Algèbre linéaire - L1, Semestre 1
Année universitaire 2023-2024
F. Nacry

Chapitre 2 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Exercice 1 (★) On considère les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y) \quad \text{et} \quad g(x,y) = (y, 2x+3y, x).$$

On note β_2 (resp. β_3) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$).

1. Déterminer les matrices associées à f et à g relativement à β_2 et à β_3 (c'est-à-dire les matrices $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(g)$).
2. Déterminer de deux manières différentes la matrice $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(f+g)$.
3. Déterminer de deux manières différentes la matrice de l'application linéaire $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(7f)$.

Exercice 2 (★) On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définies par

$$f(x,y) = (y, x+2y, -x) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$g(x,y,z) = (x+y, -y+z, x+y+z, z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

On note respectivement β_2, β_3 et β_4 les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\beta_4,\beta_3}(g)$.
2. Calculer $f(1,2)$ et $g(3,4,5)$ de deux manières différentes.
3. Déterminer de deux manières différentes la matrice $\mathrm{Mat}_{\beta_3,\beta_2}(g \circ f)$.

Exercice 3 (★★) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (y,x) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on vérifie que la famille $\gamma = (2e_1 + 3e_2, 4e_1 + 5e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\beta,\beta}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\beta,\gamma}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\gamma,\beta}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\gamma,\gamma}(f)$.

2 Structure vectorielle de $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Exercice 4 (★) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (si possible !) $X + Y$ et $2X$ avec $X, Y \in \{A, B, C, D, E, F\}$.

Exercice 5 (★★)

1. Soit E l'ensemble
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Donner une base et sa dimension. Déterminer l'ensemble $\{M \in E : M^2 = -I_2\}$.
2. Soit
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$
Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

3 Produit matriciel

Exercice 6 (★) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D = (0 \quad 1 \quad 2), E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (si possible !) XY avec $X, Y \in \{A, B, C, D, E, F\}$.

Exercice 7 (★★) Que dire d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ telle que $AM = MA$ pour tout $M \in M_2(\mathbb{K})$? Pouvez-vous étendre votre résultat à $M_n(\mathbb{K})$ pour tout $n \geq 2$?

Exercice 8 (★★) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Examiner la diagonale du produit.

Exercice 9 (★★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Pour $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer le produit matriciel $E_{i,j}E_{k,l}$.

Exercice 10 (★★★) Montrer que le produit matriciel est associatif.

Solution. Soient m, n, p trois entiers ≥ 1. Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On fixe $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, q\}$. Pour une matrice M, on note $(M)_{r,s}$ le coefficient en r-ème ligne et en s-ème colonne de M. On pose $D = (AB)C$ et $E = A(BC)$. Par définition du produit matriciel, on a
$$(D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{i,k}(C)_{k,j}.$$
Toujours par définition du produit matriciel, il vient
$$(D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{l=1}^{n} (A)_{i,l}(B)_{l,k} \Big) (C)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{l=1}^{n} (A)_{i,l}(B)_{l,k}(C)_{k,j} \Big).$$
Avant de poursuivre, il convient de rappeler que pour n'importe quelle famille $(u_{k,l})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a
$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} u_{k,l}.$$
Il reste alors à écrire
$$(D)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{p} (A)_{i,l}(B)_{l,k}(C)_{k,j} \Big) = \sum_{l=1}^{n} (A)_{i,l} \Big(\sum_{k=1}^{p} (B)_{l,k}(C)_{k,j} \Big)$$

pour aboutir à l'égalité désirée, à savoir

$$(D)_{i,j} = (E)_{i,j}.$$

Nous concluons que $D = E$, i.e., $(AB)C = A(BC)$. ■

4 Transposition, matrice (anti)symétriques, trace, puissances, nilpotence

Exercice 11 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Que dire de $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$\mathrm{tr}(AA^T) = 0?$$

Exercice 12 (★★) Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

Exercice 13 (★★) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont nilpotentes. Les matrices $A + B$ et AB sont-elles nilpotentes ?

