

6 Hyperplans

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan vectoriel** de E le noyau de toute forme $\mathbb{K}$-linéaire de E **non nulle**. Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan vectoriel de E s'il existe $\varphi \in E^\star$ **non nulle** telle que

$$H = \{x \in E : \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} = 0\}.$$

1. Justifier brièvement que tout hyperplan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Quels sont les hyperplans de $E = \{0_E\}$?

Les hyperplans sont caractérisés comme les sous-espaces de E qui admettent des droites comme supplémentaires. Plus précisément :

Lemme 1 Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :
(i) H est un hyperplan de E ;
(ii) Il existe $v \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$.

1. On veut montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$. On suppose donc que $H = \ker(\varphi)$ pour une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non nulle. Soit $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$.
   (a) Montrer que $H \cap \mathbb{K}v = \{0_E\}$.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer que $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v \in H$.
   (c) Conclure que $E = H \oplus \mathbb{K}v$.
2. Montrer la réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$.
3. On suppose que E est de dimension finie non nulle égale à n. Exprimer la dimension des hyperplans vectoriels de E en fonction de n.
4. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\}$. Justifier brièvement que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}v$.
5. En utilisant le Lemme 1, établir le résultat suivant :

   Proposition 1 *Soient $f, g : E \to \mathbb{K}$ deux formes linéaires non nulles sur E. Alors, f et g sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau, c'est-à-dire*

$$\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, f = \lambda g.$$

Corrigé

Exercice.

1. Puisque $\mathcal{X}_f(f)$ est un endomorphisme de E, on a $\mathcal{X}_f(f)(0_E) = 0_E$.
2. L'inclusion $x \in E \setminus \{0_E\}$ garantit que la famille $(x) = (f^0(x))$ est libre dans E, i.e., $1 \in \Lambda$. D'autre part, nous savons que le cardinal d'une famille libre de E est majoré par la dimension de E sur $\mathbb{K}$, à savoir n. On conclut que Λ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^\star \subset \mathbb{N}$.
3. Puisque Λ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet un plus grand élément noté m. Cet entier m étant un élément de Λ, nous avons bien sûr
$$(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)) \in l(E).$$
D'autre part, si la famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), f^m(x))$ est libre dans E, alors $m+1 \in \Lambda$ et ceci contredit le fait que m est le plus grand élément de Λ. On a donc bien
$$(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), f^m(x)) \notin l(E).$$
4. Le caractère lié de la famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), f^m(x))$ obtenu ci-dessus nous donne l'existence de $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{m+1}}\}$ tel que
$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x) = 0_E,$$
ou de manière équivalente,
$$\lambda_m f^m(x) = -\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k f^k(x).$$
La liberté de la famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ entraîne évidemment $\lambda_m \neq 0$ et il suffit alors de poser pour chaque $k \in \{1, \dots, m-1\}$ $a_k = -\lambda_m^{-1}\lambda_k$ pour aboutir à
$$f^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x).$$
En notant $P = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k - X^m$, nous observons que $P(f) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k - f^m$ puis
$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x) - f^m(x) = 0_E.$$
5. (a) Suivons l'énoncé en développant selon la dernière colonne de la matrice
$$C_P - X\mathrm{I}_m = \begin{pmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & a_{m-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} - X \end{pmatrix}.$$

Il vient sans difficultés

$$\det(C_P - X\mathrm{I}_m) = (-1)^{m+1}a_0\det\begin{pmatrix} 1 & -X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{m+2}a_1\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & -X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$\dots$$

$$+ (-1)^{2m-1}a_{m-1}\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2m}(a_{m-1} - X)\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -X \end{pmatrix}.$$

Ceci justifie l'égalité attendue pour $\mathcal{X}_{C_P}(X)$.

