Algèbre linéaire - L1, Semestre 1
Année universitaire 2023-2024
F. Nacry

Déterminants

Exercice 1 (★)

1. Soient $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
   (b) $\det(A) = \det(A^T)$.
   (c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et en général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
   (d) S'il existe $P \in M_2(\mathbb{R})$ inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$, alors
   $$\det(A) = \det(B).$$
2. Soient $a, b, c, d, x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que
   $$\det\begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & b \\ \alpha c + \beta y & d \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} x & b \\ y & d \end{pmatrix}$$
   et
   $$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. Notons
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
   pour un certain $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $(a', b', c', d') \in \mathbb{K}^4$.
   (a) Le résultat voulu a été démontré dans un TD précédent. Un calcul élémentaire permet de vérifier l'égalité
   $$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)\mathrm{I}_2 = 0. \tag{1}$$
   $\Rightarrow$, Supposons que A soit inversible dans $M_2(\mathbb{K})$. Par l'absurde, supposons que $ad - bc = 0$. L'égalité ci-dessus entraîne alors que
   $$A^2 - (a+d)A = 0.$$
   Cette égalité associée à l'inversibilité de A entraînent que $A = (a+d)\mathrm{I}_2$ ce qui s'écrit encore
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}.$$
   On conclut que $A = 0$ ce qui est contradictoire. $\Leftarrow$, Supposons que $ad - bc \neq 0$. Cette hypothèse combinée à l'égalité (1) donne
   $$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{ad-bc}\left((a+d)A - A^2\right) = \frac{1}{ad-bc}A((a+d)\mathrm{I}_2 - A).$$
   La matrice A est donc inversible d'inverse
   $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) On a $\det(A^T) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb = \det(A)$.

(c) On a

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= aa'dd' - adb'c' - bca'd' + bcb'c' \\ &= (ad-bc)(a'd'-b'c') = \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

On a

$$0 = \det\big(\mathrm{I}_2 + (-\mathrm{I}_2)\big) \neq \det(\mathrm{I}_2) + \det(-\mathrm{I}_2).$$

(d) On suppose qu'il existe $P \in M_2(\mathbb{K})$ inversible dans $M_2(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors

$$\det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P)^{-1}\det(B)\det(P) = \det(B).$$

2. La première égalité découle de

$$\det\begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & b \\ \alpha c + \beta y & d \end{pmatrix} = (\alpha a + \beta x)d - b(\alpha c + \beta y) = \alpha(ad - bc) + \beta(xd - by).$$

La deuxième égalité voulue est évidente.

■

Exercice 2 (★★) Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi \\ e & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (★★) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner sous une forme factorisée les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

Solution. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Calculons le déterminant de A. On a

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, il vient

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = 1\times\det\begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)].$$

On conclut

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(ii) Calculons le déterminant de B. On a

$$\det\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a-b & 0 & b-a \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & 2b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient

$$\det\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & 2b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} = (a-b)\times\det\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{pmatrix} = (a-b)[a(a+b)-2b^2].$$

On conclut

$$\det\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (a-b)^2(a+2b).$$

(iii) Calculons le déterminant de C. On a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c+1 \\ 1 & b & a+b+c+1 \\ 1 & c & a+b+c+1 \end{pmatrix}.$$

En posant $d := a+b+c+1$, il vient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = d\det\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

■

Exercice 4 (★★) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(ae_1 - e_2 - e_4, -e_1 + ae_2 - e_3, -e_2 + ae_3 - e_4, -e_1 - e_3 + ae_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution. On note $f_1 := ae_1 - e_2 - e_4$, $f_2 := -e_1 + ae_2 - e_3$, $f_3 := -e_2 + ae_3 - e_4$ et $f_4 := -e_1 - e_3 + ae_4$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si elle est de rang 4, i.e., si et seulement si la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

est inversible dans $M_4(\mathbb{R})$. On a

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = (a-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

On développe ce dernier déterminant suivant la deuxième ligne pour obtenir

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = a[(a+1)^2-1].$$

En combinant tout ce qui précède, on aboutit à

$$\det(A) = (a-2)a[(a+1)^2-1] = a^2(a-2)(a+2).$$

En conclusion, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a^2(a-2)(a+2) \neq 0$, i.e.,

$$a \notin \{-2, 0, 2\}.$$

■

Exercice 5 (★★) Déterminer l'ensemble des réels m tels que

$$\begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit inversible dans $M_4(\mathbb{R})$.