Exercice 14 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Exercice 15 (★★) Soient $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ telles que pour tout $X \in M_2(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$. Ce résultat s'étend t-il à $M_n(\mathbb{K})$ pour tout $n \geq 2$?

Exercice 16 (★) Soient $n \geq 1$ un entier et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 (★★) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On pose $B = A - 2\mathrm{I}_3$. Calculer B^n pour tout entier $n \geq 1$. En déduire A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 18 (★★) Soient $n \geq 1$, $M \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^{n+1} = 0$. Montrer que $M^n = 0$.

Exercice 19 (★★)

1. Etablir que $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Etablir que $A_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Déterminer $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$.
4. Montrer de deux manières différentes que $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

5 Inversibilité et rang

Exercice 20 (★★) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^4. En déduire que A est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ et donner l'expression de A^{-1}.

Exercice 21 (★) Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ?

Exercice 22 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. *Indication :* Développer le produit $(A - \mathrm{I}_n)(B - I_n)$.

Exercice 23 (★★) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Lorsque $ad - bc \neq 0$ exprimer l'inverse A^{-1} de A. *Indication :* On pourra montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)\mathrm{I}_2 = 0$.

Exercice 24 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose $AB = BA$, A inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ et B nilpotente. Montrer que $A - B$ est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ et calculer $(A - B)^{-1}$. *Indication :* trouver $C \in M_n(\mathbb{K})$ et un entier $p \geq 1$ tels que que $A^p - B^p = (A - B)C$.

Exercice 25 (★★) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ et calculer son inverse. *Indication :* exploiter $X^5 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - 2$.

Exercice 26 (★) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Que vaut le rang de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Exercice 27 (★★) Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28 (★★) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

6 Calcul d'inverse et systèmes linéaires

Exercice 29 (★) Soient $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$. Si possible calculer l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30 (★★) Les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$ sont-ils inversibles dans $M_3(\mathbb{R})$? Si oui, calculer les inverses.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31 (★★) Inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 (★★) Résoudre le système linéaire d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1 \\ -8x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 12x_4 = -3 \end{cases}$$

Exercice 33 (★★) Pour $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$, on considère le système linéaire d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(S_b) \begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ 2x - y + z - t = b_2 \\ 3y + z + 3t = b_3 \\ 3x + 2z = b_4. \end{cases}$$

1. Expliciter l'ensemble U des $b \in \mathbb{R}^4$ pour lesquels (S_b) admette au moins une solution.
2. Pour $b \in U$, résoudre le système linéaire (S_b).
3. Existe t-il $b \in \mathbb{R}^4$ tel que (S_b) admette une unique solution ?

Solution.

1. Fixons pour un moment $b = (b_1, \ldots, b_4) \in \mathbb{R}^4$. La matrice augmentée du système linéaire (S_b) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & b_3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Une application de l'algorithme de Gauss sur les lignes montre que le système linéaire (S_b) est équivalent au système linéaire d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(S_b') : \begin{cases} x + y + z + t = a_1 \\ y + \frac{1}{3}z + t = a_2 \\ 0 = a_3 \\ 0 = a_4, \end{cases}$$

avec $a_1 := b_1$, $a_2 := \frac{2b_1 - b_2}{3}$, $a_3 := \frac{b_2 + b_3 - 2b_1}{3}$ et $a_4 := \frac{b_1 + b_2 - b_4}{3}$. L'ensemble U recherché est alors donné par

$$U = \left\{ (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} b_2 + b_3 - 2b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 - b_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

2. Fixons $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in U$. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ 2x - y + z - t = b_2 \\ 3y + z + 3t = b_3 \\ 3x + 2z = b_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = a_1 \\ y + \frac{1}{3}z + t = a_2. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système linéaire (S_b) s'écrit

$$S = \left\{ (-\frac{2}{3}z + a_1 - a_2, -\frac{1}{3}z - t + a_2, z, t) : z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Les deux questions précédentes montrent que pour tout $b \in \mathbb{R}^4$, le système linéaire (S_b) admet soit une infinité de solutions soit aucune solution.

