Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD3 - Espaces vectoriels

1 Exercice du cours

Exercice 1 *Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (resp., de $\mathbb{R}^3$).*

Solution. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\mathbb{R}u$ avec $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$) et $\mathbb{R}^2$. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont : $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathbb{R}u$ avec $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$), $\operatorname{vect}\{u, v\}$ avec (u, v) une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (les (hyper)plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$) et $\mathbb{R}^3$. ■

2 Exercices du T.D.

Exercice 2 *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $u = (2, -1)$, $v = (-3, 2)$ et $w = (1, 3)$. Montrer que w est combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v.*

Solution. Supposons que w soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et v. Par définition, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda u + \mu v.$$

Il vient alors

$$(1, 3) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu).$$

On en déduit **(Exer)** $\lambda = 11$ et $\mu = 7$. Il reste à vérifier que **(Exer)**

$$(1, 3) = 11(2, -1) + 7(-3, 2).$$

Donc, w est bien combinaison linéaire de u et v. ■

Exercice 3 *Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $w = (1, a, 3) \in \mathbb{R}^3$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de $u = (-1, -2, 2)$ et $v = (0, 4, -1)$.*

Solution. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $w = (1, a, 3)$ soit combinaison linéaire (à coefficients réels) de u et de v. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda u + \mu v,$$

i.e.,

$$(1, a, 3) = \lambda(-1, -2, 2) + \mu(0, 4, -1).$$

Ceci entraîne **(Exer)** que $\lambda = -1$, $a = 18$ et $\mu = -5$. On vérifie alors que **(Exer)**

$$(1, -18, 3) = -u - 5v.$$

■

Exercice 4 *Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = (-2, a, b, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $u = (-1, -1, 1, 2)$ et $v = (-1, 2, 3, 1)$.*

Solution. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$w \in \operatorname{Vect}\{u, v\}$$

avec $w = (-2, a, b, 3)$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$. Il vient alors **(Exer)** $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $a = 1$ et $b = 4$. Il reste alors à vérifier l'égalité **(Exer)**

$$(-2, 1, 4, 3) = (-1, -1, 1, 2) + (-1, 2, 3, 1).$$

■

Exercice 5 *Soient $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 2)$ et $b_3 = (1, 2, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées des vecteurs $a_1 = (5, 1, 3)$, $a_2 = (-2, 3, -1)$ et $a_3 = 2a_1 - 3a_2$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base (b_1, b_2, b_3). La famille (a_1, a_2) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Et la famille (a_1, a_2, a_3) ?*

Solution. Montrons tout d'abord que (b_1, b_2, b_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On a tout de suite

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

On observe en premier lieu que $(2) - (1)$ donne $\lambda_3 = 0$. En tenant compte de ceci et en faisant $(3) - (2)$, on obtient $\lambda_2 = 0$. Chacune des relations $(1), (2)$ et (3) donne alors $\lambda_1 = 0$. Ainsi, la famille (b_1, b_2, b_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. Puisque cette famille a exactement trois éléments, elle est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient (α, β, γ) les coordonnées de $(5, 1, 3)$ dans la base (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$, autrement dit (α, β, γ) est l'unique élément de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant

$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (5, 1, 3).$$

En combinant ceci avec les égalités $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 2)$ et $b_3 = (1, 2, 3)$, on a sans difficultés **(Exer)** $\alpha = 3$, $\beta = 6$ et $\gamma = -4$, i.e.,

$$a_1 = (5, 1, 3) = 3b_1 + 6b_2 - 4b_3.$$

De même **(Exer)**, on montre que

$$a_2 = (-2, 3, -1) = 2b_1 - 9b_2 + 5b_3.$$

Observons **(Exer)** que les égalités ci-dessus donnent

$$a_3 = 2a_1 - 3a_2 = 39b_2 - 23b_3.$$

Une base de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc (a_1, a_2) ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque

$$2a_1 - 3a_2 - a_3 = 0$$

la famille (a_1, a_2, a_3) est une famille liée de $\mathbb{R}^3$. Elle ne peut donc pas être une base de $\mathbb{R}^3$. ■

Exercice 6 *Soit A la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par*

$$A = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0,\ 4x - y + t = 0\right\}.$$

(a) *Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*
(b) *En déterminer une base.*

Solution. (a) **Méthode 1.** Observons que $0_{\mathbb{R}^4} \in A$. Soient $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) \in A. \tag{2.1}$$

