Florent Nacry

Mathématiques 2 (F.S.T. de Limoges, Année 2017)
TD1 - Nombres complexes

1 Exercices du cours

Exercice 1 *Montrer que :*
(a) *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$;
(b) *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
(c) *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;
(d) *pour tout* $z_1 \in \mathbb{C}$, *pour tout* $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Solution. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Par définition de conjugué d'un nombre complexe, on a

$$\overline{z} = a + i(-b) = a - ib.$$

Une nouvelle application de cette même définition nous dit que

$$\overline{(\overline{z})} = a + i(-(-b)) = a + ib = z.$$

(b) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2 + ib_2.$$

Puisque $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, il vient

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2). \tag{1.1}$$

Or, on a

$$\overline{z_1} = a_1 - ib_1 \quad \text{et} \quad \overline{z_2} = a_2 - ib_2,$$

ce qui entraîne tout de suite

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2). \tag{1.2}$$

Il reste à combiner (1.1) et (1.2) pour aboutir à l'égalité souhaitée.
(c) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2 + ib_2.$$

Puisque $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$, on a

$$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{1.3}$$

Or, on a

$$\overline{z_1} = a_1 - ib_1 \quad \text{et} \quad \overline{z_2} = a_2 - ib_2,$$

d'où l'on tire

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{1.4}$$

En combinant (1.3) et (1.4), on obtient l'égalité désirée.
(d) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. On vérifie **(Exer)** que

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

En appliquant (c), il vient

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x^2+y^2}(x-iy)\right)} = \frac{1}{x^2+y^2}(x+iy).$$

Soient $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En combinant ce que nous venons de démontrer avec (c), on obtient

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\,\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\,\frac{1}{\overline{z_2}}.$$

■

Exercice 2 *Montrer que :*
(a) *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ *;*
(b) *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *;*
(c) *pour tout* $z_1 \in \mathbb{C}$, *pour tout* $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
(d) *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.

Solution. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. On a tout de suite

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 .$$

(b) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2 + ib_2.$$

On a d'une part

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{et} \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

ce qui donne

$$|z_1|\,|z_2| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} = \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}. \tag{1.5}$$

D'autre part, on a

$$z_1 z_2 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

ce qui permet d'écrire

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2}. \tag{1.6}$$

Observons que **(Exer)**

$$\begin{aligned}(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2 &= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 \\ &= (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2).\end{aligned}$$

En combinant l'égalité précédente, (1.5) et (1.6), on aboutit au résultat désiré.
(c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En exploitant (b), (a) et l'égalité évidente **(Exer)** $|z| = |\overline{z}|$, il vient

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z\overline{z}}\overline{z}\right| = \left|\frac{1}{z\overline{z}}\right| |\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}\,|z| = \frac{1}{|z|}.$$

Soient $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En combinant ce que nous venons d'établir avec (b), on aboutit à

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(d) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$|z^n| = |z|^n$". Montrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a (car $z \neq 0$)

$$\left|z^0\right| = 1 = |z|^0 .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Par hypothèse, nous avons

$$\left|z^k\right| = |z|^k .$$

Via (b) et l'égalité précédente, on peut écrire

$$|z|^{k+1} = |z|^k |z| = \left|z^k\right| |z| = \left|z^{k+1}\right| .$$

On a donc montré $\mathcal{P}(k+1)$. Ceci termine la récurrence. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n .$$

Soit $l \leq 0$ un entier. On a $-l \in \mathbb{N}$ et on peut donc appliquer ce que nous venons d'établir (avec le nombre complexe z^{-1}) ainsi que (c) pour obtenir

$$\left|z^l\right| = \left|(z^{-1})^{-l}\right| = \left|z^{-1}\right|^{-l} = \left(\left|\frac{1}{z}\right|\right)^{-l} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{-l} = |z|^l .$$

■

Le prochain exercice nécessitera les deux définitions suivantes :

Définition 1.1 *Soit E un ensemble. On dit que E est un* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** *(où $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe deux applications,*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : E \times E &\to E \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

vérifiant :
(i) pour tout $u, v \in E$, $u + v = v + u$;
(ii) pour tout $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$;
(iii) il existe $0_E \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $v + 0_E = u$;
(iv) pour tout $v \in E$, il existe $-v \in E$ tel que $v + (-v) = 0_E$;
(v) pour tout $v \in E$, $1.v = v$;
(vi) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $v \in E$, $\lambda.(\mu.v) = (\lambda\mu).v$;
(vii) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $v \in E$, $(\lambda + \mu).v = \lambda.v + \mu.v$;
$(viii)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $u, v \in E$, $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs *et les éléments de $\mathbb{K}$ des* scalaires.

