Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD6 - Continuité

1 Exercices du T.D.

Exercice 1 *Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Trouver (si c'est possible) un réel $\eta > 0$ tel que l'on ait pour tout $x \in]0, \eta[$, $|f(x)| < \frac{1}{10^2}$ (resp., $|f(x)| < \varepsilon$) avec $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour chaque réel $x > 0$ par :*
(a) $f(x) = 10$;
(b) $f(x) = \sqrt{x}$;
(c) $f(x) = x\sin(x)$.

Solution. (a) Puisque pour tout réel $x > 0$, $f(x) > \frac{1}{10^2}$, on ne peut pas trouver de réel $\eta > 0$ satisfaisant la propriété demandée.
(b) Posons $\eta = \frac{1}{10^4}$. Pour tout $x \in]0, \eta[$, on a

$$\left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x} < \sqrt{10^{-4}} = 10^{-2}.$$

(c) Posons $\eta = \frac{1}{10^2}$. Pour tout $x \in]0, \eta[$, on a

$$|x\sin(x)| \leq |x| = x < \eta = \frac{1}{10^2}.$$

(a') Si $\varepsilon \geq 10$, n'importe quel réel $\eta > 0$ convient. Si $\varepsilon < 10$, aucun réel $\eta > 0$ ne peut convenir.
(b') Posons $\eta = \varepsilon^2$. Pour tout $x \in]0, \eta[$, on a

$$\left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

(c') Posons $\eta = \varepsilon$. Pour tout $x \in]0, \eta[$, on a

$$|x\sin(x)| \leq |x| = x < \varepsilon.$$

■

Exercice 2 *Montrer que :*
(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$;
(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{1}{2}$;
(c) $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$.

Solution. (a) Fixons $A > 0$ un réel. Posons $B = A^{\frac{1}{4}}$. Pour tout réel $x \geq B$, on a

$$x^4 \geq B^4 = A.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.
(b) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Posons $A = \max\{0, \frac{1}{4}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)\}$. Observons que pour tout réel $x > A$, on a

$$\left|\frac{2x+1}{4x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{4x+1} \leq \varepsilon.$$

Il vient alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{1}{2}$.
(c) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon$. Pour tout $x \in]1-\eta, 1+\eta[$, on a

$$|1 + x - 2| = |x - 1| < \eta = \varepsilon.$$

Donc, on a $\lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$. ■

Exercice 3 *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$. On suppose également qu'il existe un sous-intervalle J de I contenant x_0 tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J \setminus \{x_0\}$.*
(a) Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

(b) Que se passe t-il lorsque $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$?

Solution. (a) Pour tout $x \in J \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}.$$

Il vient

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x_0) \frac{1}{g'(x_0)}.$$

(b) Posons $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3.$$

On a $f'(0) = g'(0) = 0$ et

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0, x>0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

■

Exercice 4 *Déterminer les limites suivantes :*
(a) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-27}{x-3}$;
(b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
(c) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$;
(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

Solution. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = x^2 + 3x + 9.$$

Il vient

$$\lim_{x\to3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

On en déduit
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=2.$$
(c) Pour tout $x\in]1,3[\setminus\{2\}$, on a
$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}.$$
On en déduit
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{3}{2}.$$
(d) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a
$$(1+\frac{1}{x})^x=\exp(x\ln(1+\frac{1}{x})).$$
Or, on a
$$\ln(1+\frac{1}{x})\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}.$$
On en déduit
$$x\ln(1+\frac{1}{x})\underset{x\to+\infty}{\sim}1.$$
En remarquant que
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})-1=0$$
on peut écrire
$$\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))\underset{x\to+\infty}{\sim}\exp(1)=e.$$
Ainsi, on a
$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))=e.$$
■

Exercice 5 *A t-on les équivalents suivants ?*
(a) $x+25\underset{x\to 0}{\sim}x-x^5$;
(b) $x^2+2x\underset{x\to+\infty}{\sim}2x$;
(c) $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$;
(d) $\sin(\frac{1}{x})\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

Solution. (a) Non **(Exer)**.
(b) Non **(Exer)**.
(c) Oui **(Exer)**.
(d) Oui **(Exer)**. ■

Exercice 6 1) *Trouver une partie A de $\mathbb{R}$, $f,g:A\to\mathbb{R}$ deux fonctions, $a\in\mathbb{R}$ telles que :*
(a) $f\underset{a}{\sim}g$ *et* $\lim\limits_{a}f-g\neq 0$;
(b) $f\underset{a}{\sim}g$ *et* $e^f\underset{a}{\not\sim}e^g$.
2) *Trouver deux fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f\underset{+\infty}{\sim}g$ et* $\lim\limits_{+\infty}(f-g)=+\infty$.