Notons que

$$\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$$

et posons $X = \lambda x_1 + \mu x_2$, $Y = \lambda y_1 + \mu y_2$, $Z = \lambda z_1 + \mu z_2$ et $T = \lambda t_1 + \mu t_2$. Constatons **(Exer)** que l'inclusion voulue (2.1) revient à établir que

$$2X + 3Y + Z = 0 \quad \text{et} \quad 4X - Y + T = 0.$$

Puisque $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in A$, on a

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + z_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(2x_2 + 3y_2 + z_2) = 0$$

ce qui donne

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + z_1) + \mu(2x_2 + 3y_2 + z_2) = 0$$

et ceci s'écrit encore **(Exer)**

$$2X + 3Y + Z = 0.$$

De même **(Exer)**, on a

$$\lambda(4x_1 - y_1 + t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(4x_2 - y_2 + t_2) = 0$$

et on vérifie que cela entraîne

$$4X - Y + T = 0.$$

Méthode 2 : Notons

$$B = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z = 0\right\}$$

et

$$C = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 4x - y + t = 0\right\}$$

et observons que

$$A = B \cap C.$$

On vérifie que **(Exer)** B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Or, l'intersection quelconque non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E **(Exer)**. Donc, A (qui est une intersection de

deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Méthode 3 : Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$

On en déduit **(Exer)** pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$

Posons $e_1 = (1, 0, -2, 4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que

$$\text{vect}(e_1, e_2) = A,$$

en particulier A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminons maintenant une base de A. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 3y \\ t = -4x + y. \end{cases}$$

On en déduit **(Exer)** pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in A \Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, -2, -4) + y(0, 1, -3, 1).$$

Posons $e_1 = (1, 0, -2, 4)$ et $e_2 = (0, 1, -3, 1)$. L'équivalence précédente nous dit que (e_1, e_2) est une famille génératrice de A. Montrons que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

On vérifie alors que **(Exer)**

$$(\lambda_1, \lambda_2, -2\lambda_2 - 3\lambda_3, -4\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Tout de suite, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc, (e_1, e_2) est une base de A. ■

Exercice 7 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, (u, v) une famille libre de E, $m \in \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire de a et de b dans chacun des cas suivants :*
(i) $a = 2u + 3v$ et $b = mu + v$;
(ii) $a = 2u + mv$ et $b = mu + v$;
(iii) $a = mu + 3m^2 v$ et $b = (m - 1)u + v$.

Solution. (i) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0_E$. Par définition de a et de b, on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (3\lambda_1 + \lambda_2)v = 0_E.$$

Puisque (u, v) est une famille libre de E, il s'ensuit

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors **(Exer)** $\lambda_2(3m - 2) = 0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m = \frac{2}{3}$. On a tout de suite $3b = a$, donc (a, b) est une famille liée de E.

Cas 2 : $m \neq \frac{2}{3}$. L'égalité $\lambda_2(3m-2)=0$ nous donne $\lambda_2=0$ puis $\lambda_1=0$. Donc, la famille (a,b) est une famille libre de E.
(ii) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0_E$. Par définition de a et de b, on a

$$(2\lambda_1 + m\lambda_2)u + (m\lambda_1 + \lambda_2)v = 0_E.$$

Puisque (u,v) est une famille libre de E, il vient

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ m\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a alors **(Exer)** $\lambda_1(2-m^2)=0$ ce qui nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$. Il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $m = \varepsilon\sqrt{2}$. Puisque $\varepsilon^2 = 1$, on vérifie immédiatement que **(Exer)**

$$a = \varepsilon\sqrt{2}b.$$

Donc, (a,b) est une famille liée de E.
Cas 2 : $m \notin \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$. Montrons que (a,b) est une famille libre de E. Puisque $m \notin \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, l'égalité $\lambda_1(2-m^2)=0$ nous dit que $\lambda_1=0$. On en déduit $\lambda_2=0$. Ainsi, (a,b) est une famille libre de E.
(iii) Fixons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0_E$. Par définition de a et de b, on a

$$(\lambda_1 m + \lambda_2(m-1))u + (3m^2\lambda_1 + \lambda_2)v = 0_E.$$

Puisque (u,v) est une famille libre de E, il vient

$$\begin{cases} \lambda_1 m + \lambda_2(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 3m^2\lambda_1 + 3\lambda_2 m(m-1) = 0 \\ 3m^2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_2(3m^2-3m-1)=0$. On vérifie **(Exer)** que

$$3m^2 - 3m - 1 = 3(m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6})(m - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}).$$