(b) En exploitant l'égalité ci-dessus et le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire vaut le produit de ses termes diagonaux, on obtient avec $k_m = (-1)^{m+1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{C_P}(X) &= (a_{m-1} - X)(-X)^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m+1-k}a_k(-X)^k \\ &= (-X)^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+1-k}a_k(-X)^k \\ &= (-1)^{m+1}\Big(- X^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{-k}a_k(-X)^k\Big) = k_m P(X).\end{aligned}$$

6. (a) La famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est une famille libre de E de cardinal $m = n = \dim E$: c'est donc une base de E.

(b) Pour obtenir la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$, il suffit d'utiliser la première

égalité donnée par la Question 4 :

$$\begin{array}{c} \\ x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^{m-1}(x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(x) & f^2(x) & \dots & f^{m-1}(x) & f^m(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c) Etant donné un endomorphisme $g : E \to E$, on **rappelle** que pour toute paire $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de bases de E, on a l'égalité

$$\det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g),$$

où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$) désigne la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}$ (resp. à la base $\mathcal{B}'$). Cette valeur commune à toutes les bases de E est appelé *déterminant de g*, noté $\det(g)$. On a donc

$$\mathcal{X}_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}_E) = \det(C_P - X\mathrm{I}_m) = \mathcal{X}_{C_P}(X),$$

où Id_E désigne l'identité de E.

(d) De l'égalité entre polynômes $\mathcal{X}_{C_P}(X) = (-1)^{m+1}P(X)$ obtenue plus haut, nous déduisons l'égalité entre endomorphismes de E

$$\mathcal{X}_{C_P}(f) = (-1)^{m+1}P(f).$$

Cette égalité entre endomorphismes donne en particulier l'égalité entre vecteurs de E

$$\mathcal{X}_{C_P}(f)(x) = (-1)^{m+1}P(f)(x).$$

Il reste à évoquer l'égalité $P(f)(x) = 0_E$ pour conclure que $\mathcal{X}_f(f)(x) = \mathcal{X}_{C_P}(f)(x) = 0_E$, i.e., l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul sous réserve que $m = n$.

7. (a) La famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est une famille libre de E qui n'est toutefois pas une base de E puisque son cardinal est égal à $m < n = \dim E$. Le théorème de la base incomplète nous dit alors que nous pouvons compléter cette famille en une base de E, i.e., nous pouvons trouver $n - m$ vecteurs de E, notés $e_{m+1}, \dots, e_n$, tels que

$$\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), e_{m+1}, \dots, e_n)$$

est une base de E.

(b) La Question 4 ci-dessus nous assure (dans le même esprit que la Question 6(b)) que la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{array}{c} \\ x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^{m-1}(x) \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} f(x) & f^2(x) & \dots & f^{m-1}(x) & f^m(x) & e_{m+1} & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & * & * & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \end{array},$$

où (comme il est d'usage) la notation $*$ désigne un scalaire quelconque. Ceci revient bien sûr à dire que cette même matrice s'écrit comme demandé, à savoir :

$$\begin{pmatrix} C_P & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in M_{m,n-m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-m}(\mathbb{K})$.

(c) De ce qui précède, on déduit

$$\mathcal{X}_f(X) = \det \begin{pmatrix} C_P - X\mathrm{I}_m & A \\ 0 & B - X\mathrm{I}_{n-m} \end{pmatrix} = \det(C_P - X\mathrm{I}_m)\det(B - X\mathrm{I}_{n-m}) = \mathcal{X}_{C_P}(X)\mathcal{X}_B(X)$$

en particulier, $\mathcal{X}_{C_P}(X) \mid \mathcal{X}_f(X)$.

(d) Il résulte de (c) ci-dessus

$$\mathcal{X}_f(f) = (\mathcal{X}_B\mathcal{X}_{C_P})(f) = (\mathcal{X}_B(f) \circ \mathcal{X}_{C_P}(f)),$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{X}_f(f)(x) = \mathcal{X}_B(f)(\mathcal{X}_{C_P}(f)(x)) = \mathcal{X}_B(f)(k_m P(f)(x)) = \mathcal{X}_B(f)(0_E) = 0_E.$$

On conclut que $\mathcal{X}_f(f)$ est l'endomorphisme nul de E lorsque $m < n$: le théorème de Cayley-Hamilton est donc démontré.

