Algèbre linéaire - L1, Semestre 1
Année universitaire 2023-2024
F. Nacry

Chapitre 1 : le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1 ($\bigstar$) Montrer que les ensembles

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 7y = 0\}$$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Solution. On décrit ici un cas plus général. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $n \geq 1$ entier. On veut montrer que

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On procède en deux étapes :

(i) **A t-on $0_{\mathbb{R}^n} \in H$?** On a

$$a_1 \times 0 + \ldots + a_n \times 0 = 0,$$

donc $0_{\mathbb{R}^n} \in H$.

(ii) **L'ensemble H est-il stable par combinaison linéaire ?** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ deux éléments de H. Montrons que $\lambda u + \mu v \in H$.
Ecrivons tout d'abord

$$\lambda u + \mu v = \lambda(u_1, \ldots, u_n) + \mu(v_1, \ldots, v_n) = (\underbrace{\lambda_1 u_1 + \mu v_1}_{=X_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_n u_n + \mu v_n}_{=X_n}).$$

Pour établir l'inclusion souhaitée $\lambda u + \mu v \in H$, il nous faut montrer $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = 0$. Remarquons que les inclusions $u \in H$ et $v \in H$ entraînent tout de suite

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0.$$

Il reste à voir que ces deux égalités donnent

$$\begin{aligned} a_1X_1 + \ldots + a_nX_n &= a_1(\lambda u_1 + \mu v_1) + \ldots + a_n(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) + \mu(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \end{aligned}$$

pour conclure que $\lambda u + \mu v \in H$.

On a montré que la partie H de $\mathbb{R}^n$ contient $0_{\mathbb{R}^n}$ et qu'elle est stable par combinaisons linéaires (à coefficients réels) : elle est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ∎

Exercice 2 (★) Montrer que

$$E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+t=0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution. Observons que $0_{\mathbb{R}^4} \in E$. Soient $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in E$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$\lambda(x_1,y_1,z_1,t_1)+\mu(x_2,y_2,z_2,t_2) \in E. \tag{1}$$

Notons que

$$\lambda(x_1,y_1,z_1,t_1)+\mu(x_2,y_2,z_2,t_2) = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2, \lambda t_1+\mu t_2)$$

et posons $X=\lambda x_1+\mu x_2$, $Y=\lambda y_1+\mu y_2$, $Z=\lambda z_1+\mu z_2$ et $T=\lambda t_1+\mu t_2$. Constatons que l'inclusion voulue (1) revient à établir que

$$2X+3Y+Z=0 \quad \text{et} \quad 4X-Y+T=0.$$

Puisque $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in E$, on a

$$\lambda(2x_1+3y_1+z_1)=0 \quad \text{et} \quad \mu(2x_2+3y_2+z_2)=0$$

ce qui donne

$$\lambda(2x_1+3y_1+z_1)+\mu(2x_2+3y_2+z_2)=0$$

et ceci s'écrit encore

$$2X+3Y+Z=0.$$

De même, on a

$$\lambda(4x_1-y_1+t_1)=0 \quad \text{et} \quad \mu(4x_2-y_2+t_2)=0$$

et on vérifie que cela entraîne

$$4X-Y+T=0.$$

On conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. ∎

Exercice 3 (★) Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}$?

Solution. Aucun des trois n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{N}$ était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, on devrait avoir $(1/3)\,1 = 1/3 \in \mathbb{N}$. De même pour $\mathbb{Z}$ et pour $\mathbb{D}$. ∎

Exercice 4 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$E_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\right\},\ E_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y=0\right\}, E_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=0\right\},$$

$$E_4 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\right\},\ E_5 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y=1\right\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Solution. Il faut faire les dessins des parties en questions pour voir tout de suite si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ou non ! On rappelle que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{(0,0)\}$, les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ et $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(a) La partie E_1 est l'union de deux droites distinctes : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, il suffit de voir que $(1,0)\in E_1$ et $(0,1)\in E_1$ tandis que

$$(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin E_1.$$

(b) La partie E_2 correspond au graphe de la fonction carrée (i.e., une parabole) : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, observons que $(1,1) \in E_1$ tandis que

$$2.(1,1) = (2,2) \notin E_2.$$

(c) La partie E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: en effet, on a $E_3 = \{(0,0)\}$.

(d) La partie E_4 est ce que l'on appelle un demi-espace de $\mathbb{R}^2$ (elle correspond à l'hypographe (la partie en dessous du graphe) d'une certaine fonction linéaire) : elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour le démontrer, remarquons simplement que $(1,0) \in E_1$ alors que

$$-1.(1,0) = (-1,0) \notin E_4.$$

(e) La partie E_5 ne contient pas $(0,0)$: elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(f) La partie E_6 n'est pas une partie de $\mathbb{R}^2$: elle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

■

Exercice 5 (★★) Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\right\}, E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y = z\right\}, E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\right\},$$

$$E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\right\}, E_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 1\right\} \quad \text{et} \quad E_6 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Solution. C'est analogue à l'exercice précédent. On rappelle que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{(0,0,0)\}$, les droites de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$, les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ et $\mathbb{R}^3$. On montre que E_1, E_2, E_4, E_5 ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On vérifie également que $E_3 = \{(0,0,0)\}$ (qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). Enfin (et contrairement à l'exercice précédent) E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (notons que $E_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$). ■

2 Combinaisons linéaires

Exercice 6 (★) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $u = (2,-1)$, $v = (-3,2)$ et $w = (1,3)$. Montrer que w est combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v.

Solution. Supposons que w soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v. Par définition, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda u + \mu v.$$

Il vient alors

$$(1,3) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu).$$

On en déduit $\lambda = 11$ et $\mu = 7$. Il reste à vérifier que

$$(1,3) = 11(2,-1) + 7(-3,2).$$

Donc, w est bien combinaison linéaire de u et v. ■

Exercice 7 (★★) Peut-on exprimer $\sqrt{2}$ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$? Même question avec des éléments de $\mathbb{R}$.

Solution. La réponse est "non" puisque d'une part $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et d'autre part que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{Q}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est un élément de $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, l'égalité évidente $\sqrt{2} = 1.\sqrt{2}$ et l'inclusion $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ montre que $\sqrt{2}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $\mathbb{R}$. ■

Exercice 8 (★★) On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Peut-on exprimer i comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{R}$) d'éléments de $\mathbb{R}$?

Solution. La réponse est "non". Si c'était le cas, on aurait $i \in \mathbb{R}$. ■

Exercice 9 (★★) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $w = (1, a, 3) \in \mathbb{R}^3$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de $u = (-1, -2, 2)$ et $v = (0, 4, -1)$.

Solution. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $w = (1, a, 3)$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et de v. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$, i.e.,

$$(1, a, 3) = \lambda(-1, -2, 2) + \mu(0, 4, -1).$$

Ceci entraîne que $\lambda = -1$, $a = 18$ et $\mu = -5$. Il reste à vérifier que $(1, -18, 3) = -u - 5v$. ■

3 Familles génératrices et sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 10 (★) Donner une famille génératrice des sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\right\}, E_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0\right\}$$

et

$$E_3 = \left\{(x, y, z, t, \omega) \in \mathbb{R}^5 : x + \omega = 0\right\}.$$

Solution. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in E_1 &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x + 2z, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 2, 1),\end{aligned}$$

et ceci entraîne l'égalité

$$E_1 = \text{vect}\left\{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\right\}.$$

Ainsi, la famille $\big((1, 1, 0), (0, 2, 1)\big)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel E_1.

