Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD7 - Dérivabilité

1 Exercices du T.D.

Exercice 1 *Etudier la continuité et la dérivabilité de f, où f est la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2. \end{aligned}$$

Solution. Tout de suite, observons que la fonction f est dérivable (donc continue) en chaque point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ **(Exer)**. Fixons $k \in \mathbb{Z}$. Commençons par établir que f est continue en k. D'une part, on a pour tout $x \in]k-1, k[$,

$$f(x) = k - 1 + (x - (k-1))^2,$$

d'où l'on tire

$$\lim_{x \to k, x < k} f(x) = k$$

et d'autre part, on a pour tout $x \in]k, k+1[$,

$$f(x) = k + (x - k)^2,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{x \to k, x > k} f(x) = k.$$

Ainsi, f est continue en k. En conséquence, f est continue sur $\mathbb{R}$. Maintenant, montrons que f est dérivable à gauche en k, à droite en k mais qu'elle n'est pas dérivable en k. Pour tout $x \in]k-1, k[$, on a

$$\frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \frac{-1 + (x - k + 1)^2}{x - k} = x - k + 2,$$

d'où l'égalité

$$f'_g(k) = \lim_{x \to k, x < k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = 2.$$

Pour tout $x \in]k, k+1[$, on a

$$\frac{f(x) - f(k)}{x - k} = x - k,$$

d'où l'on déduit

$$f'_d(k) = \lim_{x \to k, x > k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = 0.$$

Puisque $f'_g(k) \neq f'_d(k)$, f ne peut pas être dérivable en k. ■

Exercice 2 (a) *Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction*

$$f : [-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{1+2x} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}.$$

(b) *Même question avec la fonction*

$$f : [-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{1+2x} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}.$$

Solution. (a) Puisque

$$\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = 1,$$

la fonction f est continue en 0. La fonction f est évidemment **(Exer)** dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{0\}$. De plus, les égalités

$$\lim_{x \to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

nous disent que f est dérivable en 0.
(b) Puisque

$$\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = 1,$$

la fonction f est continue en 0. La fonction f est évidemment **(Exer)** dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{0\}$. On a toutefois

$$\lim_{x \to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \neq \lim_{x \to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

Ceci nous dit que f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais que f n'est pas dérivable en 0. ■

Exercice 3 *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Solution. Fixons un entier $n \geq 1$. Observons tout de suite que la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ **(Exer)**. Par application du théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln'(c_n)(n + 1 - n) = \ln'(c_n).$$

Or, on a $\ln'(c_n) = \frac{1}{c_n}$ et $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n})$. L'égalité ci-dessus nous donne alors

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{c_n}.$$

Puisque $c_n \in]n, n+1[$, on a

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} < \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on aboutit à

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

Rappelons que pour tout réel $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, on définit

$$a^b = e^{b\ln(a)}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, ce qui précède nous donne

$$\frac{k}{k+1} < k\ln(1+\frac{1}{k}) < 1.$$

Puisque $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, on a pour tout entier $k \geq 1$,

$$e^{\frac{k}{k+1}} < (1+\frac{1}{k})^k < e.$$

En exploitant le théorème d'encadrement, on conclut

$$\lim_{k\to+\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e.$$

■

Exercice 4 *Montrer que* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* 1*-lipschitzienne, i.e., montrer que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Solution. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$. Sans pertes de généralités **(Exer)**, on peut supposer que $x < y$. Puisque $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir l'existence de $c_{(x,y)} \in]x, y[$ tel que

$$\sin(y) - \sin(x) = (y - x)\sin'(c_{(x,y)}).$$

On en déduit

$$|\sin(y) - \sin(x)| = |y - x|\left|\sin'(c_{(x,y)})\right|.$$

En exploitant le fait que $\sin'(c_{(x,y)}) = \cos(c_{(x,y)})$ et que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\cos(u)| \leq 1$, il vient

$$|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y - x|.$$

Ceci montre que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. ■

Exercice 5 *Déterminer les limites :*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$, *où* $n \in \mathbb{N}^\star$.