1 Base duale

1. La fonction nulle $\mathbf{0}_{\mathcal{F}(E;\mathbb{K})}$ est evidemment un élément de $E^\star$. Soient $x^\star, y^\star \in E^\star$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ fixés. Nous allons montrer que $z^\star := \lambda x^\star + \mu y^\star$ qui est évidemment un élément de $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$ est linéaire, i.e., $\lambda x^\star + \mu y^\star \in E^\star$. Fixons donc $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et notons $w = \alpha u + \beta v$. La définition de la loi $+$ sur $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$ permet d'écrire

$$z^\star(\alpha u + \beta v) = (\lambda x^\star + \mu y^\star)(w) = \lambda x^\star(w) + \mu y^\star(w)$$

tandis que la linéarité de $x^\star$ et $y^\star$ donnent

$$\lambda x^\star(w) + \mu y^\star(w) = \alpha(\lambda x^\star(u) + \mu y^\star(u)) + \beta(\lambda x^\star(v) + \mu y^\star(v)).$$

Par définition de la loi $+$ sur $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$, nous avons

$$\alpha(\lambda x^\star(u) + \mu y^\star(u)) + \beta(\lambda x^\star(v) + \mu y^\star(v)) = \alpha z^\star(u) + \beta z^\star(v).$$

Il reste alors à combiner ces trois égalités pour aboutir à

$$z^\star(\alpha u + \beta v) = \alpha z^\star(u) + \beta z^\star(v).$$

On conclut que $E^\star$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$.

2. (a) Montrons que la fonction $b_k^\star$ est linéaire. Fixons $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Puisque $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, les égalités

$$\lambda x + \mu y = \sum_{l=1}^{n} [\lambda x + \mu y]_{l,\mathcal{B}} b_l = \sum_{l=1}^{n} (\lambda [x]_{l,\mathcal{B}} + \mu [y]_{l,\mathcal{B}}) b_l$$

entraînent immédiatement que

$$[\lambda x + \mu y]_{l,\mathcal{B}} = \lambda [x]_{l,\mathcal{B}} + \mu [y]_{l,\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Il reste alors à observer que

$$b_k^\star(\lambda x + \mu y) = b_k^\star(\sum_{l=1}^n [\lambda x + \mu y]_{l,\mathcal{B}} b_l) = [\lambda x + \mu y]_{k,\mathcal{B}}$$

et

$$\lambda b_k^\star(x) + \mu b_k^\star(y) = \lambda b_k^\star(\sum_{l=1}^n [x]_{l,\mathcal{B}} b_l) + \mu b_l^\star(\sum_{l=1}^n [y]_{l,\mathcal{B}} b_l) = \lambda [x]_{k,\mathcal{B}} + \mu [y]_{k,\mathcal{B}}$$

pour conclure que $b_k^\star$ est linéaire.

(b) Par définition de $b_1^\star, \ldots, b_n^\star$, on a pour tout $k, l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $E^\star$ telle que pour tout $k, l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle \varphi_k, b_l \rangle_{E^\star,E} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit d'observer que pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle b_k^\star, x \rangle_{E^\star,E} = [x]_{k,\beta}$$

et

$$\langle \varphi_k, x \rangle_{E^\star,E} = \left\langle \varphi_k, \sum_{l=1}^n [x]_{l,\mathcal{B}} b_l \right\rangle_{E^\star,E} = \sum_{l=1}^n [x]_{l,\mathcal{B}} \langle \varphi_k, b_l \rangle_{E^\star,E} = [x]_{k,\mathcal{B}}$$

pour aboutir à $b_k^\star = \varphi_k$, i.e., $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^\star = 0_{E^\star}$. Les égalités valides pour chaque $l \in \{1, \ldots, n\}$

$$0_{\mathbb{K}} = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^\star, b_l \right\rangle_{E^\star,E} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} = \lambda_l$$

montrent que la famille $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est libre.