De même, on a pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in E_2 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, x + 2z, z, t) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 2, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$E_2 = \text{vect}\left\{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\right\}.$$

Ceci nous dit que la famille $\big((1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\big)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel E_2.

On montre de même que

$$E_3 = \text{vect}\left\{(1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\right\}.$$

Autrement dit : la famille $\big((1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\big)$ est génératrice du sous-espace vectoriel E_3. ■

Exercice 11 (★★) Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}\right\}.$$

Solution. Méthode 1. Remarquons tout d'abord que

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\right\}.$$

Un raisonnement analogue à celui employé dans l'exercice ci-dessus montre alors que

$$E = \operatorname{vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\} \cap \operatorname{vect}\{(1,2,0),(0,-1,1)\}.$$

Fixons $(x,y,z) \in E$. D'après l'égalité ci-dessus, il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,1,0) + \mu_1(0,1,1) \quad \text{et} \quad (x,y,z) = \lambda_2(1,2,0) + \mu_2(0,-1,1).$$

On obtient alors $x = \lambda_1 = \lambda_2$, $y = \lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_2 - \mu_2$ et $z = \mu_1 = \mu_2$. Il découle de ceci

$$\lambda_2 + \mu_2 = \lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_2 - \mu_2,$$

d'où les égalités $x = 2\mu_1$, $y = 3\mu_1$ et $z = \mu_1$. Ceci montre que $(x,y,z) \in \operatorname{vect}\{(2,3,1)\}$. On a donc l'inclusion $E \subset \operatorname{vect}\{(2,3,1)\}$. L'inclusion renversée est immédiate puisque

$$(2,3,1) \in \operatorname{vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\} \cap \operatorname{vect}\{(1,2,0),(0,-1,1)\}.$$

En conclusion, on a

$$E = \operatorname{vect}\{(2,3,1)\},$$

autrement dit $\big((2,3,1)\big)$ est une famille génératrice de E.

Méthode 2. On remarque que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \in E \Rightarrow (x,y,z) = (\frac{2}{3}y, y, \frac{1}{3}y) = y(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}).$$

Ceci montre que $E \subset \operatorname{vect}\left\{(\frac{2}{3},1,\frac{1}{3})\right\} = \operatorname{vect}\{(2,3,1)\}$. Pour obtenir l'inclusion renversée, il suffit de remarquer que $(2,3,1) \in E$ et de dire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $(2,3,1)$, en particulier il contient le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant $(2,3,1)$, i.e., il contient $\operatorname{vect}\{(2,3,1)\}$. On conclut que

$$E = \operatorname{vect}\{(2,3,1)\},$$

et ceci revient à dire que $\big((2,3,1)\big)$ est une famille génératrice de E. ■

Exercice 12 (★★) Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donner les sous-espaces vectoriels suivants sous forme d'écriture paramétrique et cartésienne :

$$E_1 = \operatorname{vect}\{(1,2,3)\} \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{vect}\{(1,2,3),(4,5,6)\}.$$

Solution. Avant de répondre à la question, donnons deux écritures alternatives de E_1

$$E_1 = \{\lambda(1,2,3) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1,2,3).$$

Pour l'écriture paramétrique, on écrit pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x,y,z) = \lambda(1,2,3).$$

Pour obtenir une équation cartésienne, il suffit de reprendre l'équivalence ci-dessus et d'écrire pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3x = z. \end{cases}$$

Nous avons donc deux écritures pour E_1, à savoir

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 3)\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x = y \\ 3x = z \end{cases}\right\}.$$

Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$E_2 := \mathrm{vect}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}.$$

Signalons l'écriture alternative (qui découle de la définition de vect)

$$E_2 = \{\lambda(1, 2, 3) + \mu(4, 5, 6) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Comme dans le cas précédent, l'écriture paramétrique est une formalité :

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ y = 2\lambda + 5\mu \\ z = 3\lambda + 6\mu \end{cases}\right\}.$$

Pour l'écriture cartésienne, on observe que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ y = 2\lambda + 5\mu \\ z = 3\lambda + 6\mu \end{cases} & \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 4\mu \\ \mu = -(y - 2x)/3 \\ \mu = -(z - 3x)/6 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow -(y - 2x)/3 = -(z - 3x)/6 \\ & \Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}.$$

■

Exercice 13 (★) Que pensez-vous du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donné par $E = \mathrm{vect}\{(1, 2), (3, 4)\}$?

Solution. On a $E = \mathbb{R}^2$. En effet, on a évidemment $E \subset \mathbb{R}^2$ et l'inclusion renversée s'obtient en constatant que

$$(x, y) = (\frac{-4x + 3y}{2})(1, 2) + \frac{2x - y}{2}(3, 4) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Exercice 14 (★★) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = (-2, a, b, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $u = (-1, -1, 1, 2)$ et $v = (-1, 2, 3, 1)$.

Solution. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$w \in \mathrm{vect}\{u, v\}$$

avec $w = (-2, a, b, 3)$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$. Il vient alors $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $a = 1$ et $b = 4$. Il reste alors à vérifier l'égalité $(-2, 1, 4, 3) = (-1, -1, 1, 2) + (-1, 2, 3, 1)$. ■

Exercice 15 (★★)

1. Soient $a = (2,3,-1)$, $b = (1,-1,-2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0,-7)$ quatre vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Montrer que
$$\mathrm{vect}\{a,b\} = \mathrm{vect}\{c,d\}.$$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{K}^n$,
$$\mathrm{vect}\{u,v\} = \mathrm{vect}\{u+v, u-v\}.$$
3. **Suppression d'un générateur :** Montrer que
$$\mathrm{vect}\{(5,7,2),(-3,1,4),(19,11,-8)\} = \mathrm{vect}\{(5,7,2),(-3,1,4)\}$$
4. **Remplacement d'un générateur :** Montrer que
$$\mathrm{vect}\{(5,7,2),(-3,1,4)\} = \mathrm{vect}\{(5,7,2),(2,8,6)\} = \mathrm{vect}\{(2,8,6),(-3,1,4)\}$$

Solution.

1. Les égalités
$$a = \frac{3}{7}c + \frac{1}{7}d \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{7}c - \frac{1}{7}d.$$
nous disent que $a, b \in \mathrm{vect}\{c,d\}$, d'où
$$\mathrm{vect}\{a,b\} \subset \mathrm{vect}\{c,d\}.$$
On montre de même que
$$\mathrm{vect}\{c,d\} \subset \mathrm{vect}\{a,b\}.$$
L'égalité voulue est ainsi établie.
2. On a tout de suite
$$\mathrm{vect}\{u+v, u-v\} \subset \mathrm{vect}\{u,v\}.$$
L'inclusion renversée s'obtient en remarquant que
$$u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}.$$
3. Il suffit de voir que $(19,11,-8)$ est combinaison linéaire des deux autres vecteurs considérés.
4. Il suffit de voir que $(2,8,6) = (5,7,2) + (-3,1,4)$.