Solution. 1) Posons $A =]0, +\infty[$, $a = 0$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in A$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

(a) On a $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_a f - g \neq 0$.
(b) On a $f \underset{a}{\sim} g$ et $e^f \underset{a}{\not\sim} e^g$.
2) Considérons les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2.$$

On a évidemment $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et $\lim\limits_{+\infty}(f - g) = +\infty$. ■

Exercice 7 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, V un voisinage de x_0 et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction.*
(a) *Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x_0} f = l$, alors $\lim\limits_{x_0} |f| = |l|$.*
(b) *Montrer que si $\lim\limits_{x_0} |f| = 0$, alors $\lim\limits_{x_0} f = 0$.*
(c) *Que peut-on dire lorsque $\lim\limits_{x_0} |f| \neq 0$?*

Solution. (a) Supposons que $\lim\limits_{x_0} f = l$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$,

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a

$$||f(x)| - |l|| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x_0} |f| = |l|$.
(b) Supposons $\lim\limits_{x_0} |f| = 0$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$,

$$|f(x)| = ||f(x)| - 0| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x_0} f = 0$.
(c) On ne peut rien conclure en général quant à la limite (éventuelle) de f en x_0. Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On a tout de suite $\lim\limits_0 |f| = 1$ mais f n'a pas de limite en 0. ■

Exercice 8 *La fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution. Remarquons que pour tout $x > 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

et que pour tout $x < 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -(x + 1).$$

On en déduit

$$\lim_{x \to 1, x > 1} f(x) = 2$$

et

$$\lim_{x \to 1, x < 1} f(x) = -2.$$

Donc, f n'est pas continue en 1, a fortiori f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 9 *Prolonger par continuité (quand c'est possible !) les fonctions ci-dessous :*
(a)

$$\begin{aligned} f :]0, \frac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f : [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{2\cos(x)} - 1}{2\cos(2x) + 1}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{ax + 2}{x - 1}. \end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Solution. (a) On a

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = 2\sqrt{2}\frac{x}{|x|}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0, x < 0} f(x) = -2\sqrt{2}.$$

On ne peut donc pas prolonger f par continuité en 0.
(b) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$, on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\cos(x)} - 1}{4\sqrt{\cos(x)}^4 - 1}.$$

Posons

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \frac{\sqrt{2}u - 1}{4u^4 - 1}.$$

On a

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\lim_{u \to \frac{1}{\sqrt{2}}} g(u) = \frac{1}{4}.$$

On en déduit

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant

$$\hat{f} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

(c) On a

$$\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 1} ax + 2 = 2 + a.$$

Si $a \neq -2$, il vient

$$\lim_{x \to 1} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

et dans ce cas, on ne peut pas prolonger par continuité f en 0. Si $a = -2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$f(x) = \frac{-2x + 2}{x - 1} = -2$$

et dans ce cas on peut prolonger f par continuité en 0 en la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante de valeur -2. ■

Exercice 10 *Etudier la continuité de la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x \lfloor x \rfloor$$

où $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *désigne la fonction partie entière.*

Solution. La fonction f est évidemment continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ **(Exer)**. Fixons $a \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in]a-1, a[$, on a

$$f(x) = x \lfloor x \rfloor = (a - 1)x$$

et pour tout $x \in]a, a+1[$, on a

$$f(x) = x \lfloor x \rfloor = ax.$$

On en déduit

$$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = a^2$$

et

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = a(a-1).$$

Or, on remarque que

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x(x-1)\right\} = \{0\}.$$

Donc, f est en continue sur $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ et f n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. ■

Exercice 11 *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$e^{x_0} + x_0 = 0.$$

Un tel réel x_0 est-il unique ?

Solution. Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x + x. \end{aligned}$$

qui est évidemment **(Exer)** une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, il existe $a < 0$ tel que $f(a) < 0$. Remarquons d'autre part que $f(0) = 1$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, 0]$ tel que $f(x_0) = 0$. Le fait que f soit continue et strictement croissante entraîne sa bijectivité **(Exer)**, i.e., pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Ceci nous assure donc de l'égalité

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \{x_0\}.$$

■

Exercice 12 *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients réels.*
(a) Montrer que si P est de degré impair, elle admet au moins une racine réelle.
(b) Montrer que si P est de degré pair et à coefficient dominant positif, alors P est minorée sur $\mathbb{R}$.