Définition 1.2 *Soient $m \geq 1$ un entier, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $e_1, \ldots, e_m \in E$. On dit que $(e_1, \ldots, e_m)$ est une* **famille génératrice de E sur $\mathbb{K}$** *lorsque pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i .$$

Exercice 3 *Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $(1,i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.*

Solution. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$. On vérifie tout de suite **(Exer)** les propriétés $(i) - (viii)$ de la Définition 1.1 pour l'addition usuelle sur $\mathbb{C}$, i.e.,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, z') &\mapsto z + z' \end{aligned}$$

et le produit externe (à gauche de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$) induit par la multiplication usuelle sur $\mathbb{C}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (\lambda, z) &\mapsto \lambda \cdot z, \end{aligned}$$

donc $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous savons qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Or, ceci s'écrit encore

$$z = x.1 + y.i,$$

donc $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. ■

Exercice 4 *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$. Montrer que si δ est une racine carrée de Δ, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

En déduire que

$$\{z \in \mathbb{C} : az^2 + bz + c = 0\} = \left\{\frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b-\delta}{2a}\right\}.$$

Solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a **(Exer)**

$$az^2 + bz + c = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Puisque $\Delta = b^2 - 4ac$, l'égalité ci-dessus s'écrit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Par définition, on a $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a})(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a})\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b-\delta}{2a}\right\}$$

ou autrement dit

$$\{z \in \mathbb{C} : az^2 + bz + c = 0\} = \left\{\frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b-\delta}{2a}\right\}.$$

■

2 Exercices du T.D.

Exercice 5 *Soit* $\theta \in]-\pi, \pi[$. *On pose* $z = e^{i\theta}$. *Déterminer un argument de* $1+z$. *Justifier que* $z \neq -1$ *et déterminer un argument de* $\frac{1}{1+z}$.

Solution. Commençons par déterminer un argument de $1+z$. On a les égalités **(Exer)**

$$1+z = 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}).$$

Puisque $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ce qui donne

$$\cos(\frac{\theta}{2}) > 0.$$

Ainsi, il vient

$$|1+z| = 2\cos(\frac{\theta}{2}).$$

On a donc

$$1+z = |1+z|\, e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

En conséquence, $\frac{\theta}{2}$ est un argument de $1+z$ (c'est en fait l'argument principal de $1+z$). Notons que l'inégalité $|1+z| > 0$ nous dit tout de suite que $1+z \neq 0$, i.e., $z \neq -1$. Poursuivons en déterminant un argument de $\frac{1}{1+z}$. Posons $Z = \frac{1}{1+z}$ et observons que

$$\frac{Z}{|Z|} = \frac{|1+z|}{1+z} = \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Ceci nous dit en particulier que $-\frac{\theta}{2}$ est un argument de $Z = \frac{1}{1+z}$ (c'est même l'argument principal de Z). ■

Exercice 6 *Calculer les racines carrées de* $5+12i$ *et de* $-7-24i$.

Solution. Calculons les racines carrées de $5+12i$, i.e., cherchons à déterminer l'ensemble

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = 5+12i\}.$$

Soit $Z \in A$. Par définition de A, on a $Z^2 = 5+12i$. Puisque $Z \in \mathbb{C}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = a+ib$. On a alors

$$Z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 5+12i.$$

Ceci nous donne

$$a^2 - b^2 = 5 \quad \text{et} \quad 2ab = 12.$$

D'autre part, puisque $|5+12i| = \left|Z^2\right| = |Z|^2$, on a

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Remarquons alors que $a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 18$, i.e.,