■

Exercice 16 (★★) Soit $n \geq 1$ un entier. Une sur-famille d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est-elle encore une famille génératrice de F ?

Solution. C'est faux en général. Considérons $\mathcal{F} := (v_1, \ldots, v_p)$ une famille génératrice de F, i.e., $\mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} = F$. La sur-famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_r)$ de $\mathcal{F}$ avec $v_{p+1}, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ n'est pas en général une famille génératrice de F puisque $v_{p+1}, \ldots, v_r$ ne sont pas nécessairement des éléments de F.

Le résultat a néanmoins lieu si les éléments $v_{p+1}, \ldots, v_r \in F$. En effet, sous cette hypothèse, on a
$$F = \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} \subset \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_r\} \subset F$$
et ceci nous dit que la sur-famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_r)$ de $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F. ■

4 Opérations sur les s.e.v.

Exercice 17 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset G$. L'ensemble $G \setminus F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$?

Solution. La réponse est "non". En effet, $G \setminus F$ ne contient pas 0. ■

Exercice 18 (★★) Soient I un ensemble non vide, $n \geq 1$ un entier et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Solution. Puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans chacun des F_i ($i \in I$), nous savons que $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans l'intersection considérée. Soient $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour chaque $i \in I$, on a (car F_i est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$)

$$\lambda x + \mu y \in F_i.$$

Ceci nous dit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. ■

Exercice 19 (★★) Montrer que

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sans revenir à la définition et sans en déterminer une famille génératrice.

Solution. On peut exploiter le fait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et remarquer que D est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ puisque

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

■

Exercice 20 (★★) L'objectif de cet exercice est d'étudier l'union de deux sous-espaces vectoriels F, G de $\mathbb{K}^n$ où $n \geq 1$ désigne un entier fixé.

1. Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. On suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Nous allons montrer que dans ce cas, $F \cup G$ n'est **jamais** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Procédons par l'absurde en supposant que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Justifier qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$ et $g \in G$ tel que $g \notin F$.
   (b) Montrer que $f + g \in F \cup G$.
   (c) Aboutir à une contradiction.

Solution.

1. Si $F \subset G$ (resp. $G \subset F$), alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ puisque dans ce cas $F \cup G = G$ (resp. $F \cup G = F$).
2. Rappelons ici que nous nous plaçons désormais dans le cas où $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Par l'absurde, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Le fait que $F \not\subset G$ entraîne qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. De même, $G \not\subset F$ donne tout de suite l'existence de $g \in G$ tel que $g \notin F$.
   (b) Puisque $F \cup G$ est supposé être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, les inclusions $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$ permettent d'écrire
   $$f + g \in F \cup G. \tag{2}$$

(c) L'inclusion ci-dessus (2) nous dit que $f+g \in F$ ou $f+g \in G$. Nous allons voir que chacune de ces deux inclusions conduit à une contradiction. Si $f+g \in F$, alors il existe $f' \in F$ tel que $f+g = f'$. Ainsi, on a $g = f - f' \in F$ et ceci contredit le fait que $g \notin F$. De même, on ne peut pas avoir $f+g \in G$. L'inclusion (2) est donc absurde et permet de conclure que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

■

Exercice 21 (★★)

1. Montrer que $F = \mathbb{R}(1,0,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,0,1)$ sont en somme directe. A t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,2) \oplus \mathbb{R}(3,4)$.
3. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}(1,2,3)$ et $\mathbb{R}(2,4,6)$ sont-ils en somme directe ?

Solution.

1. Soit $x \in F \cap G$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda(1,0,0)$ et $x = \mu(0,0,1)$. Il s'ensuit $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. On conclut que $x = (0,0,0)$. On a évidemment $F \oplus G \subset \mathbb{R}^3$. L'inclusion renversée n'a pas lieu car $(0,1,0) \notin F \oplus G$.
2. De même que ci-dessus, on montre que $\mathbb{R}(1,2)$ et $\mathbb{R}(3,4)$ sont en somme directe. Par ailleurs, l'égalité
$$(x,y) = (\frac{-4x+3y}{2})(1,2) + \frac{2x-y}{2}(3,4)$$
valide pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ montre que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}(1,2) + \mathbb{R}(3,4)$. On conclut que
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,2) \oplus \mathbb{R}(3,4).$$
3. Les sous-espaces vectoriels considérés ne sont pas en somme directe car $(1,2,3) \in \mathbb{R}(1,2,3) \cap \mathbb{R}(2,4,6)$.

■

Exercice 22 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$ à p éléments avec $p \geq 1$ entier. Montrer que
$$\mathrm{vect}\,\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathbb{K}v_1 + \ldots + \mathbb{K}v_p.$$

Solution. L'ensemble $\mathbb{K}v_1 + \ldots + \mathbb{K}v_p$ contient $v_1, \ldots, v_p$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On a donc
$$\mathrm{vect}\,\{v_1, \ldots, v_p\} \subset \mathbb{K}v_1 + \ldots + \mathbb{K}v_p.$$
L'inclusion renversée découle du fait que tout élément de $\mathbb{K}v_1 + \ldots + \mathbb{K}v_p$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_p$ et donc un élément de $\mathrm{vect}\,\{v_1, \ldots, v_p\}$. ■

Exercice 23 (★★★) Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$ entier). On suppose que
$$E \cap F \subset E \cap G, \quad E + F \subset E + G \quad \text{et} \quad G \subset F.$$
Montrer que $F = G$.

Solution. Puisque $G \subset F$, il suffit d'établir que $F \subset G$. Soit $x \in F$. L'égalité évidente $x = 0_{\mathbb{K}^n} + x$ et l'inclusion $0_{\mathbb{K}^n} \in E$ permettent d'exploiter l'inclusion $E + F \subset E + G$ et ainsi d'écrire $x = y + z$ pour un certain $y \in E$ et $z \in G$. En combinant l'égalité $y = x - z$ avec les inclusions $x \in F$ et $-z \in G \subset F$, on obtient $y \in F$. Il s'ensuit $y \in E \cap F \subset E \cap G$ et donc $y \in G$. Il reste à voir que les inclusions $y \in G$ et $z \in G$ entraînent $x \in G$. On conclut que $F \subset G$. ■

Exercice 24 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, E, F et G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que
$$E + \big(F \cap (E+G)\big) = E + \big(G \cap (E+F)\big).$$

Solution. Notons A le membre de gauche de l'égalité souhaitée et B celui de droite. Soit $x \in E + \big(F \cap (E+G)\big) = A$. Commençons par voir qu'il existe $y \in E$ et $z \in F \cap (E+G)$ tels que $x = y+z$. Puisque $z \in E+G$, on peut écrire $z = e+g$ pour un certain $e \in E$ et $g \in G$. Il vient alors $g = z - e \in E+F$. Il reste à écrire $x = (y+e)+g \in E + \big(G \cap (E+F)\big)$ pour conclure quant à l'inclusion $A \subset B$. L'inclusion $B \subset A$ est analogue et laissée à la charge du lecteur. ■