Solution. (a) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x^2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2\ln(x)}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

(b) On a

$$x^3+5x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 5x^2$$

et

$$\cos(2x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -2x^2.$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = -\frac{2}{5}.$$

(c) Soit $n\geq 1$ un entier. Pour tout réel $x>0$, on a

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n.$$

Or, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = +\infty$$

ce qui combiné à l'égalité ci-dessus donne

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

■

Exercice 6 *Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, C une partie de X. On dit que C est convexe lorsque pour tout $t\in[0,1]$, pour tout $c_1,c_2\in C$, on a*

$$tc_1+(1-t)c_2\in C.$$

On suppose que C est un convexe non vide de X. Soit $f:C\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe lorsque son épigraphe

$$\operatorname{epi} f = \{(x,r)\in C\times\mathbb{R} : f(x)\leq r\}.$$

est un ensemble convexe de $X\times\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $t\in[0,1]$, pour tout $x,y\in C$,

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Solution. $\Rightarrow$, Supposons que f soit convexe. Fixons $t\in[0,1]$, $x,y\in C$. Evidemment **(Exer)**, on a

$$(x,f(x)),(y,f(y))\in\operatorname{epi} f.$$

Puisque f est convexe, l'ensemble $\operatorname{epi} f$ est convexe et donc

$$t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y))\in\operatorname{epi} f.$$

Par définition de l'épigraphe de f, il vient

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

qui est l'inégalité désirée.
$\Leftarrow$, Supposons que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x, y \in C$, on ait

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Fixons $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in \operatorname{epi} f$ et $\tau \in [0,1]$. On a

$$\tau(r_1, s_1) + (1-\tau)(r_2, s_2) = (\tau r_1 + (1-\tau)r_2, \tau s_1 + (1-\tau)s_2).$$

Puisque $r_1, r_2 \in C$, on peut exploiter l'inégalité ci-dessus pour obtenir

$$f(\tau r_1 + (1-\tau)r_2) \leq \tau f(r_1) + (1-\tau)f(r_2).$$

Le fait que $f(r_i) \leq s_i$ pour tout $i \in \{1,2\}$ nous donne alors

$$f(\tau r_1 + (1-\tau)r_2) \leq \tau s_1 + (1-\tau)s_2.$$

Donc, on a

$$\tau(r_1, s_1) + (1-\tau)(r_2, s_2) \in \operatorname{epi} f.$$

■

Exercice 7 (Lemme des trois pentes) *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout $r_1, r_2, r_3 \in I$ tels que $r_1 < r_2 < r_3$, on a*

$$\frac{h(r_2) - h(r_1)}{r_2 - r_1} \leq \frac{h(r_3) - h(r_1)}{r_3 - r_1} \leq \frac{h(r_3) - h(r_2)}{r_3 - r_2}.$$

Solution. Posons $t = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} \in]0,1[$. On vérifie tout de suite que

$$tr_1 + (1-t)r_3 = r_2.$$

Puisque h est convexe sur I, on a

$$h(r_2) \leq \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} h(r_1) + \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1} h(r_3). \tag{1.1}$$

On en déduit

$$h(r_2) - h(r_1) \leq \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}(h(r_3) - h(r_1)),$$

i.e.,

$$\frac{h(r_2) - h(r_1)}{r_2 - r_1} \leq \frac{h(r_3) - h(r_1)}{r_3 - r_1}.$$

On déduit également de (1.1)

$$h(r_2) - h(r_3) \leq \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}(h(r_1) - h(r_3)),$$

i.e.,

$$\frac{h(r_3) - h(r_2)}{r_3 - r_2} \geq \frac{h(r_3) - h(r_1)}{r_3 - r_1}.$$

■

Exercice 8 *En exploitant la convexité d'une fonction à expliciter, montrer que :*
(a) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$ *;*
(b) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$ *;*
(c) *pour tout* $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Solution. (a) La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est évidemment une fonction convexe **(Exer)**. On a alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq \exp(y) + \exp'(y)(x - y).$$

En particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \exp(x) \geq \exp(0) + \exp'(0)(x - 0) = 1 + x.$$

(b) Notons f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x}. \end{aligned}$$

La fonction f est convexe puisque f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et que **(Exer)**

$$f''(x) = e^{-x} > 0.$$

On a de plus pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

En particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x} \geq 1 - x.$$

(c) La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\ln(x). \end{aligned}$$

est une fonction convexe puisqu'elle est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in]0, +\infty[$ **(Exer)**,

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

On a donc pour tout $x, y \in]0, +\infty[$,

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

En particulier, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

Ceci nous donne alors pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(x + 1) \leq x.$$

■

Exercice 9 *Etudier la convexité des fonctions suivantes :*
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 - \ln(1 + x^2)$ *;*
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ *;*
(c) $n \geq 1$ *un entier fixé,*

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{x}{n} + 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Solution. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ **(Exer)**,

$$f'(x) = \frac{2x^3}{1 + x^2}.$$

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ **(Exer)**,

$$f''(x) = \frac{2x^4 + 6x^2}{(1 + x^2)^2} \geq 0.$$

Donc, f est convexe.
(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ **(Exer)**,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ **(Exer)**,

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Donc, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f est convexe sur $]-\infty, 0]$.
(c) Evidemment, f est convexe sur $]\frac{1}{n}, +\infty[$ et sur $[0, \frac{1}{n}]$ **(Exer)**. Remarquons que $(2, 0) \in \mathrm{epi}\, f$ et $(0, 1) \in \mathrm{epi}\, f$. Posons

$$S = [(2, 0), (0, 1)] = \{t(2, 0) + (1 - t)(0, 1) : t \in [0, 1]\}.$$

Fixons $t_0 \in]0, \frac{1}{2n}[$. On a

$$(2t_0, 1 - t_0) \notin \mathrm{epi}\, f,$$

ce qui nous dit que $\mathrm{epi}\, f$ n'est pas convexe, i.e., f n'est pas convexe (sur $[0, +\infty[$).
■

Exercice 10 *Montrer que la fonction*

$$\begin{aligned} f : [0, \frac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\sin(x) \end{aligned}$$

est convexe. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x.$$

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ **(Exer)** et satisfait pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **(Exer)**,

$$f''(x) = \sin(x) \geq 0.$$

Ainsi, f est une fonction convexe. D'après le cours, pour tout $x, y \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$-\sin(x) \geq -\sin(y) - \cos(y)(x - y).$$

De ceci, on tire $\sin(x) \leq \sin(0) + \cos(0)(x - 0)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) < 1$, on a pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) \leq x.$$

Par concavité de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\left\{(x, -\frac{\pi}{2}x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\right\} \subset \text{epi } f.$$

On a donc pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f(x) \leq -\frac{\pi}{2}x,$$

i.e., pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\pi}{2}x \leq \sin(x).$$

■

Exercice 11 *Montrer que la fonction*

$$\begin{aligned} f :]1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\ln(\ln(x)) \end{aligned}$$

est convexe sur $]1, +\infty[$. *En déduire que pour tout* $a, b \in]1, +\infty[$,

$$\ln(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Solution. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ **(Exer)**. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{x\ln(x)}.$$

Donc, f est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ **(Exer)** et vérifie pour tout $x \in]1, +\infty[$ **(Exer)**,

$$f''(x) = \frac{1 + \ln(x)}{(x\ln(x))^2} \geq 0.$$

Ceci nous dit que f est convexe. Fixons $a, b \in]1, +\infty[$. Le fait que f soit convexe nous donne

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Ceci s'écrit encore

$$\ln(\ln(\frac{a+b}{2})) \geq \frac{\ln(\ln(a))}{2} + \frac{\ln(\ln(b))}{2} = \ln(\sqrt{\ln(a)}) + \ln(\sqrt{\ln(b)}).$$

Par croissance de la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il vient

$$\ln(\frac{a+b}{2}) \geq \exp[\ln(\sqrt{\ln(a)}) + \ln(\sqrt{\ln(b)})] = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