$$a^2 = 9.$$

Ainsi, on obtient $b^2 = 13 - 9 = 4$. En conséquence, on a les inclusions

$$a \in \{-3, 3\} \quad \text{et} \quad b \in \{-2, 2\}.$$

Constatons maintenant que l'égalité $2ab = 12$ dit en particulier que a et b sont deux réels du même signe, ce qui donne $(a,b) \in \{(-3,-2),(3,2)\}$ ou encore

$$Z \in \{-3-2i, 3+2i\}.$$

On vient donc de montrer l'inclusion

$$A \subset \{-3-2i, 3+2i\}.$$

Or, puisque $5+12i \neq 0$, il admet deux racines carrées distinctes. Donc, A (qui est l'ensemble des racines carrées de $5+12i$) est un ensemble constitué de deux éléments. L'inclusion ci-dessus est alors une égalité, i.e.,

$$A = \{-3-2i, 3+2i\}.$$

Ainsi, les racines carrées de $5+12i$ sont $3+2i$ et $-3-2i$.
De même **(Exer)**, on montre que les racines carrées de $-7-24i$ sont $3-4i$ et $-3+4i$. ∎

Exercice 7 *Mettre $1+i$ sous forme trigonométrique. Donner l'ensemble de ses racines cubiques et les représenter graphiquement.*

Solution. Posons $A = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1+i\}$ l'ensemble des racines cubiques de $1+i$. On vérifie que **(Exer)**

$$1+i = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\big) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Soit $z_0 \in A$. Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z_0 = |z_0|\, e^{i\theta}$. On a alors **(Exer)**

$$z_0 \in A \Leftrightarrow \begin{cases} |z_0| = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} \\ \exists k \in \{0,1,2\}, \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi. \end{cases}$$

Il reste à observer que cette équivalence donne l'égalité

$$A = \left\{ \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi)} : k \in \{0,1,2\} \right\}.$$

La représentation graphique est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. ∎

Exercice 8 *Montrer qu'il n'y a qu'une seule racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive. On note j cette unique racine cubique de 1. Montrer que :*
(a) $\overline{j} = j^2$ *;*
(b) $1 + j + j^2 = 0$ *;*
(c) $|1+j| = 1$.
Soient $n \geq 1$ un entier, $z \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de l'unité.
(d) On suppose que $z \neq 1$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.
(e) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ *lorsque* $z = 1$.

Solution. Notons $\mathbb{U}_3$ l'ensemble des racines cubiques de l'unité, i.e.,

$$\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{3}} : k \in \{0,1,2\} \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}.$$

Puisque $\mathrm{Im}(1) = 0$, $\mathrm{Im}(e^{\frac{4i\pi}{3}}) = \sin(\frac{4\pi}{3}) < 0$ et $\mathrm{Im}(e^{\frac{4i\pi}{3}}) > 0$, il n'y a qu'une seule racine cubique de 1 de partie imaginaire strictement positive notée j et

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

(a) Il suffit d'observer que

$$\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}+2i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.$$

(b) D'après (a),

$$j + j^2 = j + \overline{j}.$$

Puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$ **(Exer)**, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, on peut écrire

$$j + j^2 = 2\,\mathrm{Re}(j) = 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = -1.$$

En conséquence, on a $1 + j + j^2 = 0$.
(c) En appliquant (b), on obtient

$$1 + j = -j^2.$$

Donc, on a

$$|1+j| = \left|-j^2\right| = |j|^2.$$

Le fait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, nous dit en particulier que

$$|j| = 1.$$

On aboutit alors à $|1+j| = 1$.
(d) Remarquons que la suite $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est une suite géométrique de raison z et de premier terme $z^0 = 1$ (z^0 est bien défini puisque $z \neq 0$ car z est une racine n-ième de l'unité). On a alors (car $z \neq 1$ et $z^n = 1$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = 0.$$

(e) Puisque $z = 1$, on a pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$z^k = 1.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = n.$$

■

Exercice 9 *Soit* $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
(a) *Calculer* z^2 *et* z^4.
(b) *Donner le module et un argument de* z.
(c) *Déduire de* (c) *les valeurs de* $\cos(\frac{\pi}{8})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{8})$.
(d) *Retrouver les valeurs de* $\cos(\frac{\pi}{8})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{8})$ *en utilisant des formules de trigonométrie connues.*