5 Familles libres et liées

Exercice 25 (★) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la famille $\big((1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\big)$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Solution. Cette famille est évidemment génératrice puisque pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1,\dots,x_n) = x_1(1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,\dots,0,1).$$

Montrons que cette famille est libre. Fixons $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1,0,\dots,0) + \dots + \lambda_n(0,\dots,0,1) = (0,\dots,0).$$

Il vient

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (0,\dots,0),$$

i.e., $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille considérée est donc libre. ■

Exercice 26 (★) La famille $\big((1,1,0),(4,1,4),(2,-1,4)\big)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Solution. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(4,1,4) + \lambda_3(2,-1,4) = (0,0,0).$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda_2 = -\lambda_3$ et $\lambda_1 = 2\lambda_3$. Ces relations nous conduisent à

$$2(1,1,0) - (4,1,4) + (2,-1,4) = (0,0,0).$$

On conclut que la famille considérée est liée. ■

Exercice 27 (★) Soient $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $i,j \in \{1,2,3\}$ distincts, la famille (v_i,v_j) est libre dans $\mathbb{R}^3$. La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Solution. On a vu que (v_1,v_2,v_3) était liée dans $\mathbb{R}^3$. Pourtant, chacune des sous-familles (v_1,v_2), (v_2,v_3) et (v_1,v_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. ■

Exercice 28 (★★)

1. La famille $\big((1,2,3),(5,6,7)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? génératrice de $\mathbb{R}^3$? libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$, la famille $\big((1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\big)$ est-elle une libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1. La famille $\big((1,2,3),(5,6,7)\big)$ est de cardinal 2, elle ne peut donc pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$, a fortiori elle ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, cette famille est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Commençons par fixer $t \in \mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(1,0,t) + \lambda_2(1,1,t) + \lambda_3(t,0,1) = (0,0,0).$$

Il vient $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + t\lambda_3 = 0$ et $t\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. On en déduit $\lambda_3(t^2-1) = 0$. Si $t \notin \{-1,1\}$, on a donc $\lambda_3 = 0 = \lambda_1 = \lambda_2$ et dans ce cas, la famille considérée est libre. Sinon, on vérifie directement que les deux familles correspondant aux valeurs $t = -1$ et $t = 1$ sont liées.

■

Exercice 29 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, (u,v) une famille libre de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire (i.e., le caractère libre ou lié) de la famille (a,b) avec :

1. $a = 2u + 3v$ et $b = mu + v$;
2. $a = 2u + mv$ et $b = mu + v$;
3. $a = mu + 3m^2v$ et $b = (m-1)u + v$.

Solution.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b, on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (3\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u,v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors $\lambda_2(3m-2) = 0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m = \frac{2}{3}$. On a tout de suite $3b = a$, donc (a,b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.
Cas 2 : $m \neq \frac{2}{3}$. L'égalité $\lambda_2(3m-2) = 0$ nous donne $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. Donc, la famille (a,b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b, on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (m\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u,v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ m\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors $\lambda_1(2-m^2) = 0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $m = \varepsilon\sqrt{2}$. Puisque $\varepsilon^2 = 1$, on vérifie immédiatement que

$$a = \varepsilon\sqrt{2}b.$$

Donc, (a,b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.
Cas 2 : $m \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Montrons que (a,b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Puisque $m \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, l'égalité $\lambda_1(2-m^2) = 0$ nous dit que $\lambda_1 = 0$. On en déduit $\lambda_2 = 0$. Ainsi, (a,b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3. Fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. Par définition de a et de b, on a

$$(\lambda_1 m + \lambda_2(m-1))u + (3m^2\lambda_1 + \lambda_2)v = 0.$$

Puisque (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\begin{cases} \lambda_1 m + \lambda_2(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 3m^2\lambda_1 + 3\lambda_2 m(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_2(3m^2 - 3m - 1) = 0$. On vérifie que

$$3m^2 - 3m - 1 = 3(m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6})(m - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}).$$

Ceci nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m \notin \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Puisque $3m^2 - 3m - 1 \neq 0$, on a $\lambda_2 = 0$ puis $3m^2\lambda_1 = 0$ et donc (car $m \neq 0$) $\lambda_1 = 0$. Ainsi, (a, b) est une famille libre de E.
Cas 2 : $m \in \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Si $m = 0$, alors évidemment on a $a = 0$, donc (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$. Supposons donc $m \neq 0$. On a $3m^2 - 3m - 1 = 0$. En revenant à la définition de a et de b, on vérifie alors que

$$(m-1)a - mb = (3m^2 - 3m - 1)v = 0,$$

donc (a, b) est une famille liée de $\mathbb{R}^n$.

■

Exercice 30 (★★)

1. Vérifier que la famille $\big((1,0,2),(4,-1,0)\big)$ est libre. Trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille

$$\big((1,0,2),(4,-1,0),v\big)$$

soit libre. Peut-on trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big((1,0,2),(4,-1,0),v,w\big)$ est libre ?
2. Faire de même avec la famille à 1 élément $\big((1,1,1)\big)$.

Solution.

1. Le fait que la famille $\big((1,0,2),(4,-1,0)\big)$ soit libre est immédiat. On peut la compléter en une famille libre avec (par exemple !) le vecteur $v = (0,1,1)$. On ne peut pas compléter la famille $\big((1,0,2),(4,-1,0),v\big)$ en une famille libre de $\mathbb{R}^3$ car le cardinal maximal d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est 3.
2. La famille $\big((1,1,1)\big)$ est évidemment libre (une famille de cardinal 1 est libre si et seulement si l'unique élément la constituant est non nul). On peut la compléter en une famille libre avec $v_1 = (1,0,0)$ et $v_2 = (0,1,0)$. On ne peut pas compléter $\big((1,1,1),v_1,v_2\big)$ en une famille libre car le cardinal maximal d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est 3.

■

6 Base, dimension et rang

Exercice 31 (★) Soit A la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$A = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0,\ 4x - y + t = 0\right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de A.
3. En déduire la dimension de A.

Solution.

1. **Méthode 1 :** On revient à la définition (voir, par exemple, Exercice 2).
   Méthode 2 : Notons
   $$B = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0\right\}$$
   et
   $$C = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 4x - y + t = 0\right\}$$
   et observons que
   $$A = B \cap C.$$
   On vérifie que B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Or, l'intersection quelconque non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Donc, A (qui est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   Méthode 3 : Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a
   $$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$
   On en déduit pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
   $$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$
   Posons $e_1 = (1, 0, -2, 4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que
   $$\text{vect}(e_1, e_2) = A,$$
   en particulier A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminons maintenant une base de A. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a
   $$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$
   On en déduit pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
   $$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$
   Posons $e_1 = (1, 0, -2, 4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que (e_1, e_2) est une famille génératrice de A. Montrons que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$
   On vérifie alors que
   $$(\lambda_1, \lambda_2, -2\lambda_2 - 3\lambda_3, -4\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0, 0).$$
   Tout de suite, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc, (e_1, e_2) est une base de A.