Solution. Pour chaque réel m, on pose

$$M_m := \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fixons un réel m. En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\det\begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix}.$$

On fait apparaître un 0 supplémentaire dans la dernière colonne :

$$-\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1+m & 2m & 0 \end{pmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière colonne pour obtenir

$$-\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1+m & 2m & 0 \end{pmatrix} = (m-m^2)\det\begin{pmatrix} m & m \\ 1+m & 2m \end{pmatrix} = (m-m^2)[2m^2-m(1+m)].$$

On conclut que

$$\det(M_m) = -(m^2-m)^2,$$

en particulier M_m est inversible si et seulement si $m \notin \{0, 1\}$. ■

Exercice 6 (★★★) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et toute famille $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Solution. Nous allons présenter deux méthodes.
Méthode 1 : On revient à la définition. Soient $n \geq 2$, $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Soit $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$ avec $\sigma_0 \neq \mathrm{Id}$. Par l'absurde, supposons que $\sigma_0(k) \geq k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $\sigma_0 \neq \mathrm{Id}$, il existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_0(l) \neq l$. Par hypothèse, on a donc $\sigma_0(l) > l$ puis

$$\{\sigma_0(l), \dots, \sigma_0(n)\} \subset \{l+1, \dots, n\}.$$

Cette dernière inclusion est absurde car elle entraîne en particulier $n-l+1 \leq n-(l+1)+1 = n-l$. Il s'ensuit qu'il existe $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_0(k_0) < k_0$. Il reste à remarquer que le caractère triangulaire supérieur de A donne $a_{k_0\sigma_0(k_0)} = 0$ puis

$$a_{1\sigma_0(1)} \dots a_{n\sigma_0(n)} = 0.$$

On conclut que

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \dots a_{nn}.$$

Méthode 2 : On procède par récurrence. Pour chaque entier $n \geq 2$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "pour toute famille $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}."$$

La propriété $\mathcal{P}(2)$ est claire compte-tenu de l'expression du déterminant en taille 2. Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ ait lieu. Fixons une famille $(b_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq k+1}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On a

$$\det\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & & b_{1(k+1)} \\ 0 & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} = b_{11}\det\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & & b_{1(k+1)} \\ 0 & b_{33} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Notre hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(b_{i,j})_{2\leq i\leq j\leq k+1}$ nous permet alors d'écrire

$$\det\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & & b_{1(k+1)} \\ 0 & b_{33} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} = b_{22} \dots b_{(k+1)(k+1)}.$$

On conclut que

$$\det\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & & b_{1(k+1)} \\ 0 & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} = b_{11}\dots b_{(k+1)(k+1)}$$

et ceci termine la récurrence. ■

Exercice 7 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *déterminant de Vandermonde* $V(x_1, \dots, x_n)$ le nombre complexe

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice ci-dessus.

1. Appliquer l'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$ au déterminant $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. Poursuivre avec les opérations élémentaires $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_3$.
3. Effectuer un développement judicieux selon une ligne ou une colonne.
4. Montrer que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$.

Solution.

1. On obtient avec $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_1) \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}.$$

2. On poursuit avec $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}$

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_1) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_1) \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}.$$

De même avec $C_{n-2} \leftarrow C_{n-2} - x_1 C_{n-3}, \dots, C_{n-2} \leftarrow C_{n-2} - x_1 C_{n-3}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}(x_{n-1} - x_1) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_2 - x_1) & x_{n-1}^{n-2}(x_n - x_1) \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_2 - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}.$$

3. On développe ce dernier déterminant selon la 1ère ligne et on obtient

$$\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}(x_{n-1} - x_1) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_2 - x_1) & x_{n-1}^{n-2}(x_n - x_1) & \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_2 - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) & \end{pmatrix}.$$

Il vient alors

$$V(x_1,\dots,x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

4. L'égalité ci-dessus permet d'établir la formule souhaitée via une récurrence immédiate.

■

Exercice 8 (★★★) 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Exprimer le déterminant en fonction de n de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n & n & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère

$$M_{n,a,b} = \begin{pmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & a+b & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

et on pose $D_n(a,b) = \det M_{n,a,b}$.
(a) Montrer que pour chaque entier $n \geq 4$,

$$D_n(a,b) = (a+b)D_{n-1}(a,b) - abD_{n-2}(a,b).$$

(b) En déduire que pour chaque entier $n \geq 2$, $D_n(1,1) = n+1$.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère

$$D_n = \det\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$D_n = a^n - a^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Exercice 9 (★★★) Soient $n \geq 2$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\det(A+M) = \det(A) + \det(M) \quad \text{pour tout } M \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $A \notin GL_n(\mathbb{R})$.

2. Justifier l'existence d'un entier $r \in \{0, \dots, n-1\}$ et de $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PJ_rQ$$

avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r représente la matrice identité de $M_r(\mathbb{R})$.

3. Calculer $\det(M)$ avec $M = PQ - A$. Conclure.

Solution.

1. En exploitant la propriété vérifiée par A avec $M = A$, il vient

$$2^n \det(A) = \det(2A) = \det(A) + \det(A) = 2\det(A).$$

Il s'ensuit $\det(A) = 0$, i.e., $A \notin GL_n(\mathbb{R})$.