Solution. (a) On vérifie que **(Exer)**

$$z^2 = 2-\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})-2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}-2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i),$$

ce qui donne tout de suite $z^4 = 8(1+i)^2 = 16i$.
(b) Pour obtenir le module de z, il suffit d'exploiter (a) en écrivant

$$|z|^4 = \left|z^4\right| = 16,$$

d'où l'on tire $|z| = 2$. Cherchons à obtenir un argument de z (puisque $z \neq 0$, z a bien un argument). Notons $\theta \in]-\pi,\pi]$ l'argument principal de z. On a (par définition d'un argument)

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Il s'ensuit

$$z^4 = |z|^4\, e^{4i\theta},$$

i.e., $i = e^{4i\theta}$. Ainsi, il existe **(Exer)** $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$4\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi,$$

ce qui s'écrit également

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.$$

Notons que les inégalités **(Exer)** $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) < 0$ combinées à l'inclusion $\theta \in]-\pi,\pi]$ entraînent tout de suite **(Exer)** que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. On obtient alors, $k = -1$, i.e.,

$$\theta = -\frac{3\pi}{8}.$$

(c) Via (b), nous savons que $z = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$. Cette égalité nous donne donc

$$\cos(-\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin(-\frac{3\pi}{8}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Or, on a d'une part

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \cos(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{-3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

et d'autre part

$$\sin(\frac{\pi}{8}) = \sin(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{-3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

(d) Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Puisque $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il vient

$$2\cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

i.e., $\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. L'inégalité $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ entraîne alors

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

De la valeur de $\cos^2(\frac{\pi}{8})$, on déduit

$$\sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

L'inégalité $\sin(\frac{\pi}{8}) > 0$ donne alors

$$\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

■

Exercice 10 *(a) Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = \frac{1}{4}$. En donner une représentation graphique.*
(b) Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = 4$. En donner une représentation graphique.

Solution. (a) Il s'agit d'étudier l'ensemble

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} : \left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = \frac{1}{4}\right\}.$$

Observons que **(Exer)** pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 2)\}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+iy+2i}{x+iy-2i}\right| = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow |x + i(2+y)|^2 = \frac{1}{16}\,|x + i(y-2)|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + (2+y)^2 = \frac{1}{16}(x^2 + (y-2)^2) \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{68}{15}y + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + (y + \frac{34}{15})^2 = \left(\frac{16}{15}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}_{(0,-\frac{34}{15}),\frac{16}{15}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, notons que

$$(0, 2) \notin \mathcal{C}_{(0,-\frac{34}{15}),\frac{16}{15}}.$$

Ceci combiné aux équivalences ci-dessus nous dit **(Exer)** alors que

$$A = \left\{x + iy : (x, y) \in \mathcal{C}_{(0,-\frac{34}{15}),\frac{16}{15}}\right\}.$$

La représentation graphique est laissée à titre d'exercice **(Exer)**.
(b) Il s'agit d'étudier l'ensemble

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} : \left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = 4\right\}.$$

Observons que **(Exer)** pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+iy+2i}{x+iy-2i}\right| = 4 &\Leftrightarrow |x+i(2+y)|^2 = 16\,|x+i(y-2)|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+(2+y)^2 = 16(x^2+(y-2)^2) \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{68}{15}y+4=0 \\
&\Leftrightarrow x^2+(y-\frac{34}{15})^2 = \left(\frac{16}{15}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{C}_{(0,\frac{34}{15}),\frac{16}{15}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, notons que

$$(0,2) \in \mathcal{C}_{(0,\frac{34}{15}),\frac{16}{15}}.$$

Tout ceci nous donne alors **(Exer)**

$$B = \left\{x+iy : (x,y) \in \mathcal{C}_{(0,\frac{34}{15}),\frac{16}{15}} \setminus \{(0,2)\}\right\}$$

La représentation graphique est laissée à titre d'exercice **(Exer)**. ■

Exercice 11 (a) *Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^2-(3+2i)z+(5+i) = 0$.*
(b) *Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $iz^2+(4i-3)z+(i-5) = 0$.*

Solution. (a) Notons S l'ensemble recherché, i.e.,

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : z^2-(3+2i)z+5+i = 0\right\}.$$