(d) Soit $\varphi \in E^\star$. Les égalités suivantes valables pour chaque $x \in E$

$$\begin{aligned} \langle \varphi, x \rangle_{E^\star,E} &= \left\langle \varphi, \sum_{k=1}^n [x_k]_{k,\mathcal{B}} b_k \right\rangle_{E^\star,E} \\ &= \sum_{k=1}^n [x_k]_{k,\mathcal{B}} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \langle b_k^\star, x \rangle_{E^\star,E} \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} b_k^\star, x \right\rangle_{E^\star,E} \end{aligned}$$

nous assurent que

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} b_k^\star.$$

(e) Les questions (c) et (d) ci-dessus montrent que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une famille libre et génératrice de $E^\star$, i.e., est une base de $E^\star$. Ceci nous dit en particulier que $E^\star$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$.

(f) L'égalité désirée s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x \rangle_{E^\star,E} &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \, b_k^\star, x \right\rangle_{E^\star,E} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \, \langle b_k^\star, x \rangle_{E^\star,E} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \, [x]_{k,\mathcal{B}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\varphi]_{k,\mathcal{B}^\star} [x]_{k,\mathcal{B}} \\
&= [\varphi]_{\mathcal{B}^\star} \times ([x]_{\mathcal{B}})^T.
\end{aligned}$$

2 Exemples

1. La fonction nulle $\mathbf{0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ est évidemment un élément de $C([a,b],\mathbb{R})$. D'autre part, étant données deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et deux réels λ, μ, nous savons que la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est encore continue sur $[a,b]$. Tout ceci justifie que $C([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$.

   Le fait que $\mathcal{R} : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ soit une forme linéaire découle de la linéarité de l'intégration au sens de Riemann, i.e., de l'égalité

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(t)dt = \alpha \int_a^b \varphi(t)dt + \beta \int_a^b \psi(t)dt$$

   pour toutes fonctions $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrables sur $[a,b]$ et pour tout réel α, β.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De l'égalité évidente

$$\lambda(a+ib) + \mu(a'+ib') = (\lambda a + \mu a') + i(\lambda b + \mu b')$$

   valide pour tout $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on tire

$$\Re(\lambda z + \mu z') = \lambda \Re(z) + \mu \Re(z') \quad \text{pour tout } z, z' \in \mathbb{C}.$$

   Cette dernière égalité montre que $\Re(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. D'autre part, en remarquant que

$$\Re(i^2) = -1 \neq 0 = i\Re(i),$$

   nous voyons que la partie réelle n'induit pas une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

3. (a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. L'inclusion $b_k^\star \in (\mathbb{R}^n)^\star$ et le fait que $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ soit une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^n)^\star$ nous assurent en particulier de l'existence et l'unicité d'une famille $(p_{k,l})_{1 \leq l \leq n}$ de réels telle que

$$b_k^\star = p_{k,1} e_1^\star + \ldots + p_{k,n} e_n^\star.$$

   (b) Soient $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. En évaluant la k-ième égalité de la question précédente en b_l, il vient

$$\langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} = p_{k,1} \langle e_1^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} + \ldots + p_{k,n} \langle e_n^\star, b_l \rangle_{E^\star,E}.$$

En vertu de la Question 2(b), ce qui précède s'écrit encore

$$p_{k,1}[b_l]_{1,\mathcal{C}} + \ldots + p_{k,n}[b_l]_{n,\mathcal{C}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation matricielle attendue en découle.

(c) La matrice

$$\begin{pmatrix} [b_1]_{1,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{1,\mathcal{C}} \\ \vdots & & \vdots \\ [b_1]_{n,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{n,\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

est une matrice de passage (et donc inversible !) : plus précisément, c'est la matrice de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où l'ensemble/espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{B}$ et où l'ensemble/espace vectoriel d'arrivée $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{C}$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, sa k-ième colonne exprime les coordonnées de b_k dans la base canonique $\mathcal{C}$. Cette matrice est inversible d'inverse la matrice de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où l'ensemble/espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{C}$ et où l'ensemble/espace vectoriel d'arrivée $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{B}$: pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, la k-ième colonne de cette matrice exprimera alors les coordonnées de e_k dans la base $\mathcal{B}$.