Solution. Supposons que P ne soit pas nulle (sinon il n'y a rien à démontrer). Il existe $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ avec $a_m \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

(a) Supposons que P soit de degré impair, i.e., m est impair. Posons

$$\operatorname{sgn}(a_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_m > 0 \\ -1 & \text{si } a_m < 0. \end{cases}$$

Observons que

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_m x^m = \mathrm{sgn(a_m)}(+\infty)$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_m x^m = \mathrm{sgn}(a_m)(-\infty).$$

En particulier, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < x_2$ tels que $P(x_1)P(x_2) \leq 0$. Puisque P est continue sur $[x_1, x_2]$ **(Exer)**, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir $a \in [x_1, x_2]$ tel que $P(a) = 0$.
(b) Supposons que P soit de degré pair et que $a_m > 0$. On a

$$P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_m x^m,$$

donc il existe un réel $A > 0$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in]A, +\infty[$. En combinant le fait que m soit pair avec l'équivalent

$$P(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_m x^m,$$

on obtient un réel $B < 0$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty, B[$. Or, la fonction P est continue sur $[A, B]$, donc elle est en particulier minorée sur $[A, B]$ par un réel m. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) \geq \min\{m, 0\}.$$

Donc, la fonction P est minorée sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 13 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$.*
(a) *Montrer qu'il existe un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.*
(b) *Le résultat de (a) subsiste t-il lorsque f n'est pas supposée continue sur $[a, b]$?*
(c) *Montrer qu'il existe un unique réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(x) = x$.*

Solution. (a) Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : [a, b] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) - x.\end{aligned}$$

Observons que $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$. Si $\varphi(a) = 0$ ou $\varphi(b) = 0$, alors c'est terminé. Supposons donc $\varphi(a) > 0$ et $\varphi(b) < 0$. Trivialement **(Exer)**, la fonction φ est continue sur $[a, b]$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = 0$. On a alors $f(c) = c$.
(b) La fonction

$$\begin{aligned}g : [0, 1] &\to [0, 1]\\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

n'admet pas de point fixes dans $[0, 1]$ **(Exer)**. Nous déduisons de (a) que g ne peut pas être continue sur $[0, 1]$. Donc, le résultat n'a pas lieu sans l'hypothèse de

continuité.
(c) Il est aisé de constater que **(Exer)** la fonction

$$\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x) - x.$$

est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ainsi, $\varphi([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$. ■

Exercice 14 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) : *L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout réel, il existe une suite croissante et une suite décroissante de rationnels (i.e., d'éléments de $\mathbb{Q}$) qui converge vers ce réel. En particulier, ceci nous dit que chaque ouvert de $\mathbb{R}$ non vide contient au moins un rationnel (on dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Fixons un réel $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n},$$

où $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction partie entière. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (appelées respectivement développement décimal par défaut et par excès de x) sont adjacentes et qu'elles convergent vers x.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$p_n = \lfloor 10^n x \rfloor .$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10 p_n \leq 10^{n+1} x < 10 p_n + 10.$$

De ceci, on tire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10 p_n \leq p_{n+1}$$

et

$$1 + p_{n+1} < 10 p_n + 10.$$

En conséquence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1}$$

et

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = 10^{-n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En exploitant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq x \leq v_n,$$

on aboutit à

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

■

Une application de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée dans l'exercice suivant.

Exercice 15 *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$.*

Solution. (a) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) = g(u_n).$$

Puisque f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, il vient

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(x).$$

On a donc $f = g$. ■

Exercice 16 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.*
(a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.*
(b) *Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1).$$

(c) *En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.*

Solution. (a) Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = nf(1).$$

On a $f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc

$$f(0) = 0 = 0f(1).$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(k) = kf(1)$. On a

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = kf(1) + f(1) = (k+1)f(1).$$

Ceci termine la récurrence.
(b) Par récurrence, on montre que **(Exer)** pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n).$$

On en déduit pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(1) = nf(\frac{1}{n}).$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$$

Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(0) = 0 = f(x) + f(-x),$$

d'où l'on déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-f(x) = f(-x).$$

Il vient alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$$

(c) Posons $a = f(1)$. On a montré que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$. Il reste à appliquer l'Exercice 15 pour obtenir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. ■

2 Exercices supplémentaires

Exercice 17 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f n'a pas de points fixes (i.e., pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq x$). Montrer que $f \circ f$ n'a pas de points fixes (i.e., pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) \neq x$).*

Exercice 18 (Un exercice de classe de 2nd) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 3$ et*

$$f(x+1) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice 19 *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que*

$$f(\frac{x+y}{3}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$