Posons $a = 1$, $b = -(3+2i)$ et $c = 5+i$. On a

$$\Delta = b^2-4ac = -15+8i.$$

On montre que **(Exer)** l'ensemble des racines carrées de Δ est $\{1+4i, -1-4i\}$. Il reste à appliquer l'exercice 4 pour obtenir

$$S = \{1-i, 2+3i\}.$$

(b) Notons S l'ensemble recherché, i.e.,

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : iz^2+(4i-3)z+(i-5) = 0\right\}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a **(Exer)**

$$iz^2+(4i-3)z+(i-5) = 0 \Leftrightarrow z^2+(4+3i)z+1+5i = 0.$$

Il s'ensuit

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : z^2+(4+3i)z+1+5i = 0\right\}.$$

Posons $a = 1$, $b = 4+3i$ et $c = 1+5i$. On a

$$\Delta = b^2-4ac = 3+4i.$$

On montre **(Exer)** que l'ensemble des racines carrées de Δ est $\{2+i, -2-i\}$. Par application de l'exercice 4, on a

$$S = \{-1-i, -3-2i\}.$$

■

Exercice 12 *Mettre sous forme algébrique* $(1+i)^{12}$ *et* $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

Solution. Commençons par mettre $(1+i)^{12}$ sous forme algébrique. L'écriture exponentielle de $1+i$ est **(Exer)**

$$1+i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit

$$(1+i)^{12} = \sqrt{2}^{12}(e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} = 2^6 e^{i3\pi} = -2^6.$$

Poursuivons en mettant $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6$ sous forme algébrique. L'écriture exponentielle de $1-i$ est **(Exer)**

$$1-i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il vient alors

$$(1-i)^6 = \sqrt{2}^6 e^{-i6\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^6 e^{-i\frac{3\pi}{2}}.$$

Or, on a

$$e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \cos(\frac{3\pi}{2}) - i\sin(\frac{3\pi}{2}) = i.$$

Finalement, on a

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{\sqrt{2}^6}(1-i)^6 = \frac{1}{\sqrt{2}^6}\sqrt{2}^6 i = i.$$

■

Exercice 13 *Déterminer l'ensemble des* $z \in \mathbb{C}$ *satisfaisant* $(1+i\sqrt{3})z^4 = 1-i$.

Solution. Notons A l'ensemble recherché, i.e.,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (1+i\sqrt{3})z^4 = 1-i\}.$$

Ecrivons tout d'abord $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme exponentielle **(Exer)**,

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}.$$

Ceci nous dit alors que

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}\}.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Choisissons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = |z_0|\, e^{i\theta}$. On a alors l'équivalence **(Exer)**

$$z_0 \in A \Leftrightarrow \begin{cases} |z_0| = \frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{1}{4}}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

On en déduit

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{1}{4}}} e^{i(-\frac{7}{48}\pi + \frac{k\pi}{2})} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Or, l'ensemble $\left\{e^{i\frac{k\pi}{2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'ensemble des racines 4-èmes de l'unité qui s'écrit encore **(Exer)**

$$\left\{e^{i\frac{k\pi}{2}} : k \in \{0,1,2,3\}\right\}.$$

Finalement, il vient

$$A = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{1}{4}}} e^{i(-\frac{7}{48}\pi+\frac{k\pi}{2})} : k \in \{0,1,2,3\}\right\}.$$

■

3 Exercices supplémentaires

Exercice 14 *Soient $n \geq 1$ un entier, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. Calculer*

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|.$$

Exercice 15 *Soient $n \geq 1$ un entier, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. Calculer*

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z.$$

Exercice 16 *Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,*

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.$$

Exercice 17 *Soient $\theta \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \textit{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Exercice 18 *Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $e^z = Z$.*

Exercice 19 *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$|z| \leq |z|^2 + |z-1|.$$

Exercice 20 *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que*

$$\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Exercice 21 *Soient $u \in \mathbb{C}$ avec $|u| = 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que*

$$\left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}.$$

Exercice 22 *Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$,*

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|.$$

En déduire que pour tout $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} &|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \\ &\leq |z_1+z_2| + |z_1+z_3| + |z_1+z_4| + |z_2+z_3| + |z_2+z_4| + |z_3+z_4|. \end{aligned}$$