Ceci nous conduit à distinguer deux cas.
Cas 1 : $m \notin \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Puisque $3m^2-3m-1 \neq 0$, on a $\lambda_2 = 0$ puis $3m^2\lambda_1 = 0$ et donc (car $m \neq 0$) $\lambda_1 = 0$. Ainsi, (a,b) est une famille libre de E.
Cas 2 : $m \in \left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21}\right\}$. Si $m=0$, alors évidemment on a $a=0$, donc (a,b) est une famille liée de E. Supposons donc $m \neq 0$. On a $3m^2-3m-1=0$. En revenant à la définition de a et de b, on vérifie alors que **(Exer)**

$$(m-1)a - mb = (3m^2-3m-1)v = 0,$$

donc (a,b) est une famille liée de E. ■

Avant d'aborder l'exercice suivant, introduisons la notion de produit scalaire et de norme associée.

Définition 2.1 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un produit scalaire sur E lorsque :*
(i) φ est bilinéaire, i.e., pour tout $x, y, z \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$$

et

$$\varphi(z, \lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(z, x) + \mu\varphi(z, y).$$

(ii) φ est symétrique, i.e., pour tout $x, y \in E$, on a

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, z).$$

(iii) φ est définie positive, i.e., pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) \geq 0$$

et pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lorsque φ est un produit scalaire sur E, on dit que (E, φ) est un espace euclidien si E est de dimension finie et un espace préhilbertien réel si E est de dimension infinie. L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\varphi : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\varphi(x, x)} \end{aligned}$$

est appelée norme associée à φ.

Soit $n \geq 1$ un entier. L'application

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

est un produit scalaire **(Exer)** sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle produit scalaire euclidien canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ est un espace euclidien. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est la norme associée au produit scalaire euclidien usuel, i.e.,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \end{aligned}$$

Exercice 8 *On note $\cdot$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, i.e.,*

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &\mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On suppose que u_1, u_2 et u_3 sont orthogonaux deux à deux, i.e., pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$,

$$u_i.u_j = 0.$$

(1) *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,*

$$u_i.w = \alpha_i(u_i.u_i) = \alpha_i \|u_i\|^2 .$$

(2) *Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$. Une telle base de $\mathbb{R}^3$ s'appelle une* **base orthogonale** *de $\mathbb{R}^3$. Si de plus, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, $\|u_i\| = 1$, alors $\mathcal{B}$ est appelée* **base orthonormée** *de $\mathbb{R}^3$.*
(3) *Soit $v \in \mathbb{R}^3$. On note $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ses coordonnées (ou composantes) dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que*

$$\beta_i = \frac{v.u_i}{\|u_i\|^2}.$$

(4) *On pose désormais $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 2, 1)$.*
(*a*) *Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.*
(*b*) *En utilisant* (3)*, déterminer les coordonnées de vecteur $(1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.* (*c*) *Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.*
(*d*) *Représenter la base $\mathcal{B}$ et le vecteur v sur une figure.*
(*e*) *Donner une interprétation géométrique du vecteur*

$$\frac{v.u_i}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Solution. (1) Soient $i \in \{1, 2, 3\}$. On a

$$\begin{aligned} u_i.w &= u_i.(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) \\ &= \alpha_1(u_i.u_1) + \alpha_2(u_i.u_2) + \alpha_3(u_i.u_3). \end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ avec $j \neq i$, on a $u_i.u_j = 0$. Il s'ensuit

$$u_i.w = \alpha_i(u_i.u_i).$$

Soient $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ tels que $u_i = (x_i, y_i, z_i)$. On a tout de suite **(Exer)**

$$u_i.u_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \|u_i\|^2 .$$

(2) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

D'après (1), on a pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$u_i.(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}.u_i = 0 = \alpha_i \|u_i\|^2 .$$

Puisque pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $\|u_i\|^2 \neq 0$, l'égalité ci-dessus entraîne $\alpha_i = 0$ pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Puisque cette dernière contient exactement trois éléments, elle est une base de $\mathbb{R}^3$.
(3) Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Par définition, on a