■

Exercice 32 (★★) Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et une base de G.
3. Quelles sont les dimensions de F et G ?
4. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ? supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$ est une intersection d'hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$
est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On vérifie que
$$F = \mathbb{R}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \text{vect}\,\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}\,.$$
Les familles $\big((1, 1, 1)\big)$ et $\big((0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$ sont évidemment libres, elles sont donc respectivement des bases de F et G.
3. D'après ce qui précède, F est de dimension 1 et G est de dimension 2. Par ailleurs, on montre facilement que $F \cap G = \{0\}$, i.e., F et G sont en somme directe. L'égalité $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ découle de l'inclusion évidente $F + G \subset \mathbb{R}^3$ et de l'égalité $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

■

Exercice 33 (★★) Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -2, -1)$ et $w = (1, 1, -1)$. On pose
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{vect}\,\{u, v\}\,.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
3. A t-on $w \in F$? $w \in E$?
4. Déterminer une base de $E \cap F$.

Solution.

1. Le fait que E soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ découle de l'égalité
$$E = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}.$$
Ceci et le fait que la famille $\beta := ((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ soit libre nous dit que β est une base du sous-espace vectoriel E.
2. En revenant à la définition de famille libre, on montre facilement que (u, v, w) est libre.
3. Si $w \in F$, alors le cours nous dit que (u, v, w) est liée : ceci contredit la question précédente. La définition de E montre tout de suite que $w \in E$.
4. On a $(1, 0, 0) \notin F$ et ceci montre que $E \cap F \neq E$. Ainsi, $E \cap F$ est de dimension 0 ou 1. Il suffit alors de voir que $(7, -1, 1) = 3(1, 1, 1) + 2(2, -2, -1)$ pour conclure que $((7, -1, 1))$ est une base de $E \cap F$.

■

Exercice 34 (★★) Soit $n \geq 2$ un entier. Existe t-il deux hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ notés H_1 et H_2 tels que $H_1 \subset H_2$ et $H_1 \neq H_2$?

Solution. Pour deux hyperplans vectoriels H et H' de $\mathbb{R}^n$ nous savons que $\dim H = \dim H' = 2$. Une inclusion de l'un dans l'autre entraîne alors (voir la partie du cours relative à la dimension) l'égalité $H = H'$. ■

Exercice 35 (★★) Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\big((-1,3),(2,7)\big)$;
2. $\big((-1,3),(2,-6)\big)$;
3. $\big((0,0,0),(1,2,3)\big)$;
4. $\big((1,2,3),(1,2,3),(1,2,3)\big)$;
5. $\big((1,1,1,1),(0,1,2,1),(1,0,-2,3),(1,1,2,-2)\big)$.

Solution.

1. On vérifie que la famille est libre : elle est donc de rang 2.

2. La famille est évidemment liée puisque $2(-1,3)+(2,-6)=(0,0)$. On a donc
$$\text{vect}\{(-1,3),(2,-6)\} = \text{vect}\{(-1,3)\},$$
en particulier la famille étudiée est de rang 1.
3. La famille est de rang 1 car
$$\text{vect}\{(0,0,0),(1,2,3)\} = \text{vect}\{(1,2,3)\}.$$
4. La famille est de rang 1 car
$$\text{vect}\{(1,2,3),(1,2,3),(1,2,3)\} = \text{vect}\{(1,2,3),(1,2,3)\} = \text{vect}\{(1,2,3)\}.$$
5. Notons $u_1=(1,1,1,1)$, $u_2=(0,1,2,1)$, $u_3=(1,0,-2,3)$ et $u_4=(1,1,2,-2)$. En observant que
$$-2u_1+u_2+u_3+u_4=(0,0,0,0)$$
on obtient
$$\text{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\text{rg}(u_2,u_3,u_4).$$
On vérifie par ailleurs que la famille (u_2,u_3,u_4) est libre et ceci permet de conclure que $\text{rg}(u_2,u_3,u_4)=3$.

■

Exercice 36 (★★★) L'objectif de cet exercice est d'établir la formule de Grassmann. Ici, $n \geq 1$ désigne un entier fixé et F, G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que
$$\dim(F+G) \leq \dim(F)+\dim(G).$$
L'inégalité ci-dessus est-elle une égalité en général ?
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ en somme directe, i.e., $F\cap G=\{0\}$. Montrer que si $(f_1,\ldots,f_p)$ est une famille libre de F (où $p\geq 1$ entier) et $(g_1,\ldots,g_q)$ (où $q \geq 1$ entier) est une famille libre de G, alors $(f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)$ est une famille libre de $F+G$.
3. Montrer que
$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G) \quad \text{lorsque } F\cap G=\{0\}.$$
4. On suppose $H := F\cap G \neq \{0\}$.
   (a) Justifier que H admet une base.

(b) On note $\beta = (h_1, \ldots, h_r)$ une base de H pour un entier $r \geq 1$. Pourquoi a t-on $r = \dim(H)$?

(c) Montrer que β est à la fois une famille libre de F et de G.

(d) Montrer que si β est une base de F ou de G, alors on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

(e) On suppose désormais dans toute la suite que β n'est ni une base de F ni une base de G. Montrer qu'il existe des vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ de F et des vecteurs $g_1, \ldots, g_q$ de G tels que $(h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p)$ soit une base de F et $(h_1, \ldots, h_r, g_1, \ldots, g_q)$ soit une base de G.

(f) Montrer que la famille $(h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $F + G$.

(g) En déduire la formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Solution.

1. Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, l'inégalité voulue est immédiate. Supposons donc $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$. Notons $\beta = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F (donc $p = \dim F \geq 1$) et $\gamma = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G (donc $q = \dim G \geq 1$). Nous allons montrer que la famille $\delta := (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est génératrice de $F + G$. Pour le voir, commençons par fixer $x \in F + G$. On peut écrire $x = f + g$ pour un certain $(f, g) \in F \times G$. Le fait que β soit une base de F et γ une base de G permet de trouver des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ tels que

$$f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p \quad \text{et} \quad g = \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q.$$

Il reste alors à noter que

$$x = f + g = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + \mu g_1 + \ldots + \mu_q g_q$$

pour conclure que la famille δ est génératrice de $F + G$.
Nécessairement, le cardinal (i.e., le nombre d'éléments) de δ est supérieur ou égal à la dimension de $F + G$, i.e.,

$$\dim(F + G) \leq p + q = \dim F + \dim G.$$

Cette inégalité n'est pas une égalité en général. En effet, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $F = G = \text{vect}\{(1, 0)\}$, on a

$$\dim(F + G) = 1 < \dim F + \dim G = 2.$$

2. On suppose ici que $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de F et $(g_1, \ldots, g_q)$ une famille libre de G avec $p, q \geq 1$ entiers. Nous allons montrer que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}. \tag{3}$$

Montrons que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$. On a tout de suite

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q) \in F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^n}\},$$

i.e., $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = 0_{\mathbb{K}^n}$. En combinant cette dernière égalité au caractère libre de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$, on obtient

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

En revenant à (3), on a alors

$$\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il reste à exploiter le fait que $(g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre de G pour obtenir

$$\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0.$$

On conclut que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre.