(d) Un calcul élémentaire montre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ceci confirme que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Toujours de manière élémentaire, on montre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'appliquer la question précédente pour obtenir que la base duale $(b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star)$ de (b_1, b_2, b_3) est donnée par $b_1^\star = \frac{1}{2}(e_1^\star + 2e_2^\star - 3e_3^\star)$, $b_2^\star = \frac{1}{2}(-2e_1^\star - 2e_2^\star + 6e_3^\star)$ et $b_3^\star = \frac{1}{2}(e_1^\star - e_3^\star)$.

4. (a) (i) La linéarité de Φ découle directement de l'égalité

$$(\lambda P + \mu Q)(x_k) = \lambda P(x_k) + \mu Q(x_k)$$

valable pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m ayant $m+1$ racines est nécessairement nul. Puisque Φ est linéaire son injectivité est équivalente à l'égalité $\ker \Phi = \{0\}$ elle-même équivalente à l'inclusion $\ker \Phi \subset \{0\}$. Etant donné $P \in \ker \Phi$, nous voyons que P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus m et ayant au moins $m+1$ racines en vertu des égalités

$$P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_m) = 0.$$

On conclut que P est nul et que Φ est injective.

(iii) L'application Φ est injective entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie, elle est donc bijective.

(iv) La bijectivité de Φ nous dit qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$(f(x_1), \ldots, f(x_m)) = \Phi(P),$$

i.e., il existe un unique $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$P(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, m\}.$$

(b) (i) Les polynômes $L_0, \dots, L_m$ sont chacun des produits de m polynômes à coefficients réels de degré 1 : ils sont donc des polynômes à coefficients réels de degré au plus m. D'autre part, on a tout de suite

$$L_k(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) Puisque $\mathbb{R}_m[X]$ est de dimension $m+1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit d'établir que $(L_0, \dots, L_m)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_m[X]$ pour conclure qu'elle est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^m \lambda_k L_k(X) = 0$. Cette égalité entre polynômes et la Question 4(b)(i) donnent tout de suite

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k L_k(x_l) = \lambda_l = 0 \quad \text{pour tout } l \in \{0, \dots, m\}.$$

On conclut que la famille $(L_0, \dots, L_m)$ est libre.

(iii) Pour obtenir l'égalité souhaitée, il suffit de remarquer que le polynôme $Q := \sum_{k=0}^m f(x_k) L_k(X)$ est de degré inférieur ou égal à m et satisfait $Q(x_l) = f(x_l)$ pour tout $l \in \{0, \dots, m\}$.

(iv) Soit $Q \in \mathbb{R}_m[X]$ et $k \in \{0, \dots, m\}$. Puisque $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, on peut écrire $Q(X) = \sum_{j=0}^m \lambda_j L_j(X)$ pour un certain $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. En évaluant cette expression en x_k, il vient $\lambda_k = Q(x_k)$, i.e., $L_k^\star(Q) = Q(x_k)$.

3 Vers la représentation de Riesz

1. Pour $v \in E$, on note que le caractère linéaire de $f_v(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$ découle immédiatement de la bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E. L'inclusion $f_v(\cdot) \in E^\star$ permet alors de considérer l'application $\Phi : E \to E^\star$ définie par

$$\Phi(v) := f_v \quad \text{pour tout } v \in E.$$

2. Soient $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les égalités

$$\Phi(\lambda u + \mu v)(x) = \langle \lambda u + \mu v, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle + \mu \langle v, x \rangle = \lambda \Phi(u)(x) + \mu \Phi(v)(x) = (\lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v))(x)$$

valides pour chaque $x \in E$ nous disent que

$$\Phi(\lambda u + \mu v) = \lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v).$$

La linéarité de Φ est établie.