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3.$$

Soit $i \in \{1,2,3\}$. On a

$$u_i.v = \beta_i \|u_i\|^2 .$$

Puisque $\|u_i\|^2 \neq 0$, il vient

$$\beta_i = \frac{u_i.v}{\|u_i\|^2}.$$

(4) (a) Le fait que (u_1, u_2, u_3) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.
(b) On trouve **(Exer)** $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\frac{2}{3}, -1, \frac{4}{3})$.
(c) On montre **(Exer)** les égalités

$$(1,0,0) = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_3,$$

$$(0,1,0) = -\frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3$$

et

$$(0,0,1) = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_3.$$

$(d) - (e)$ **(Exer)**. ■

Exercice 9 *Soit A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + 3z = 0\right\}.$$

(a) *Déterminer une base de A.*
(b) *Soit $u = (2,-5,3) \in \mathbb{R}^3$ et $B = \mathrm{Vect}\{u\} = \mathbb{R}u$. Montrer que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$,*

$$a.b = 0.$$

Solution. (a) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x,y,z) \in A \Leftrightarrow (x,y,z) = \frac{x}{3}(3,0,-2) + \frac{y}{3}(0,3,5).$$

La famille $\mathcal{B} = ((3,0,-2),(0,3,5))$ est donc génératrice de A. Elle est libre **(Exer)** dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de A.
(b) Soient $a \in A$, $b \in B$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a = \lambda_1(3,0,-2) + \lambda_2(0,3,5) \quad \text{et} \quad b = \lambda_3(2,-5,3).$$

Posons $e_1 = (3,0,-2)$ et $e_2 = (0,3,5)$. Il vient alors

$$a.b = \lambda_1\lambda_3(e_1.u) + \lambda_2\lambda_3(e_2.u) = 0,$$

car **(Exer)** $e_1.u = 0$ et $e_2.u = 0$. ■

Exercice 10 *Soient $n \geq 1$ un entier, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle orthogonal de E l'ensemble*

$$E^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in E,\ u.v = 0\},$$

où . désigne le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.
(a) *Montrer que $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Déterminer $E \cap E^\perp$.*
(b) *Dans cette question, $n = 2$ et*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de $E^\perp$.
(c) *Dans cette question, $n = 3$ et*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0,\ y - z = 0\right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de $E^\perp$.
(d) *Déterminer $E^\perp$ avec $E = \mathrm{Vect}\,\{(0, 1, 1), (1, 2, -1)\}$.*

Solution. (a) Observons que $0_{\mathbb{R}^n} \in E^\perp$ puisque pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in E$,

$$u.0_{\mathbb{R}^n} = (u_1, \ldots, u_n).(0, \ldots, 0) = 0.$$

Soient $a, b \in E^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in E$,

$$\begin{aligned}
(u_1, \ldots, u_n).(\lambda a + \mu b) &= (u_1, \ldots, u_n).[\lambda(a_1, \ldots, a_n) + \mu(b_1, \ldots, b_n)] \\
&= (u_1, \ldots, u_n).(\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \\
&= u_1(\lambda a_1 + \mu b_1) + \ldots + u_n(\lambda a_n + \mu b_n) \\
&= \lambda(u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n) + \mu(u_1 b_1 + \ldots + u_n b_n) \\
&= \lambda(u.a) + \mu(u.b). \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc, on a l'inclusion $\lambda a + \mu b \in E^\perp$. Ainsi, l'ensemble $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Puisque E et $E^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, nous savons que

$$0_{\mathbb{R}^n} \in E \cap E^\perp.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E \cap E^\perp$. Par définition d'orthogonal, on a

$$x.x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$

ce qui donne tout de suite $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Donc, on a $x = 0$ et

$$E \cap E^\perp = \{0\}.$$

(b) Observons tout d'abord **(Exer)** que $E = \mathbb{R}(1, -2)$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il est immédiat que

$$(\lambda(1, -2)).(\mu(2, 1)) = 0.$$

Ceci nous dit que $(2, 1) \in E^\perp$. En particulier, on a $E^\perp \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. D'autre part, remarquons que $(1, -2) \notin E^\perp$. Ainsi, en particulier, on a $E^\perp \neq \mathbb{R}^2$. Puisque $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, $E^\perp$ est alors nécessairement une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (i.e., un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$) qui contient $(2, 1)$. Finalement, on peut conclure quant à l'égalité

$$E^\perp = \mathbb{R}(2, 1).$$

(c) Constatons **(Exer)** que $E = \mathbb{R}(1, -2, -2)$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a **(Exer)**