■

Exercice 12 *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a*

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \mathrm{Arctan}(x) \leq x$$

et

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Solution. La fonction $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et **(Exer)**

$$\mathrm{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Donc, $-\mathrm{Arctan}$ est convexe sur $[0, +\infty[$. La convexité de $-\mathrm{Arctan}$ sur $[0, +\infty[$ nous dit alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$-\mathrm{Arctan}(x) \geq -\mathrm{Arctan}'(0)(x-0) + -\mathrm{Arctan}(0) = -x,$$

i.e., pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\mathrm{Arctan}(x) \leq x.$$

Fixons un réel $x_0 > 0$. Soit $y \in]0, x_0[$. D'après le Lemme des trois pentes, on a

$$\frac{-\mathrm{Arctan}(x_0) + \mathrm{Arctan}(y)}{x_0 - y} \geq \frac{-\mathrm{Arctan}(x_0) + \mathrm{Arctan}(0)}{x_0 - 0}.$$

Par passage à la limite, il vient

$$-\mathrm{Arctan}'(x_0) \geq -\frac{\mathrm{Arctan}(x_0)}{x_0}.$$

Ceci nous dit alors que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \mathrm{Arctan}(x).$$

Notons f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ **(Exer)** et pour tout $x \in]0, +\infty[$ **(Exer)**, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Evidemment **(Exer)**, $f' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $-f$ est convexe sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$-f(x) \geq -f'(0)(x-0) - f(0) = -x,$$

i.e., pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$. Fixons un réel $x_0 > 0$. Soit $y \in]0, x_0[$. D'après le Lemme des trois pentes, on a

$$\frac{-f(x_0) + f(y)}{x_0 - y} \geq \frac{-f(x_0) + f(0)}{x_0 - 0}.$$

Il vient alors

$$-f'(x_0) \geq -\frac{f(x_0)}{x_0}.$$

On en déduit pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

■

Exercice 13 *Etudier la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Solution. Tout de suite, constatons que f est bien définie puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + x + 1 > 0.$$

L'inégalité ci-dessus nous dit également que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2f(x)}$$

et

$$f''(x) = \frac{4f(x) - 2f'(x)(2x+1)}{4(f(x))^2}.$$

En particulier, f est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$. De plus, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4f(x) - 2f'(x)(2x+1) = \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq 0,$$

d'où l'on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f est convexe sur $\mathbb{R}$. Remarquons également que l'ensemble (le graphe de f)

$$\operatorname{gph} f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

admet la droite

$$\left\{(-\frac{1}{2}, y) : y \in \mathbb{R}\right\}$$

comme axe de symétrie puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x - \frac{1}{2}) = f(-x - \frac{1}{2}).$$

Par symétrie, on se contente de chercher une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$. D'après le cours, il existe V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x).$$

Soit $x_0 > 0$ un réel. On a

$$f(\frac{1}{x_0}) = (1 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x_0} f(x_0).$$

Soit $A > 0$ un réel tel que pour tout réel $x > A$, on ait $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} \in V$. On a pour tout $x > A$,

$$f(\frac{1}{x}) = 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\varepsilon(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}).$$

On en déduit pour tout réel $x > A$,

$$f(x) = x + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x}) + (1 + \frac{1}{x})\varepsilon(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}).$$

Ainsi, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + \frac{1}{2}) = 0.$$

En conséquence, la droite

$$\left\{(x, x + \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{R}\right\}$$

est asymptote oblique à gph f en $+\infty$. ■

Exercice 14 *Etudier la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Solution. La fonction f est évidemment **(Exer)** deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a **(Exer)**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

et

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. La fonction f est donc convexe sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$. La fonction f est concave sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Il y a deux points d'inflexion en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

2 Exercices supplémentaires

Exercice 15 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\frac{3}{2}} \left|\ln |x - y|\right|.$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 17 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose qu'il existe $a, b \in]0, +\infty[$ avec $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*