3. On peut supposer $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$ (sinon, l'égalité voulue est évidente). Soient $\beta = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F (donc $p = \dim F \geq 1$) et $\gamma = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G (donc $q = \dim G \geq 1$). On a vu à la question 3. (resp. 4.) que $\delta := (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice (resp. libre) de $F + G$. Ainsi, δ est une base de $F + G$ ce qui entraîne en particulier
$$\dim(F + G) = p + q = \dim F + \dim G.$$

4. On suppose $H := F \cap G \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
   (a) Evidemment, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Le fait qu'il ne soit pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ nous assure qu'il admet une base.
   (b) Soit $\beta = (h_1, \ldots, h_r)$ une base de H (il en existe d'après la question précédente). Il convient de rappeler ici que toutes les bases de H ont même cardinal (i.e., même nombre d'éléments) et que ce cardinal commun est par définition la dimension de H. On a donc immédiatement $r = \dim H$.
   (c) La famille β est avant tout une famille de $F \cap G \subset F$. Ceci et le fait que β soit libre nous dit que β est une famille libre de F. De même, β est une famille libre de G.
   (d) Supposons que β soit une base de F. On a tout de suite $F \cap G \subset F$ et $\dim(F \cap G) = \dim F$, d'où l'égalité
   $$F = F \cap G.$$
   De ceci, on déduit l'inclusion $F \subset G$ puis
   $$G \subset F + G \subset G + G = G.$$
   On conclut alors que
   $$G = F + G.$$
   Il découle de tout ce qui précède
   $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$
   Si β est une base de G, un raisonnement analogue à ce qui précède donne encore l'égalité ci-dessus.
   (e) On suppose dans toute la suite que β n'est ni une base de F ni une base de G. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de la base incomplète pour obtenir des vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ de F et des vecteurs $g_1, \ldots, g_q$ de G tels que $(h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p)$ soit une base de F et $(h_1, \ldots, h_r, g_1, \ldots, g_q)$ soit une base de G.
   (f) On note $\delta = (h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$. Nous allons montrer que la famille δ est une base de $F + G$.

   La famille δ est génératrice de $F + G$: Soit $x \in F + G$. Par définition, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Le fait que la famille $(h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p)$ (resp. $(h_1, \ldots, h_r, g_1, \ldots, g_q)$) soit une base de F (resp. de G) entraîne l'existence de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ (resp. $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r$ et $\nu_1, \ldots, \nu_q$) tels que
   $$f = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_r h_r + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_p f_p$$
   (resp.
   $$g = \lambda'_1 h_1 + \ldots + \lambda'_r h_r + \nu_1 g_1 + \ldots + \nu_q g_q).$$
   Il vient alors
   $$x = f + g = \sum_{k=1}^{r} (\lambda_k + \lambda'_k) h_k + \sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k + \sum_{k=1}^{q} \nu_k g_k.$$

La famille δ est libre : Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_p f_p + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}. \tag{4}$$

En remarquant que

$$\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_p f_p = -(\gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q)$$

nous voyons que

$$v := \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_r h_r + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_p f_p \in F \cap G = H. \tag{5}$$

Puisque $(h_1, \ldots, h_r)$ est une base de H, il existe $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \alpha'_1 h_1 + \ldots + \alpha'_r h_r. \tag{6}$$

Les égalités (5) et (6) donnent deux décompositions de v sur la base $(h_1, \ldots, h_r, f_1, \ldots, f_p)$ de F. Il s'ensuit que

$$\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0.$$

En revenant à (4), on a alors

$$\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_r h_r + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Il reste à invoquer le caractère libre de la famille $(h_1, \ldots, h_r, g_1, \ldots, g_q)$ (qui vient du fait que c'est une base de G) pour aboutir à

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \gamma_1 = \ldots = \gamma_q = 0.$$

(g) En examinant le cardinal des diverses bases impliquées dans la question précédente, on obtient

$$\dim(F + G) = r + p + q \quad \text{et} \quad \dim(F \cap G) = r$$

ainsi que

$$\dim F = p \quad \text{et} \quad \dim G = q.$$

La formule de Grassmann en découle.

■

Exercice 37 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $(e_1, \ldots, e_q)$ une famille génératrice de F (en particulier, $q \geq \dim F$) et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de F (en particulier $p \leq \dim F$). Montrer (en s'inspirant de la démonstration du théorème de la base incomplète) qu'il existe $v_{p+1}, \ldots, v_r \in \{e_1, \ldots, e_q\}$ tels que la famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_r)$ soit une base de F.

Solution. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres incluses dans F. Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{S}_k$ comme l'ensemble des sur-familles de $(v_1, \ldots, v_p)$ de la forme $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+k})$ avec $v_{p+1}, \ldots, v_{p+k} \in \{e_1, \ldots, e_q\}$. Posons

$$\Omega := \{k \in \mathbb{N}^\star : \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Supposons un moment que $A := \{e_1, \ldots, e_q\} \subset \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} =: V$. Il s'ensuit

$$F = \operatorname{vect} A \subset V \subset F,$$

en particulier $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de F, une contradiction. On a donc $A \not\subset V$ et ceci nous donne l'existence de $\xi \in A$ avec $\xi \notin \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$. Le résultat relatif à l'enrichissement des familles libres nous dit alors que $(v_1, \ldots, v_p, \xi)$ est une famille libre incluse dans F. Ainsi, Ω est une partie non vide de $\mathbb{N}^\star$ (car $1 \in \Omega$) et majorée (par $\dim F$). Notons K son plus grand élément. Il existe alors $v_{p+1}, \ldots, v_{p+K} \in \{e_1, \ldots, e_q\}$ tels que $\beta := (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+K})$ soit libre. Si cette dernière famille β n'est pas génératrice, alors par le même argument que ci-dessus on aurait $K + 1 \in \Omega$ et ceci contredirait le fait que K soit le plus grand élément de Ω. ■

7 Applications linéaires

Exercice 38 (★) La fonction cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle linéaire ? Même question avec la fonction carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. On a $\cos(2\pi) \neq 2\cos(\pi)$ ce qui montre que la fonction cos n'est pas linéaire. On a $(2.2)^2 \neq 2.(2)^2$ ce qui permet de conclure que la fonction carrée n'est pas linéaire. ■

Exercice 39 (★) Montrer que $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x,y,z) = (x+2y-z, x+z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

est linéaire.

Solution. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$h\big(\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2)\big) = h(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2).$$

Notons $X := \lambda x_1 + \mu x_2$, $Y := \lambda y_1 + \mu y_2$ et $Z := \lambda z_1 + \mu z_2$. Par définition de h, on a

$$h(X,Y,Z) = (X+2Y-Z, X+Z).$$

On a sans difficultés

$$X + 2Y - Z = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2)$$

et

$$X + Z = \lambda(x_1 + z_1) + \mu(x_2 + z_2).$$

On a alors

$$h(X,Y,Z) = [\lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2), \lambda(x_1 + z_1) + \mu(x_2 + z_2)]$$

et ceci s'écrit encore

$$h(X,Y,Z) = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1, x_1 + z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 - z_2, x_2 + z_2) = \lambda h(x_1,y_1,z_1) + \mu h(x_2,y_2,z_2).$$

On conclut que h est linéaire. ■

Exercice 40 (★★) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaires.