2. Puisque A n'est pas inversible, nous savons qu'elle satisfait pour deux matrices inversibles P et Q et pour $r = \mathrm{rg}(A) \in \{0, \dots, n-1\}$ l'égalité énoncée, à savoir

$$A = PJ_rQ.$$

3. On a

$$\det(PQ - A) = \det(P(\mathrm{I}_n - J_r)Q) = \det(PQ)\det(\mathrm{I}_n - J_r).$$

Si $r = 0$, alors J_r est la matrice nulle et dans ce cas, $\det(PQ - A) = \det(P)\det(Q)$. Si $r \neq 0$, alors $\mathrm{I}_n - J_r$ n'est pas inversible et ceci entraîne $\det(PQ - A) = 0$.
Par l'absurde, supposons que A ne soit pas nulle, i.e., $r > 0$. En tenant compte de ce qui précède et en utilisant la propriété vérifiée par A appliquée à $M = PQ - A$, on obtient

$$\det(PQ) = \det(A + M) = \det(A) + \det(M) = \det(A) + 0 = \det(A)$$

et ceci est contradictoire puisque PQ est inversible. On conclut que $A = 0$.

■

Exercice 10 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$, $A + t\mathrm{I}_n$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 (★★★) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^\star$. On considère les hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$\mathcal{P}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (a+b)^2 x + c^2 y + c^2 z = 0\right\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 x + (b+c)^2 y + a^2 z = 0\right\}$$

et

$$\mathcal{P}_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b^2 x + b^2 y + (c+a)^2 z = 0\right\}.$$

On note D le déterminant

$$D = \det \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces hyperplans vectoriels aient uniquement en commun $(0, 0, 0)$.
2. Montrer que

$$D = \det \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 \\ a^2 & (b+c)^2 - a^2 & 0 \\ b^2 & 0 & (c+a)^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire
$$D = (a+b+c)^2 \det \begin{pmatrix} (a+b)^2 & c-a-b & c-a-b \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{pmatrix}.$$

4. Par des opérations sur les lignes, établir que
$$D = 2(a+b+c)^2 \det \begin{pmatrix} ab & -b & -a \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{pmatrix}.$$

5. Via un développement selon une ligne ou une colonne, donner D sous une forme factorisée.
6. Revenir à la Question 1 et conclure.

Exercice 12 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner sous une forme factorisée les déterminants des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

Solution. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

— On a
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, il vient
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)].$$

On conclut
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

— On a
$$\det \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-b & 0 & b-a \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & 2b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient
$$\det \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & 2b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} = (a-b) \times \det \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{pmatrix} = (a-b)[a(a+b)-2b^2].$$

On conclut
$$\det \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (a-b)^2(a+2b).$$

— On a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c+1 \\ 1 & b & a+b+c+1 \\ 1 & c & a+b+c+1 \end{pmatrix}.$$

En posant $d := a+b+c+1$, il vient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = d\det\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

■

Exercice 13 On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(ae_1 - e_2 - e_4, -e_1 + ae_2 - e_3, -e_2 + ae_3 - e_4, -e_1 - e_3 + ae_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution. On note $f_1 := ae_1 - e_2 - e_4$, $f_2 := -e_1 + ae_2 - e_3$, $f_3 := -e_2 + ae_3 - e_4$ et $f_4 := -e_1 - e_3 + ae_4$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si elle est de rang 4, i.e., si et seulement si la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

est inversible dans $M_4(\mathbb{R})$. On a

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = (a-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

On développe ce dernier déterminant suivant la deuxième ligne pour obtenir

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = a[(a+1)^2 - 1].$$

En combinant tout ce qui précède, on aboutit à

$$\det(A) = (a-2)a[(a+1)^2 - 1] = a^2(a-2)(a+2).$$

En conclusion, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a^2(a-2)(a+2) \neq 0$, i.e.,

$$a \notin \{-2, 0, 2\}.$$

■

Exercice 14 Déterminer l'ensemble des réels m tels que

$$\begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit inversible dans $M_4(\mathbb{R})$.

Solution. Pour chaque réel m, on pose

$$M_m := \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fixons un réel m. En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\det \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix}.$$

On fait apparaître un 0 supplémentaire dans la dernière colonne :

$$-\det \begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1+m & 2m & 0 \end{pmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière colonne pour obtenir

$$-\det \begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ 1+m & 2m & 0 \end{pmatrix} = (m-m^2)\det \begin{pmatrix} m & m \\ 1+m & 2m \end{pmatrix} = (m-m^2)[2m^2 - m(1+m)].$$

On conclut que

$$\det(M_m) = -(m^2-m)^2,$$

en particulier M_m est inversible si et seulement si $m \notin \{0,1\}$. ■