■

Exercice 34 (★★) (Factorisation LU) Résoudre le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y - z = 5 \\ -y + 2z = 4. \end{cases}$$

On note A la matrice (non-augmentée) associée au système linéaire ci-dessus. Déduire de l'étude précédente des matrices B_1, B_2, B_3, B_4 inversibles et U triangulaire supérieure telles que

$$(B_4 B_3 B_2 B_1) A = U.$$

Exercice 35 (★★) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les ensembles

$$S = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = B\}$$

et

$$S_0 = \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \right\}.$$

Soit $X_1 \in S$ fixé. Montrer que $S = \{X_1 + X_0 : X_0 \in S_0\}$.

Exercice 36 (★) Transformer la matrice suivante en une matrice échelonnée via l'algorithme de Gauss sur les lignes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poursuivre en proposant une forme échelonnée réduite. Que pouvez-vous dire en appliquant des opérations sur les colonnes ?

Exercice 37 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer (si possible) l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38 (★★★) Considérons un entier $n \geq 2$ et introduisons l'ensemble

$$F = \left\{ aI_n + bJ_n : (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\},$$

où J_n désigne

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. En donner une base.
2. Etablir que pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^2$,

$$(aI_n + bJ_n)(cI_n + dJ_n) = [ac + bd(n-1)]I_n + [ad + bc + bd(n-2)]J_n. \tag{1}$$

   En déduire que F est stable par produits (i.e., que la multiplication de deux éléments de F est encore un élément de F).
3. Soit $M \in F$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $M = \alpha \mathrm{I}_n + \beta J_n$. L'objectif de cette question est d'établir que M est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ avec $M^{-1} \in F$ si et seulement si $(\alpha - \beta)\big(\alpha + \beta(n-1)\big) \neq 0$.
   (a) On va montrer l'implication $\Rightarrow$. On suppose donc que M est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ avec $M^{-1} \in F$.
      (i) Justifier qu'il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$ tels que

$$M^{-1} = \gamma \mathrm{I}_n + \delta J_n.$$

      (ii) En exploitant l'égalité (1), montrer que

$$\begin{cases} \alpha\gamma + \beta\delta(n-1) = 1 \\ \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta(n-2) = 0. \end{cases}$$

      (iii) En déduire que $\alpha - \beta \neq 0$ ainsi que les égalités

$$\delta = \gamma - (\alpha - \beta)^{-1} \tag{2}$$

      et

$$(\alpha + \beta(n-1))\gamma = 1 + \beta(\alpha - \beta)^{-1}(n-1). \tag{3}$$

      (iv) Montrer que $\alpha + \beta(n-1) \neq 0$. Conclure.
      (v) Exprimer γ et δ en fonction de α, β et n.
   (b) En vous appuyant sur la Question 3.(a)-(v), établir l'implication réciproque $\Leftarrow$.
   (c) Sous l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus, donner une expression de M^{-1}.

7 Changement de bases

Exercice 39 (★★) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (2x + y, 3x - 2y).$$

On note $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\beta' = \big((3,2),(2,2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $v = 3e_1 - 4e_2$. Déterminer les coordonnées de v dans la base β'. Déterminer les coordonnées de $f(v)$ dans la base β et dans la base β'.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\beta',\beta'}(f)$.

Exercice 40 (★★) Soient $\beta_1 = \big((1,1,0),(0,-1,0),(3,2,-1)\big)$ et $\beta_2 = \big((1,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1)\big)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On note β la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$M := \mathrm{Mat}_{\beta_1,\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que β_1 et β_2 sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\beta,\beta_1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ puis $\mathrm{Mat}_{\beta_1,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. En déduire $\mathrm{Mat}_{\beta_1,\beta_2}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Mat}_{\beta_2,\beta_1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
4. Donner $\mathrm{Mat}_{\beta_2,\beta_2}(f)$.
5. Déterminer la matrice M^k pour chaque entier $k \geq 1$.