Solution. Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est évidemment linéaire.

Considérons à présent une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire. Par définition, on a pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

En posant $a := f(1)$, il vient alors

$$f(\lambda) = \lambda a \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On conclut que l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donné par

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}.$$

■

Exercice 41 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x) = (3x, 5x, 7x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Montrer de deux façons différentes que $\ker(f) = \{0\}$.
3. Déterminer le rang de f de deux manières différentes.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a tout de suite
$$f(\lambda x + \mu y) = \big(3(\lambda x + \mu y), 5(\lambda x + \mu y), 7(\lambda x + \mu y)\big).$$
Il reste à voir que
$$\begin{aligned}\big(3(\lambda x + \mu y), 5(\lambda x + \mu y), 7(\lambda x + \mu y)\big) &= (3\lambda x + 3\mu y, 5\lambda x + 5\mu y, 7\lambda x + 7\mu y).\\ &= \lambda(3x + 5x, 7x) + \mu(3y, 5y, 7y)\\ &= \lambda f(x) + \mu f(y)\end{aligned}$$
pour conclure que f est linéaire.
2. D'après le théorème du rang, on doit avoir $\dim \ker(f) + \mathrm{rg}(f) = 1$. Puisque f n'est pas nulle, on a nécessairement $\mathrm{rg}(f) > 0$. Ainsi, $\dim \ker(f) = 0$, i.e., $\ker(f) = \{0\}$. Une autre manière d'obtenir cette dernière égalité est d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x, 5x, 7x) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0.$$
3. Le théorème du rang et la question précédente donne tout de suite $\mathrm{rg}(f) = 1$. Une autre façon d'obtenir cette égalité consiste à écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = x(3, 7, 5)$$
de sorte que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}(3, 7, 5)$ qui est donc de dimension 1.
4. Le fait que le noyau de f soit réduit à zéro nous dit que f est injective. Puisque $\mathrm{rg}(f) \neq 3$, l'application linéaire f n'est pas surjective.

■

Exercice 42 (★★) On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x, y) = x + y \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que l'application g est linéaire.
2. Sans déterminer de base (du noyau et de l'image de g), déterminer la dimension du noyau de g et son rang.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en déterminant une base du noyau de g et son image.
4. Etudier l'injectivité et la surjectivité de g.

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Commençons par noter que
$$g(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = g(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$
Par définition de g, on a
$$g(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2).$$
Il reste alors à voir que
$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2) = \lambda g(x_1, y_1) + \mu g(x_2, y_2)$$
pour conclure que g est linéaire.

2. L'application g est non nulle donc son rang $\mathrm{rg}(g) > 0$. Par ailleurs, $\mathrm{im}(g) \subset \mathbb{R}$, donc $\mathrm{rg}(g) \leq 1$. On en déduit que $\mathrm{rg}(g) = 1$. Une application du théorème du rang donne alors $\dim \ker(g) = 2 - 1 = 1$.
3. La question précédente montre que $\mathrm{im}(g) = \mathbb{R}$ (donc une base de $\mathrm{im}(g)$ est la famille à un élément (1)). De plus, en écrivant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (x, -x) \Leftrightarrow (x, y) = x(1, -1)$$
nous voyons que $\ker(g)$ a pour base $\big((1, -1)\big)$.
4. L'application g n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à zéro. Elle est en revanche surjective puisque $\mathrm{im}(g) = \mathbb{R}$.

■

Exercice 43 (★★) On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Déterminer le noyau de f et son image. Est-ce en accord avec le théorème du rang ?
3. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Solution.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a évidemment
$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$
Par définition de f, on a
$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2).$$
Ceci s'écrit encore
$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2).$$
On peut alors conclure que
$$f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2).$$
2. Soit $(x, y) \in \ker(f)$. Par définition de f, on a $x + y = 0$ et $x - y = 0$, i.e., $x = y = 0$. Il vient alors $\ker(f) = \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a
$$\mathrm{im}(f) = \left\{(x + y, x - y, x + y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
Ceci montre que
$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}\left\{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\right\}.$$
C'est bien en accord avec le théorème du rang (qui nous dit que la dimension de l'image plus celle du noyau doit valoir celle de $\mathbb{R}^3$ qui vaut 3).
3. Puisque $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, nous savons que f est injective. Par ailleurs, f n'est pas surjective car $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$.

■

Exercice 44 (★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires. Montrer que

$$f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \quad \text{et} \quad g^{-1}\big(\operatorname{im}(g \circ f)\big) = \ker(g) + \operatorname{im}(f).$$

Solution. Notons $K := \ker(g \circ f)$ et $I := \operatorname{im}(g \circ f)$.

Montrons la première égalité. On procède par double inclusion en commençant par établir que $f(K) \subset \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$. Soit $y \in f(K)$. Il existe alors $x \in K$ tel que $y = f(x)$ et ceci entraîne bien sûr que $y \in \operatorname{im}(f)$. Par ailleurs, la définition de K donne $0 = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$ et ceci nous dit que $y \in \ker(g)$. Ceci confirme l'inclusion voulue à savoir $f(K) \subset \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$.

Montrons l'inclusion renversée, i.e., $\ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \subset f(K)$. Soit $y \in \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$. On peut écrire $y = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{K}^m$. Le fait que y soit un élément du noyau de g nous dit alors que $0 = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, i.e., $x \in K$. Il s'ensuit que $y \in f(K)$ et ceci traduit l'inclusion souhaitée $\ker(g) \cap \operatorname{im}(f) \subset f(K)$. La première égalité est ainsi établie.

Montrons la seconde égalité. On procède par double inclusion en commençant par établir que $g^{-1}(I) \subset \ker(g) + \operatorname{im}(f)$. Soit $x \in g^{-1}(I)$. On a tout de suite $g(x) \in I$. Par définition de I, il existe $x' \in \mathbb{K}^m$ tel que $g(x) = (g \circ f)(x')$. Par linéarité de g, on peut écrire $g\big(x - f(x')\big) = 0$. Il s'ensuit que $x - f(x') \in \ker(g)$ et ceci nous dit que $x \in \operatorname{im}(f) + \ker(g)$.