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in E^\perp &\Leftrightarrow (x, y, z).(1, -2, -2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 2y - 2z = 0 \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(2, 0, 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $((2,1,0),(2,0,1))$ engendre $E^\perp$. De plus, on vérifie tout de suite que **(Exer)** cette famille est libre dans $\mathbb{R}^3$. Donc, $((2,1,0),(2,0,1))$ est une base de $E^\perp$. En particulier, $E^\perp$ est de dimension 2.
(d) On a **(Exer)** pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y,z).(0,1,1) = 0\\ (x,y,z).(1,2,-1) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y+z=0\\ x+2y-z=0,\end{cases}\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$E^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0,\ x+2y-z=0\right\}.$$

■

Le prochain exercice nécessitera les deux définitions suivantes :

Définition 2.2 *Soit E un ensemble. On dit que E est un* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** *(où $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe deux applications,*

$$\begin{aligned}+ : E \times E &\to E\\ (u,v) &\mapsto u+v\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cdot : E \times E &\to E\\ (\lambda,v) &\mapsto \lambda \cdot v\end{aligned}$$

vérifiant :
(i) pour tout $u,v \in E$, $u+v = v+u$;
(ii) pour tout $u,v,w \in E$, $(u+v)+w = u+(v+w)$;
(iii) il existe $0_E \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $v + 0_E = u$;
(iv) pour tout $v \in E$, il existe $-v \in E$ tel que $v + (-v) = 0_E$;
(v) pour tout $v \in E$, $1.v = v$;
(vi) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $v \in E$, $\lambda.(\mu.v) = (\lambda\mu).v$;
(vii) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $v \in E$, $(\lambda+\mu).v = \lambda.v + \mu.v$;
$(viii)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $u,v \in E$, $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs *et les éléments de $\mathbb{K}$ des* scalaires.

Exercice 11 *On note $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (ou parfois $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble*

$$\mathcal{A} = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax+b\right\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (et donc en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Pouvez-vous donner une base de $\mathcal{A}$ et sa dimension ?

Solution. Posons

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (f, g) &\mapsto f \oplus g \end{aligned}$$

où pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} f \oplus g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Posons également

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (\lambda, f) &\mapsto \lambda \odot f \end{aligned}$$

où pour tout $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \lambda \odot f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda \odot f)(x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

En définissant les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

on vérifie sans difficultés $(i) - (viii)$ **(Exer)** de la définition 2.2. Montrons que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Evidemment, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in \mathcal{A}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0 = 0.x + 0.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $h, k \in \mathcal{A}$. Il existe $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = px + q \quad \text{et} \quad k(x) = rx + s.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[(\lambda \odot h) \oplus (\mu \odot k)](x) = \lambda(px + q) + \mu(rx + s).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Posons enfin

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Soit $F \in \mathcal{A}$. Il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = cx + d.$$

Donc, on a

$$F = (c \odot \mathbf{I}) \oplus (d \odot \mathbf{1}_{\mathbb{R}}).$$

Ainsi, la famille $(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}, \mathbf{I})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}$. On vérifie qu'elle est également libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ **(Exer)**. Donc, elle est une base de $\mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est de dimension 2.

Remarque : en général, $\oplus$ et $\odot$ sont notées (par commodité) $+$ et $\cdot$. ■

Exercice 12 *On note $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 3\}$, on pose*

$$\begin{aligned} P_i : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)^i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_i : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^i. \end{aligned}$$

(a) Montrer que $E = (E_0, \ldots, E_3)$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
(b) Exprimer les vecteurs $P_0, \ldots, P_3$ dans la base E.
(c) Montrer que $P = (P_0, \ldots, P_3)$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
(d) Exprimer $E_0, \ldots, E_3$ dans la base P.

Solution. (a) Voir Exercice 13.
(b) On vérifie que **(Exer)**

$$P_0 = E_0,$$

$$P_1 = E_1 - 2E_0,$$

$$P_2 = E_2 - 4E_1 + 4E_0$$

et

$$P_3 = E_3 - 6E_2 + 12E_1 - 8E_0.$$

(c) Voir Exercice 13.
(d) On vérifie que **(Exer)**

$$E_0 = P_0,$$

$$E_1 = P_1 + 2P_0,$$

$$E_2 = P_2 + 4P_1 + 4P_0$$

et

$$E_3 = P_3 + 6P_2 + 12P_1 + 8P_0.$$

■

Exercice 13 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.*
(a) Montrer que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. En exhiber une base.
(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$\begin{aligned} P_{a,k} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-a)^k. \end{aligned}$$

Montrer que $(P_{a,0}, \ldots, P_{a,n})$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
(c) Soient $a \in \mathbb{R}$, $B = \{P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : P'(a) = 0\}$. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. En justifiant, donner une base de B.