Le caractère défini positif du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entraîne immédiatement que $\ker \Phi = \{0_E\}$ ce qui est équivalent à l'injectivité de Φ. Il reste à invoquer $\dim E = \dim E^\star$ pour aboutir à la bijectivité de Φ.

3. La Question 1 de cette partie garantit l'inclusion $\{f_v : v \in E\} \subset E^\star$ tandis que la surjectivité de $\Phi(\cdot)$ nous assure de l'inclusion renversée $E^\star \subset \{f_v : v \in E\}$. Nous concluons que

$$E^\star = \{f_v : v \in E\} = \{\langle v, \cdot \rangle : v \in E\}.$$

4. En appliquant ce qui précède au produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$, on déduit

$$(\mathbb{R}^n)^\star = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\}$$

On rappelle que l'on peut définir un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant pour chaque $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A^T B)$. En appliquant une nouvelle fois la question précédente, on obtient

$$(M_n(\mathbb{R}))^\star = \left\{ \Phi \in \mathcal{F}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) : \exists A \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(M) = \operatorname{tr}(A^T M) \right\}.$$

En procédant par double inclusion, il est clair que ce dernier ensemble s'écrit encore

$$(M_n(\mathbb{R}))^\star = \{ \Phi \in \mathcal{F}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) : \exists B \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(M) = \operatorname{tr}(BM) \}.$$

4 Bidual algébrique

1. Soit $x \in E$. L'inclusion $J_x \in E^\star$ provient de l'égalité

$$J_x(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)(x) = \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = \lambda J_x(\varphi_1) + \mu J_x(\varphi_2),$$

valide pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E^\star$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2. Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On observe sans difficultés que pour chaque $\varphi \in E^\star$,

$$J(\lambda x_1 + \mu x_2)(\varphi) = \lambda J(x_1)(\varphi) + \mu J(x_2)(\varphi) = (\lambda J(x_1) + \mu J(x_2))(\varphi)$$

ce qui s'écrit encore

$$J(\lambda x_1 + \mu x_2) = (\lambda J(x_1) + \mu J(x_2)).$$

Cette dernière égalité traduit la linéarité de J.

3. Il suffit d'établir que $\ker J \subset \{0_E\}$ pour conclure que J est injective. On peut supposer que E n'est pas réduit à zéro (sinon, il n'y a rien à établir). Puisque E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, nous pouvons choisir n vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ de E avec $n = \dim E$ tels que $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ soit une base de E. Soit $x \in \ker J$. De l'égalité $J(x) = 0_{E^{\star\star}}$, on déduit facilement que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$0_{\mathbb{K}} = J(x)(b_k^\star) = \langle b_k^\star, x\rangle_{E^\star, E} = [x]_{k,\mathcal{B}},$$

i.e., $x = 0_E$. On conclut que $\ker J = \{0_E\}$.

4. Puisque $E^{\star\star}$ est le dual algébrique de $E^\star$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, nous savons (d'après la Partie 1-Question 2. (e)) que

$$\dim E^{\star\star} = \dim E^\star.$$

Il résulte de ceci que l'application linéaire injective $J : E \to E^{\star\star}$ est en fait bijective, i.e., un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

5 Base antéduale

1. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'inclusion $\varphi_k^\star \in E^{\star\star}$ combiné au caractère bijectif de l'application $J : E \to E^{\star\star}$ nous dit qu'il existe un (et un seul) $b_k \in E$ tel que

$$J_{b_k} = \varphi_k^\star.$$

2. Puisque $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une famille de cardinal $n = \dim E$, il suffit d'établir que $\mathcal{B}$ est libre pour montrer qu'elle est une base de E. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0_E$. Il vient par linéarité de J et par construction de $b_1, \ldots, b_n$

$$J(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k J(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k^\star = 0_{E^{\star\star}}.$$

Il reste alors à invoquer le caractère libre de $(\varphi_1^\star, \ldots, \varphi_n^\star)$ pour aboutir à $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$.