Montrons l'inclusion renversée, i.e., $\ker(g) + \operatorname{im}(f) \subset g^{-1}(I)$. Soit $x \in \ker(g) + \operatorname{im}(f)$. Il existe $u \in \ker(g)$ et $v \in \operatorname{im}(f)$ tels que $x = u + v$. Par définition de l'image de f, on peut écrire $v = f(w)$ pour un certain $w \in \mathbb{K}^m$. On a alors $0 = g(u) = g(x - v) = g\big(x - f(w)\big)$ et la linéarité de g entraîne $g(x) = (g \circ f)(w)$. On aboutit alors à $x \in g^{-1}(I)$. La seconde égalité est ainsi démontrée. ■

Exercice 45 (★★) Existe t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de noyau

$$H = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\big\}?$$

Solution. La partie H de $\mathbb{R}^4$ est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1. L'existence d'une telle application linéaire f donnerait via le théorème du rang $\operatorname{rg}(f) = 4 - 1 = 3$ ce qui est absurde compte-tenu du fait que $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. ■

Exercice 46 (★★) Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f, g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ deux application linéaires. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)\big).$$

Solution. Considérons deux applications linéaires $h_1, h_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. On a tout de suite

$$\operatorname{im}(h_1 + h_2) \subset \operatorname{im}(h_1) + \operatorname{im}(h_2).$$

On déduit de cette inclusion et de la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(h_1 + h_2) &\leq \dim\big(\operatorname{im}(h_1) + \operatorname{im}(h_2)\big) \\ &= \dim\big(\operatorname{im}(h_1)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(h_2)\big) - \dim\big(\operatorname{im}(h_1) \cap \operatorname{im}(h_2)\big) \\ &\leq \dim\big(\operatorname{im}(h_1)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(h_2)\big) \\ &= \operatorname{rg}(h_1) + \operatorname{rg}(h_2). \end{aligned} \tag{7}$$

En appliquant ceci avec $h_1 = f$ et $h_2 = g$, on obtient

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

En observant que $f + g$ et $-g$ sont des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$, on peut appliquer (7) avec $h_1 = f + g$ et $h_2 = -g$, il vient

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f + g - g) \leq \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-g).$$

Il reste à voir que $\text{rg}(g) = \text{rg}(-g)$ pour aboutir à

$$\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f+g).$$

De manière analogue, on montre que

$$\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f+g).$$

On conclut alors que

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g).$$

■

Exercice 47 (★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires. On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est bijective. Montrer que

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n.$$

Solution. On commence par rappeler que

$$\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g). \tag{8}$$

Puisque l'application linéaire $f + g$ est bijective, on a

$$\text{rg}(f+g) = n.$$

D'autre part, l'égalité $f \circ g = 0$ donne sans difficultés $\text{im}(g) \subset \ker(f)$, en particulier $\text{rg}(g) \leq \dim\ker(f)$. En combinant ceci et le théorème du rang, il vient

$$\text{rg}(g) \leq n - \text{rg}(f).$$

En revenant à (8), nous voyons que

$$n = \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f) + n - \text{rg}(f) = n.$$

L'égalité souhaitée est établie. ■

Exercice 48 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) $\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$.
(b) $\text{im}(f) = \text{im}(f^2)$.
(c) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Solution. $(a) \Rightarrow (b)$, On suppose que $\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$. On a toujours $\text{im}(f^2) \subset \text{im}(f)$. Soit $y \in \text{im}(f)$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \text{im}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Il s'ensuit que $y = f(x_1 + x_2) = f(x_2)$. Ceci et le fait que $x_2 \in \text{im}(f)$ permet d'écrire $x_2 = f(z)$ pour un certain $z \in \mathbb{K}^n$ donnent $y = f^2(z) \in \text{im}(f^2)$. $(b) \Rightarrow (c)$, Supposons $\text{im}(f) = \text{im}(f^2)$. En appliquant le théorème du rang à f et à f^2, on obtient sans difficultés

$$\dim\ker(f) = \dim\ker(f^2).$$

En combinant ceci et l'inclusion évidente $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, on aboutir à $\ker(f) = \ker(f^2)$.
$(c) \Rightarrow (a)$, Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. Montrons tout d'abord que $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$ sont en somme directe. Fixons $y \in \ker(f) \cap \text{im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$. Il vient alors $0 = f(y) = f^2(x)$,

i.e., $x \in \ker(f^2)$. Notre hypothèse nous dit alors que $x \in \ker(f)$ et ceci montre que $y = 0$. En combinant ceci, la formule de Grassmann et le théorème du rang, on obtient

$$\dim(\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)) = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) = n.$$

Il reste à voir que $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) \subset \mathbb{K}^n$ pour conclure que

$$\mathbb{K}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f).$$

■

Exercice 49 (★★★) Soient $m, n, p \geq 1$ trois entiers, $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires.
(a) Montrer que $\ker(g_{|\mathrm{im}(f)}) = \ker(g) \cap \mathrm{im}(f)$.
(b) En déduire que

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim\big(\ker(g) \cap \mathrm{im}(f)\big).$$

(c) Conclure que

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n.$$

Solution. (a) L'égalité désirée découle tout de suite de la définition de $g_{|\mathrm{im}(f)}$.
(b) Il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'application linéaire $g_{|\mathrm{im}(f)} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{K}^p$ pour obtenir

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\ker g_{|\mathrm{im}(f)}) + \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{im}(f)}).$$

Puisque par définition $\dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$, il reste à établir que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{im}(f)})$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{K}^m$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g_{|\mathrm{im}(f)}(f(x)),$$

on obtient aisément $(g \circ f)(\mathbb{K}^m) = g_{|\mathrm{im}(f)}(\mathrm{im}(f))$. On conclut que

$$\dim\big((g \circ f)(\mathbb{K}^m)\big) = \dim\big(g_{|\mathrm{im}(f)}(\mathrm{im}(f))\big)$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{im}(f)}).$$

(c) L'inégalité voulue découle de la question précédente et de

$$\dim\big(\ker(g) \cap \mathrm{im}(f)\big) \leq \dim(\ker(g)) = n - \mathrm{rg}(g).$$

■

Exercice 50 (★★★) Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée. Le but de cet exercice est d'établir que f est une homothétie vectorielle, i.e., il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $f(x) = \lambda x$.

1. Etablir que pour chaque $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. *On pourra commencer par étudier le cas où la famille (x, y) est liée.*
3. Conclure.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{(0,0)\}$ (qui dépendent bien sûr du vecteur x) tel que

   $$\alpha x + \beta f(x) = 0.$$

   Si $\beta = 0$, alors $\alpha x = 0$ puis $\alpha = 0$ ce qui est contradictoire. Il s'ensuit $\beta \neq 0$ puis $f(x) = -\alpha\beta^{-1}x$. Il reste à poser $\lambda_x := -\alpha\beta^{-1}$ pour conclure.

2. Supposons tout d'abord que la famille (x, y) soit liée. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0$. Supposons dans un premier temps que $\alpha \neq 0$. Il existe alors $x = \delta y$ et ceci permet d'écrire
$$\lambda_x x = f(x) = f(\delta y) = \delta f(y) = \delta \lambda_y y = \lambda_y x.$$
Il vient alors $(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$ puis (en gardant à l'esprit que $x \neq 0$) $\lambda_x = \lambda_y$. Si $\alpha = 0$, alors nécessairement $\beta \neq 0$ et un raisonnement analogue donnerait encore $\lambda_x = \lambda_y$.
Supposons maintenant que (x, y) soit libre. Il suffit d'écrire
$$\lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$
pour en arriver à
$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$
Le caractère libre de la famille (x, y) donne alors $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, en particulier $\lambda_x = \lambda_y$.
3. D'après la Question 2., il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $c = \lambda_x$. Il reste à revenir à la Question 1., pour aboutir à l'égalité $f(x) = cx$ valide pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$.

■