Solution. (a) On vérifie que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ **(Exer)**, en particulier c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est trivialement génératrice de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ **(Exer)** où pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} P_k : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^k. \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

On a donc

$$(\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n)^{(n)} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

On en déduit $\lambda_n(n!) = 0$, donc $\lambda_n = 0$. En réitérant le procédé, on aboutit à $\lambda_n = \ldots = \lambda_0 = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n+1$.
(b) Grâce à (a), il suffit de montrer que $(P_{a,0}, \ldots, P_{a,n})$ est une famille libre. Une argumentation similaire à (a) permet de conclure **(Exer)**.
(c) Sans difficultés, B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ **(Exer)**. Soit $Q \in B$. Il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q = \lambda_0 P_{a,0} + \ldots + \lambda_n P_{a,n}.$$

On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \lambda_1 + \ldots + n\lambda_n (x-a)^{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Puisque $Q'(a) = 0$, on a $\lambda_1 = 0$. On en déduit

$$Q \in \operatorname{vect}\{P_{a,k} : k \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{1\}\}.$$

On a donc

$$B \subset \operatorname{vect}\{P_{a,k} : k \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{1\}\}.$$

On vérifie tout de suite **(Exer)** l'inclusion renversée ce qui nous donne

$$B = \operatorname{vect}\{P_{a,k} : k \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{1\}\}.$$

Le fait que $(P_{a,0}, \ldots, P_{a,n})$ soit une famille libre nous dit que $(P_{a,k})_{k \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{1\}}$ est également une famille libre. Donc, cette dernière famille est une base de B. ■

Exercice 14 *Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) engendré par :*
(a) $\cos$ *et* $\sin$ *?*
(b) $\cos$, $\sin$, $\cos(2\cdot)$ *et* $\sin(2\cdot)$ *?*
(c) $e^{\cdot}$ *et* $e^{2\cdot}$ *?*
(d) $e^{\cdot}$ *et* $e^{\cdot+2}$ *?*
(e) $\ln(\sqrt{\cdot^2+1})$ *et* $\ln(\cdot^2+1)$ *?*

Solution. (a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0.$$

En appliquant cette égalité avec 0 (resp., $\frac{\pi}{2}$) on obtient $\lambda_1 = 0$ (resp., $\lambda_2 = 0$). Donc, la famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ainsi, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{\cos, \sin\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension 2.
(b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin + \lambda_3 \cos(2\cdot) + \lambda_4 \sin(2\cdot) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(2x) = 0.$$

En appliquant cette égalité avec 0 et π, on obtient

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad \text{et} \quad -\lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Une nouvelle application de cette même égalité avec $\frac{\pi}{2}$ fournit

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0,$$

donc $\lambda_2 = 0$. On obtient donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_4 \sin(2x) = 0,$$

ce qui impose évidemment $\lambda_4 = 0$. Donc, $(\cos, \sin, \cos(2\cdot), \sin(2\cdot))$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ainsi, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{\cos, \sin, \cos(2\cdot), \sin(2\cdot)\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension 4.
(c) Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{2x}. \end{aligned}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} = 0.$$

On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_2 e^x + \lambda_1 = 0.$$

On a

$$\lim_{x \to -\infty} \lambda_2 e^x + \lambda_1 = \lambda_1 = 0,$$

d'où $\lambda_2 = 0$. Donc, (f, g) est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ainsi, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{f, g\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension 2.
(d) Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{x+2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{x+2} = e^2 e^x,$$

i.e., $g = e^2 f$. Donc, la famille (f, g) est liée dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Puisque $f \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{f, g\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension 1.
(e) Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1}). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1),$$

i.e., $g = \frac{1}{2} f$. Puisque $f \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{f, g\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension 1. ■

3 Exercices supplémentaires

Exercice 15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties de E. Montrer que*

$$\operatorname{vect}(A \cap B) \subset \operatorname{vect}(A) \cap \operatorname{vect}(B).$$

L'inclusion précédente est-elle une égalité ?

Exercice 16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
(a) Montrer que l'ensemble $\{f + g : (f, g) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E (appelé somme de F et G).
(b) Que dire de $F + F$? de λF pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$?
(c) Montrer que pour tout $A, B \subset E$, on a

$$\operatorname{vect}(A \cup B) = \operatorname{vect}(A) + \operatorname{vect}(B).$$