3. La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ satisfait pour tout $k, l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle \varphi_l, b_k\rangle_{E^\star, E} = \langle J(b_k), \varphi_l\rangle_{E^{\star\star}, E^\star} = \langle \varphi_k^\star, \varphi_l\rangle_{E^{\star\star}, E^\star} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit alors de revenir à la Partie 1-Question 2.(b) pour conclure que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $(b_1, \ldots, b_n)$.

4. Soit $(c_1, \ldots, c_n)$ une base anté-duale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. On note $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Pour $l \in \{1, \ldots, n\}$, nous voyons à travers l'égalité $c_l = \sum_{k=1}^{n} [c_l]_{k,\mathcal{B}} b_k$ que

$$\langle \varphi_k, c_l \rangle_{E^\star, E} = [c_l]_{k,\mathcal{B}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et ceci traduit l'égalité $b_l = c_l$. En conséquence, la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ admet une unique base anté-duale, à savoir $\mathcal{B}$.

6 Hyperplans

1. C'est une conséquence directe du fait que le noyau de toute application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels F et G est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul, il n'y a qu'une unique forme linéaire de E : la forme linéaire nulle. On conclut que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul n'admet pas d'hyperplan vectoriel.

1. (a) Il suffit d'établir que $H \cap \mathbb{K}v \subset \{0_E\}$. Soit $x \in H \cap \mathbb{K}v$. On a d'une part $x = \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$ et d'autre part
$$0_{\mathbb{K}} = \varphi(x) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v).$$
En combinant ce qui précède à $\varphi(v) \neq 0$, on aboutit à $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, i.e., $x = 0_E$.
   (b) L'inclusion désirée est une conséquence immédiate de la linéarité de φ qui permet d'écrire
$$\varphi\big(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v\big) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} \varphi(v) = 0_{\mathbb{K}}.$$
   (c) L'inclusion obtenue à la question précédente entraîne
$$E \subset H + \mathbb{K}v.$$
Notons que l'inclusion précédente est en fait une égalité puisque l'inclusion renversée est évidente. Enfin, l'égalité $H \cap \mathbb{K}v = \{0_E\}$ permet de conclure que H et $\mathbb{K}v$ sont supplémentaires dans E, i.e.,
$$E = H \oplus \mathbb{K}v.$$

2. Supposons qu'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$. On note ψ le projecteur de E sur $\mathbb{K}v$ parallèlement à H, autrement dit ψ est l'application de E dans $\mathbb{K}v$ satisfaisant
$$\psi(h + \lambda v) = \lambda v \quad \text{pour tout } (h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}.$$
On vérifie immédiatement que ψ est linéaire, non nulle et de noyau H. On conclut alors que H est un hyperplan vectoriel de E.
3. De la Question 1(c), nous déduisons que la dimension (relativement à $\mathbb{K}$) de tout hyperplan de E vaut $n - 1$.
4. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(x, y, z) = x + y + z \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$
est évidemment une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$. Son noyau qui n'est nul autre que H est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Il reste à voir que n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ avec $v \notin H$ satisfait $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}v$.

5. Seule l'implication $\Rightarrow$ mérite d'être justifiée. Supposons donc que $H := \ker f = \ker g$. Puisque f n'est pas nulle, l'ensemble H est un hyperplan vectoriel de E. Le Lemme 1 nous dit alors qu'il existe $v \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$. Notons que $f(v) \neq 0$ et $g(v) \neq 0$ et posons $\lambda = \frac{f(v)}{g(v)}$. A présent, fixons $x \in E$ et écrivons $x = h + \mu v$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$. La linéarité de f et de g ainsi que la définition de H et de λ donnent sans difficultés

$$f(x) = f(h + \mu v) = f(h) + \mu f(v) = \mu f(v) = \mu \lambda g(v) = \lambda(g(h) + \mu g(v)) = \lambda g(x)$$

et ceci traduit l'égalité désirée $f = \lambda g$.